目　　录

（上　　册）

目　录

（下　册）

第三篇　积　分　学

第四篇 无穷級数和广义积分

緒　論

本书包括了数学发展过程中微积分的主要內容。从数学历史来讲，微积分的产生标志着从初等数学到高等数学的飞跃。高等数学的研究对象和方法有自己明显的特点。高等数学和初等数学虽然有許多相同的地方，但也存在着許多本质上的差别。我們在这里准备淺显地說明一下高等数学研究的对象和方法具有哪些主要的特点，高等数学和初等数学的联系与差别，以及我們学习高等数学时需要明确的一些主要問題，以便讀者一开始就能密切地注意到这些問題。

高等数学研究的客观对象和方法具有哪些主要特点呢？

我們可以看一看数学发展的历史。十六世紀，由于生产技术的进步，也推动了数学的发展。我們知道，在这一世紀，机械学、航海学、物理学、力学提出了許多新的問題，如：运动着的物体的速度和它的运动規律有怎样的关系，天体是沿着怎样的軌道运行的，不規則图形的面积怎样計算等等。这些問題就要求有新的数学工具来解决，我們可以从下面几个具体例子来說明。

［例 1］ 設物体运动規律是

$$s=t^2,$$

s 是物体运动的路程，t 是經过的时間；我們要求出 $t=1$ 秒这一瞬間物体的速度是多少。也就是物理学中所謂的瞬时速度是多少。

利用初等数学的知識，很容易計算出某一段时間間隔內这个物体运动的“平均速度”，那么，我們就从研究平均速度入手。但不能只計算一个或几个平均速度，而要有选择地計算一連串的平均

速度，观察它們变化的趋势。例如先算出1秒到1.5秒間的平均速度

$$\bar{v}_1=\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}=\frac{3.375-1}{0.5}=4.750\text{ 米/秒},$$

再算出1秒到1.2秒間的平均速度

$$\bar{v}_2=\frac{1.728-1}{0.2}=3.640\text{ 米/秒},$$

继續算下去，得到一連串的平均速度：

1秒到1.1秒間的平均速度 $\bar{v}_3=3.310$ 米/秒、

1秒到1.01秒間的平均速度 $\bar{v}_4=3.030$ 米/秒，

1秒到1.001秒間的平均速度 $\bar{v}_5=3.003$ 米/秒，

……………………………………………………

可以看出，平均速度 $\bar{v}$ 随着时間間隔的变化而变化。当时間間隔取得越小时，$\bar{v}_n$ 就越接近于我們要寻求的答案。从上述平均速度的趋势看来，$t=1$ 秒时的瞬时速度大体上是3米/秒。

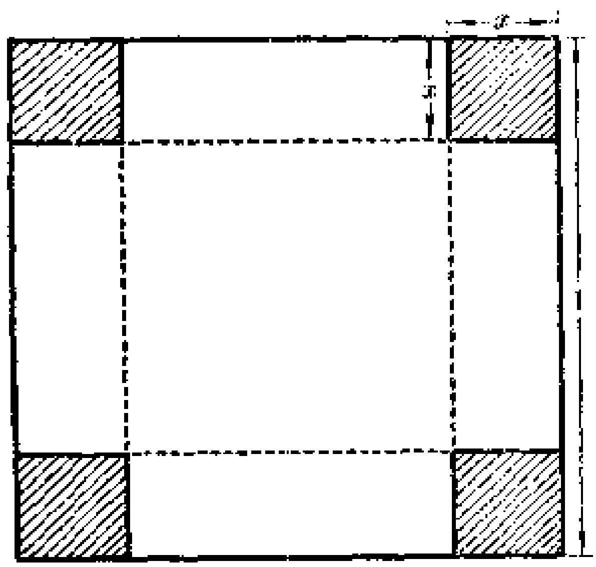


图 0-0-1

［例2］ 某个工厂制造一种鉄盒子时提出了这样一个問題：边长1分米的正方形原材料(图0-0-1)，剪去阴影部分做一个高为 x 的无蓋小盒，問 x 取怎样的尺寸才能使盒的容积最大?

不难得出容积 V 和盒高 x 满足以下公式：

$$V=x(1-2x)^2.$$

当取 $x=\frac{9}{20},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7}$（分米）时，得

$V=0.0045,\ 0.0160,\ 0.0370,\ 0.0720,\ 0.0716$（分米^3）。

这些容积 V（图 0-0-2）随 x 的变化而变化，当 x 由大变小时，V 相应地由小到大再由大到小。从而，我們可以看出最大体积 V 大体上是出現在 $x=\frac{1}{5}$ 及 $x=\frac{1}{7}$ 之間。如果在 $x=\frac{1}{5}$ 及 $x=\frac{1}{7}$ 之間再取一串数值，算得更細些，那么我們对于什么时候容积最大，会看得更准确些。

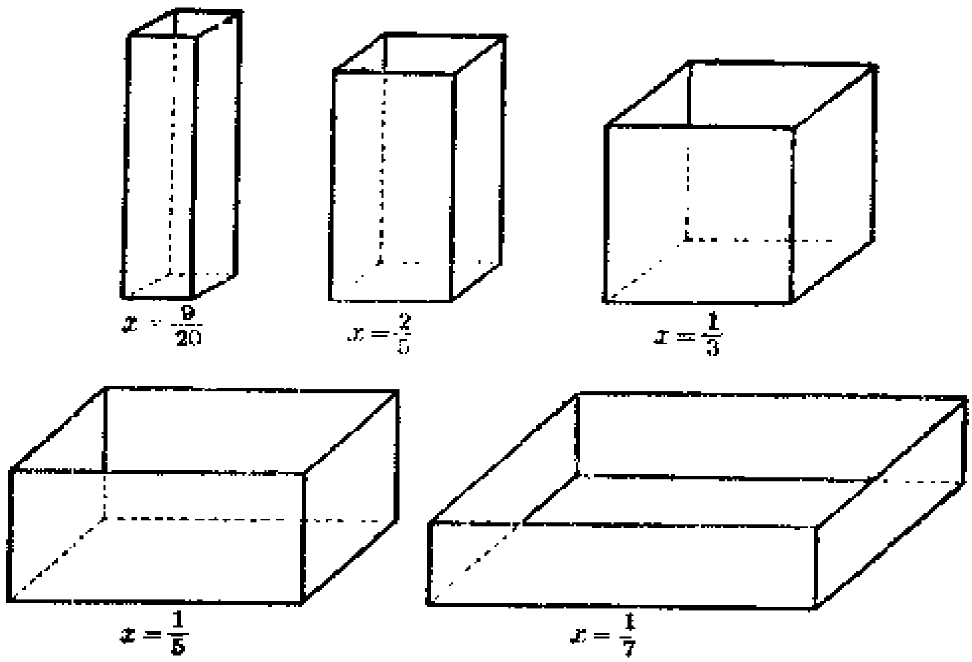


图　0-0-2

［例 3］　現代科学技术常要求我們計算許多不規則图形的面积（图 0-0-3）。当然，越不規則，計算起来越复杂。我們来計算一

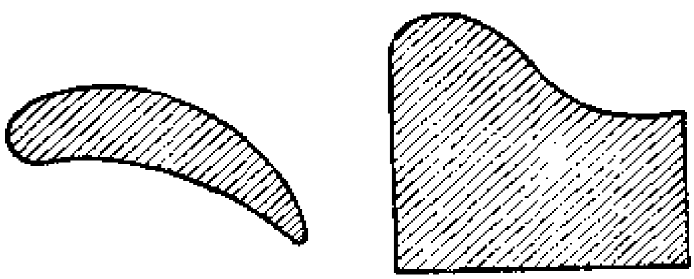


图　0-0-3

个較为簡单的叫做“曲边梯形”的面积作为例子，曲边是 $y=x^2$ 的一部分(图 0-0-4)。

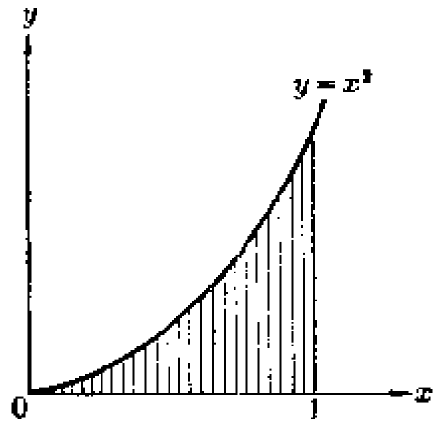


图 0-0-4

利用初等数学中的方法，我們按照图 0-0-5 中所示作出許多小矩形，这些小矩形面积的和近似于我們所求的面积，用这样的方法可以作出一連串不同的矩形面积之和 s_n 作为近似值。当然任何一个 s_n 不等于所求的曲边梯形的面积，但是随着分段愈来愈細，s_n 的变化趋势也愈来愈接近于曲边梯形面积。由图 0-0-5 所示可以看出，所求面积的值大体上在 $\frac{1}{3}$ 左右。

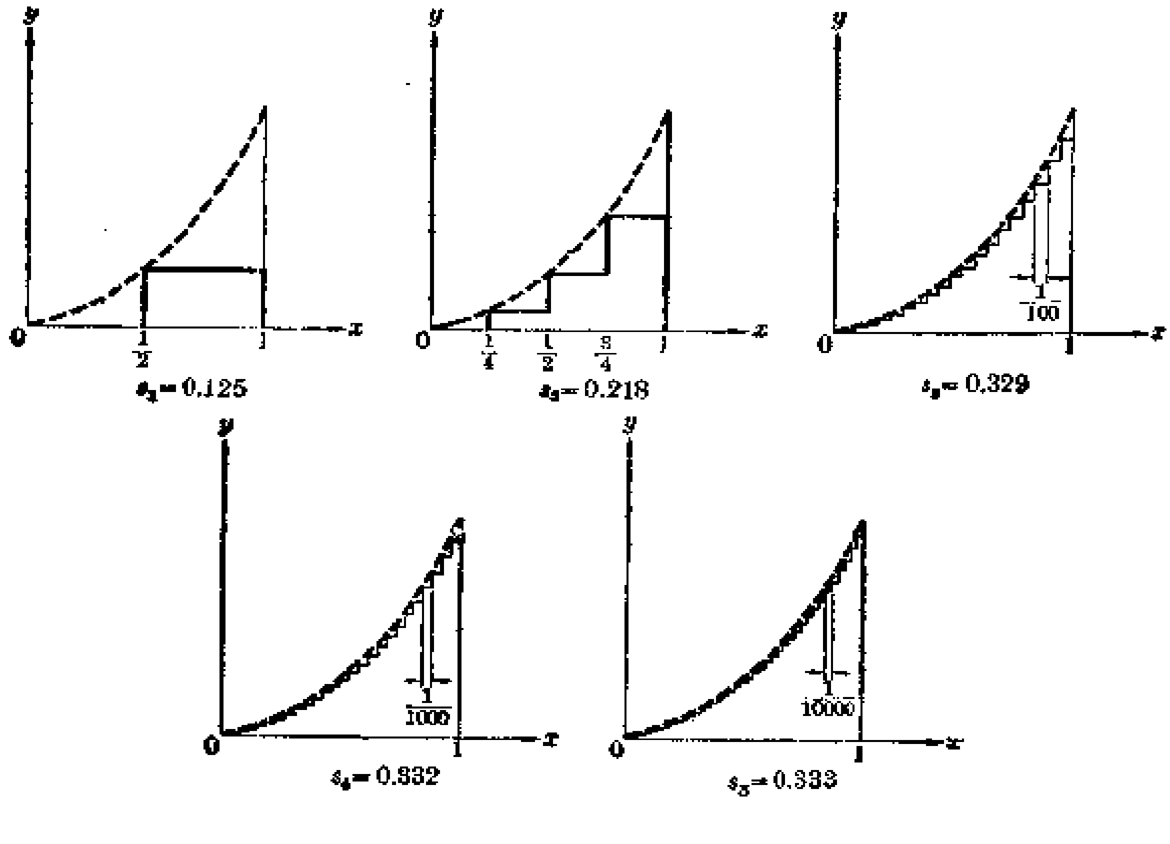


图 0-0-5

从以上三个例子我們看到：

1. 用初等数学工具来解决这一类問題不仅相当麻煩，而且又不能得到最終的答案，只能作大体上的估計；这是因为初等数学只能在有限的范圍內孤立地来討論問題。例如做盒子吧，用初等数学的办法，只能作出有限个盒子来加以比較；再如求速度吧，初等数学只能够考虑某个时間間隔內的平均速度；因此初等数学只能孤立地考虑某个片断。

2. 这一类問題都要求人們具有这样的一种观念，那就是必須在变化的过程中来考虑問題。无論如何不能只考虑一个片断，而应該考虑前后联系和变化的发展。例如做盒子吧，决不能停留在有限个盒子上，而应該在容积的变化过程中来找出一个具有最大容积的盒子。

由于大量类似的問題需要解决，从而产生了高等数学。

虽然如此，初等数学在很多的場合下仍旧起着重要的作用，但它总有一定的局限性，从上面的問題中我們也看到了这一点。

高等数学的方法和初等数学的方法根本不同，它要求在变化的过程中来掌握变量的实质。这样，既需要洞察过程的全貌，又需要作极其精細的分析，往往要研究在某一点极其微小的附近变量变化的情况。作个譬喻，一个好的短跑教练，他不仅要洞察整个跑步过程的全貌（从起点到終点），同时还要对某些地方作极其精細的分析。例如必須仔細分析起跑动作以及終点冲刺动作。

为了作进一步說明，我們再举一个例子。

［例 4］ 如同第二个例子一样，計算下面两个曲边梯形的面积，我們得到如图 0-0-6 所示的一系列矩形面积的和。

这些和数，随着分割愈来愈密，也就愈来愈接近于所求的面积。从图中我們看到，$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的那块曲边梯形面积，大致上是

2，但 $y=\frac{1}{x^3}$ 的那块曲边梯形面积却是越来越大，以致求不出这块面积。这两个图形虽然大致上差不多，但为什么一个面积可以求出来而另一个面积求不出来呢？

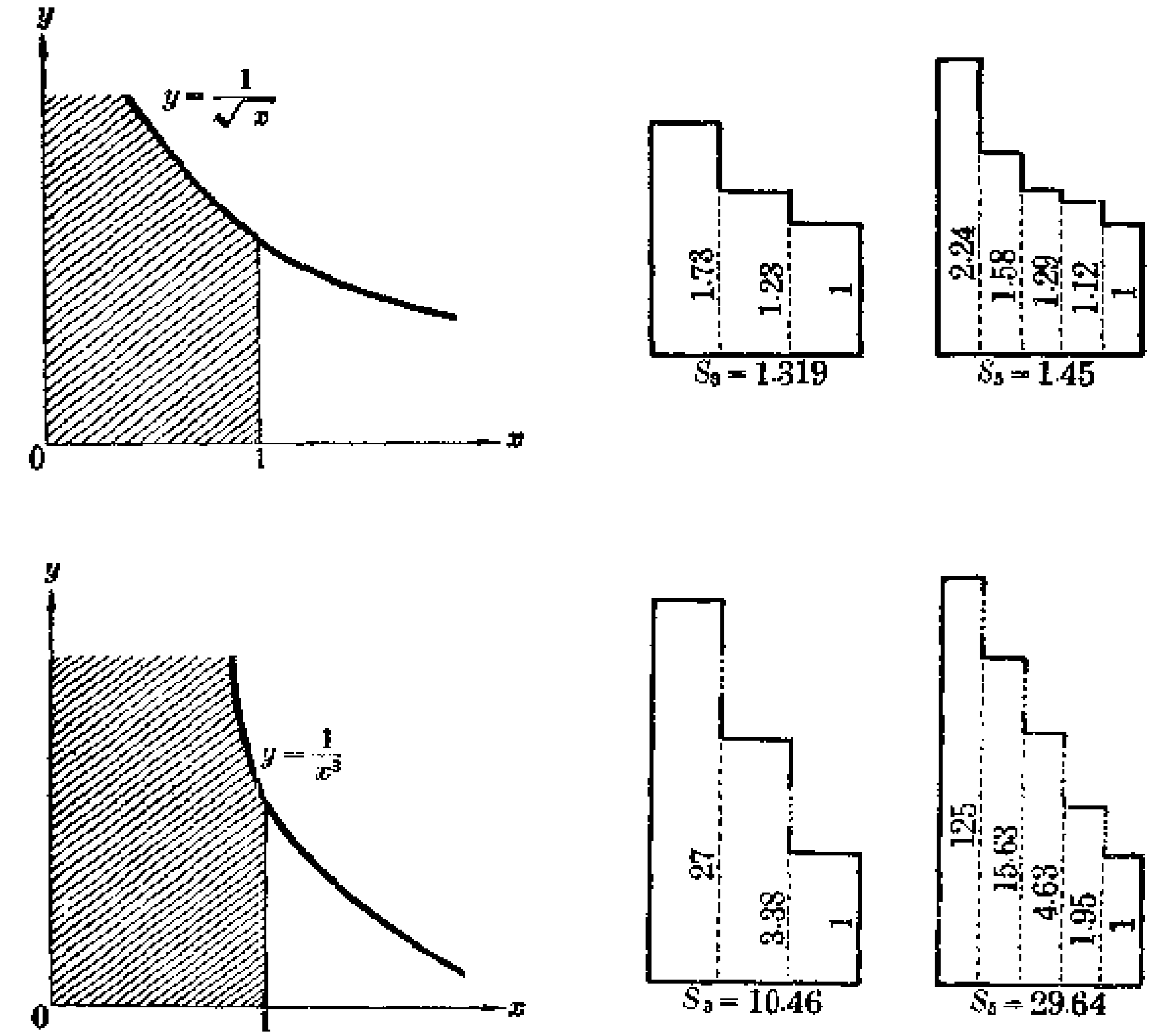


图 0-0-6

这是因为在 0 点出了問題，如果我們不去算 0 到 1 的那块面积，而是算 $\frac{1}{2}$ 到 1，或从 $\frac{1}{3}$ 到 1，从 $\frac{1}{4}$ 到 1 等等之間的面积，可象例 3 那样得到最終的結果。因此我們看到，只要把 0 点除去，計算从某个定数 $\delta>0$ 到 1 的那块面积，直观上告訴我們，无論对哪一个图形这个面积一定是存在的。

因此，为了揭露上述奇怪現象的秘密，就完全有必要非常精細地研究 0 点附近曲綫 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 以及曲綫 $y=\frac{1}{x^3}$ 的性质，也只有經过这样精細的分析，才能彻底弄清楚問題的实质。

从上面所說，使我們初步了解高等数学的特点和它与初等数学的关系。因此，当我們学习高等数学的时候，就必須非常仔細地来分析各种現象，以严格的态度来論証各种問題和熟练基本的运算。

本书的主要內容有极限論、微分学、积分学和級数論。它們是全部数学的最重要的基础。

第一篇 极 限 論

第一章 变量与函数

一、变 量

从緒論中已經知道，高等数学的研究对象是变量。

当我們观察各种自然現象或技术过程的时候，我們常常会遇到許多的量，这些量一般可分为两种：一种是在过程进行中保持不变的量，这种量称为常量。还有一种是在过程进行中会起变化的量，称为变量。例如，自由落体的下降时間和下降距离是变量，而落体的质量在这一过程中可以看为常量。再如将一密封容器內的气体加热，气体的体积和分子数目显然是常量，而气体的温度和压力是变量。在数学上，我們常抽去变量或常量的具体意义来研究某一过程中这些量在数值上的关系。但尽管如此，在研究过程中有时还是需要注意它們的具体意义。

这些量，例如时間、质量、压力、温度、分子数等，都可以用实数来表示，所以应該称它們为实变量或实常量。本課程的研究对象都是实变量和实常量。也簡称它們为变量和常量。

在中学的代数学里已經知道，实数包括有理数和无理数两种。所有整数、所有分数統称为有理数。换句話說，凡能表示为 $\frac{p}{q}$（这里 p, q 为整数，$q>0$, p 和 q 无公因子）形式的数就是有理数。除了这种形式的数以外，还存在着不能表示为上述形式的数如 $\sqrt{2}$，圓周率 π 等等，称为无理数。关于实数的严密理論可参見本篇的附录——实数理論，这里不敘述了，仅将几个重要性质，提供讀者

注意，这几个性质，讀者在中学里也已經知道了：

(i) 实数和直綫上的点有着一一对应的关系。我們称实数的这个性质为实数系統的連續性，并称这条直綫为实数軸。今后我們将經常利用实数軸上的点来表示实数，而把点和实数統一起来不加区别。

(ii) 有理数在实数中是稠密的，也就是說，在任何两个不同的实数之間必存在着有理数。同样无理数也是稠密的，在任何两个不同的实数之間也必存在着无理数。

(iii) 有理数的和、差、积、商仍为有理数。有理数与无理数的和、差、积、商为无理数。无理数的和、差、积、商可能仍为无理数，也可能为有理数。

在观察各种运动过程的时候，我們还发現，有些变量具有一定的变化范圍。例如温度不論在什么問題中，它只能大于 $-273°C$，自由落体的下降时間和距离也只有在落体落到地面以前才有意义。

变量的变化范圍，也就是变量的数值范圍，在取实数值的时候，我們往往用区間表示：設 a, b 是有限数，$a<b$，所有滿足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的 x 的全体組成一个閉区間，記为 $[a, b]$；也可以說：变量 x 的变化范圍为閉区間 $[a, b]$. 所有滿足不等式 $a<x<b$ 的 x 的全体組成一个开区間，記为 (a, b). 另外滿足 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的 x 的全体組成半开半閉的区間 $(a, b]$ 或 $[a, b)$；如果变量 x 能够取实数軸上所有的数，我們把它的变化范圍記为 $(-\infty, +\infty)$，在这里“∞”并不表示数量，它只不过是一个記号，前面的“+”，“−”表示方向。如果变量 x 能够取所有大于等于 a 的实数，就把它的变化范圍記为 $[a, +\infty)$ 等等。有时候，并不一定要指明是开的或閉的場合，我們也常用 X, Y 等来表示区間。

二、函 数

在同一現象所碰到的各种变量中，通常并不都是独立变化的。

它們之間存在着一种依賴关系，让我們考察几个具体例子：

1. 自由落体运动的規律：根据著名的伽利略公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

这里 s 表示下降距离，t 表示时間，g 是重力加速度。这个公式指出了在物体自由降落的过程中，距离 s 和时間 t 之間的一种依賴关系。

2. 緒論中曾經提出的用正方形鉄皮作成无盖鉄盒的問題，設用一块边长为 a 的正方形鉄皮作成一个高为 x 的无盖小盒(图1-1-1)。

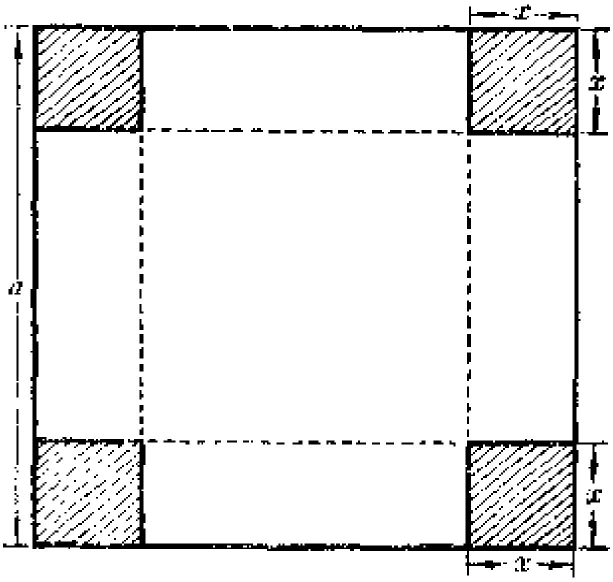


图 1-1-1

这盒的容积 V 和高 x 存在着依賴关系：

$$V=x(a-2x)^2.$$

3. 設在一定条件下，給出一克冰，它的溫度为 $-10°C$，所含的热量 $Q=0$. 对这一克冰加热，使它的溫度由 $-10°C$ 逐漸增加到 $10°C$. 它的形态由冰变为水。显然，其中所含的热量亦必然跟着有所变化。我們进一步来考察热量 Q 和溫度 t 之間的依賴关系。由于冰的热容量为 0.5，而水的热容量为 1，溶解热为 80，因此热量 Q 与溫度 t 之間存在着以下依賴关系(图 1-1-2)。

$$Q=\begin{cases}0.5t+5, & \text{当 } -10\leqslant t\leqslant 0,\\ t+85, & \text{当 } 0<t\leqslant 10.\end{cases}$$

以上的依賴关系中，我們看到一些共同特征。首先，在这些变量当中，有些量称为自变量，如时間 t、盒高 x、溫度 t 等，它們并有一定的变化范圍。有些量是随着自变量的变化而改变的，称为因

变量，如落体下降距离 s、盒的容积 V、热量 Q，它們也有一定的变化范圍。在一現象里，哪个变量是自变量或因变量并不是絕对的，例如在自由落体公式中，如果我們已經知道下降距离为 s 而要求出下降了多少时間，这时就視距离 s 为自变量，而

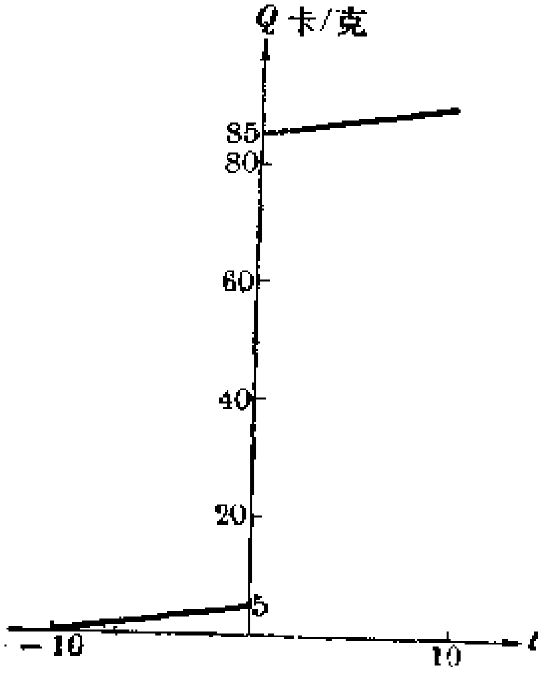


图 1-1-2

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}},$$

那么时間 t 就成为因变量了。其次，对一定范圍內的每一个自变量，通过依賴关系，总能得到一个确定的并且唯一的因变量。

把这种特征抽象出来，就得到函数的概念：若对某个范圍內的任何一个实数值 x，可以按某种規律得到一个唯一确定的实数值 y，就称 y 为 x 的函数，詳細說来，应該称 y 为一个实变量 x 的单值实函数，并称 x 为自变量，y 为因变量(也称函数)，記为 $y=f(x)$。

自变量 x 的变化范圍称为函数的定义域，因变量 y 所对应的数值范圍称为函数的值域。这些变化范圍往往是区間。

[例 1] 函数

$$y=\sqrt{\sin x}$$

只有当根号內的 $\sin x$ 非負时，这个函数才有意义，可見它的定义域为 $[2n\pi,(2n+1)\pi]$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，函数的值域为 $[0,1]$。

[例 2] 函数

$$y=\frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$$

的定义域为滿足下列不等式的全部 x 值：

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1)>0,$$

解之得 $x>2$ 和 $x<-1$. 这就是定义域。如果用区間来表示，定义域为 $(-\infty,-1)$, $(2,+\infty)$. 函数的值域为 $(0,+\infty)$.

[例 3]　設有两个函数

$$y=\sin x \text{ 和 } y=\frac{x\sin x}{x},$$

前者的定义域为 $(-\infty,+\infty)$; 后者的定义域为 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$. 实际上第二个函数也就是:

$$y=\begin{cases}\sin x, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时},\\ \text{无定义}, & \text{当 } x=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

因此，这两个函数并非恒等的，因为它們的定义域不一样。这个例子告訴我們，如果两个函数的定义域不一样，即使它們的函数关系的表达式是相同的，但这两个函数总不是同一的。

应該特别注意的是，在函数的概念中，并沒有表明变量間的函数关系非得用一个公式(如例 1, 例 2 那样)来表达不可。事实上，例 3 中的依賴关系就是一种不能用一个公式来表达的函数关系，而是采用分段的表示法。再如火車时刻表，出站和进站的車次都是时間的函数，但它根本就不可能用公式来表达，只能用图表来表示这种函数关系。气象站中的温度記录器，記录了空气、温度与时間的一种函数关系，这种关系既不用一个或多个公式来表达，也不用列表法来表达，而是借助仪器中的自动笔在紙带上所繪的一条連續不断的曲綫来近似表达的。另外还有一种函数关系，它只能用一句話来表示出其間的依賴关系。例如："y 是 x 的最大整数部分"就是这样的一种重要的函数。因为对于任何实数 x, 总可以把它表示为一个整数和一个非負小数之和，也就是:

$$x=[x]+(x),$$

这里 $[x]$ 是一个整数，(x) 是一个非負小数，$0\leqslant(x)<1$, 例如当 $x=\dfrac{7}{2}$ 时，$[x]=3$, $(x)=0.5$, 而当 $x=-2.41$ 时，$[x]=-3$,

$(x)=0.59$. 容易看出，$[x]$就是x的最大整数部分，它是由x唯一确定。因而"y是x的最大整数部分"这句話中所规定的y符合函数的定义，确实是x的一个函数。

我們記这个函数为(图 1-1-3)：

$$y=[x].$$

例如，当$x=2.17$时，

$$y=[2.17]=2;$$

当$x=-3.91$时，

$$y=[-3.91]=-4.$$

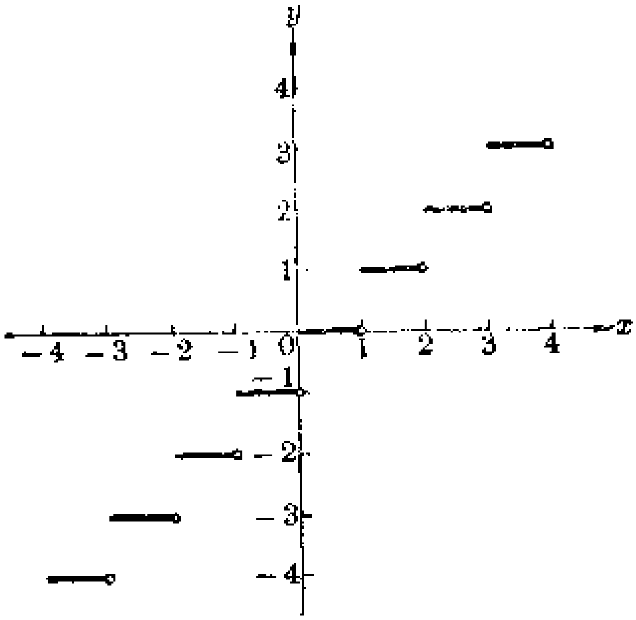


图 1-1-3

在具体問題中，函数的形式是各种各样的。自由落体的公式是一种形式，火車时刻表是一种形式，而圓的方程

$$x^2+y^2-1=0$$

又是一种形式，在这个方程中，虽然变量y并沒有用仅含有变量x的明确公式表示出来，但我們确实知道，只要解这个方程就可以得到：

$$y=\sqrt{1-x^2}, \quad 当 y\geqslant 0 时$$

或 $$y=-\sqrt{1-x^2},\quad 当\ y<0\ 时,$$

也就是說，由方程

$$x^2+y^2=1$$

能够在 $y\geqslant 0$ 或 $y<0$ 的时候确定 y 是 x 的函数。对于圆的方程而言，这是很容易看出来的，但也有并不是那么很容易看出来的方程。例如开普勒(Kepler)方程

$$y-x-\varepsilon\sin y=0$$

(这里 ε 为常数，$0<\varepsilon<1$)。在这方程中甚至不可能将 y 用 x 的明显公式表示出来。尽管如此，我們以后将会知道 y 仍旧是 x 的函数。一般說，凡是能够由以下方程

$$F(x, y)=0$$

所确定的函数关系，称为隐函数。开普勒方程就是一个隐函数。需要注意的是：随便写一个方程并不一定就是一个隐函数。究竟在什么条件下能够由一个方程来确定一个隐函数呢？这将在第二篇的隐函数存在定理中专門討論。隐函数的理論在微分方程和几何学中有很大应用。

关于函数本身，还有几个常用的概念必須叙述一下，其中有些概念在中学的課程里已經叙述过。例如单調函数、奇函数、偶函数、周期函数，因此，这里只是簡单地提一下。

1. 单調函数：如果对于某区間 X 内的任何两点 $x_1<x_2$ 总成立着 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ (或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$)，則称函数 $y=f(x)$ 在区間 X 內为单調增加（或单調減少），有时亦称单調上升（或单調下降）。如果等号不成立，則称为严格单調，它們的图形是图 1-1-4。

2. 奇函数和偶函数：如果函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，并且对任何 x 滿足等式 $f(-x)=-f(x)$，就称 $f(x)$ 为奇函数，其图形关于原点对称(图 1-1-5)。如果对于任何 x，函数 $f(x)$ 滿足等式 $f(-x)=f(x)$，則称它为偶函数，其图形关于 y 軸对称

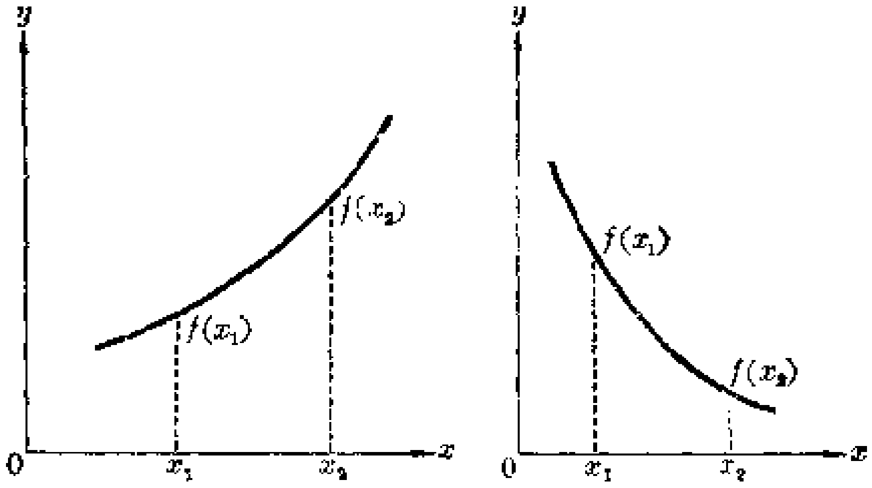


图 1-1-4

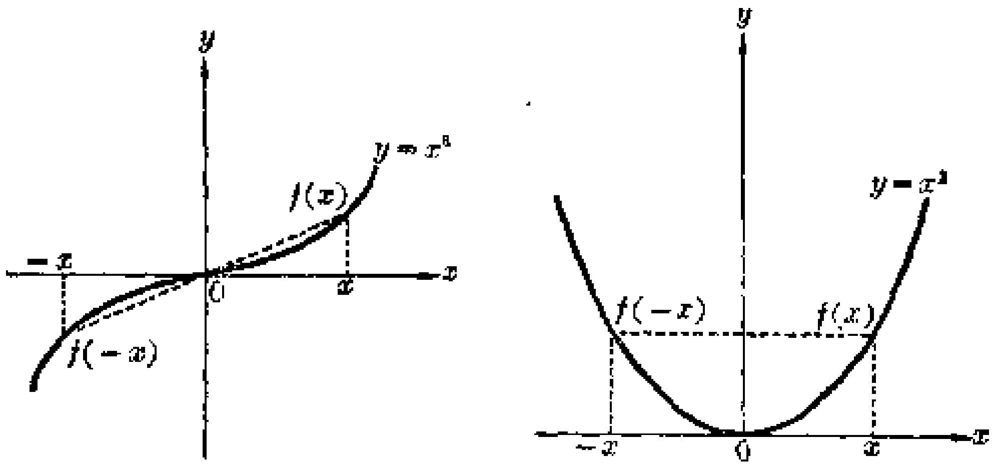


图 1-1-5

(图 1-1-5)。例如 $y=x^n$，当 n 为奇数时为奇函数，当 n 为偶数时为偶函数。这正是奇函数、偶函数名称的由来。

3．周期函数：凡成立着等式 $f(x+\omega)=f(x)$ 的函数（这里，$\omega>0$）称为周期函数，周期为 ω。如正弦函数 $y=\sin x$ 就是周期函数，周期为 2π。按周期的定义，4π，6π，也是正弦函数的周期，而 2π 为它的最小周期。通常函数的周期专指它的最小周期。但并非每一个周期函数都有最小周期的（参见例 4）。

4．反函数：如果在一些条件下，从函数方程 $y=f(x)$ 中能够

解出 x,得到 $x=\varphi(y)$,这时 y 就成了自变量而 x 成了因变量,則称这函数 $x=\varphi(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数,显然它們两者的图形是重合的。但是习慣上,我們常常用 x 表示自变量,而用 y 表示因变量,因此把函数 $x=\varphi(y)$ 改記为 $y=\varphi(x)$,亦称 $y=\varphi(x)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数。当然 $f(x)$ 也是 $\varphi(x)$ 的反函数。或者說,$f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 互为反函数。例如 a^x 和 $\log_a x$ 互为反函数。

反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形,是以經过第一、三两象限的坐标軸平分角綫为軸,对称于原来函数 $y=f(x)$ 的图形(图 1-1-6),这是因为 $y=f(x)$ 与 $x=\varphi(y)$ 的图形是重合的,而 $x=\varphi(y)$ 与 $y=\varphi(x)$ 仅仅是 x, y 的位置对調了一下。換句話說,如果在曲綫 $x=\varphi(y)$ 上(即在曲綫 $y=f(x)$ 上)有一点 $M(x,y)$,那末在曲綫 $y=\varphi(x)$ 上就有一点 $M'(y,x)$,这两点对称于所說的平分角綫,这就証明了上面的論断。这个論断亦可用初等几何的方法来証明。为此只要証明 $\triangle OM'N$ 和 $\triangle OMN$ 全同即可(图 1-1-6),讀者可以自己証明。

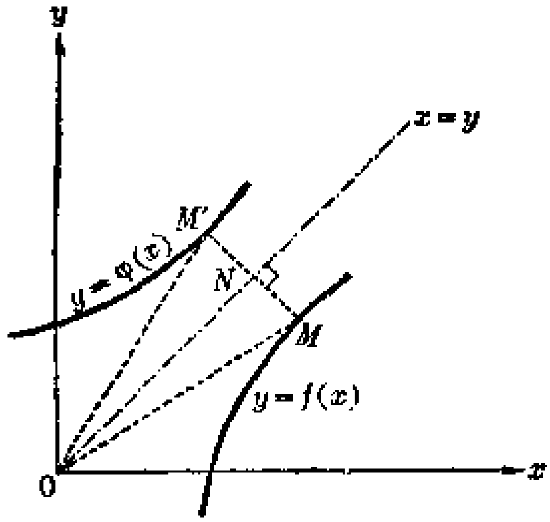


图 1-1-6

5. 复合函数:例如

$$y=\sin u,\quad 而\quad u=e^x,$$

容易看出,y 是 x 的函数

$$y=\sin e^x.$$

这种形式的函数称为复合函数,一般地說,若函数 $y=\varphi(u)$ 的定义域为 U,而函数 $u=f(x)$ 的定义域为 X,值域为 U^*,并且 U^* 包含在 U 内,也就是說,函数 $u=f(x)$ 的值不超出函数 $\varphi(u)$ 定义域 U 的范

圍。那么对于范圍 X 内的每一个值 x，經过中間变量 u，相应地得到唯一确定的一个值 y。于是我們称 y 經过中間变量 u 而成为 x 的函数，記为

$$y=\varphi[f(x)].$$

这种函数称为复合函数。应該指出，函数 $u=f(x)$ 的值不超出函数 $\varphi(u)$ 定义域 U 的范圍这个假設，是极重要的。否則会得出謬論。例如令：

$$y=\ln u,\ \text{而}\ u=\sin x.$$

这样就得到一个复合函数

$$y=\ln\sin x.$$

虽然 $u=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，但作为复合函数 $y=\ln\sin x$ 的定义域却只能是 $(2n\pi,(2n+1)\pi)$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；因为只有在这种情形下，才有

$$0<u=\sin x\leqslant 1.$$

也就是說，这时函数 $u=\sin x$ 的值域为 $(0,1)$，它是包含在 $y=\ln u$ 的定义域 $(0,+\infty)$ 内的。否則的話，例如考虑 $[\pi,2\pi]$ 上的 x，$y=\ln\sin x$ 就沒有意义了。

上面所討論的函数 $y=f(x)$，自变量只有一个，因变量也只有一个，或者称 y 为一个实变量 x 的单值实函数。但有时会遇到自变量不止一个的情形，例如理想气体的气态方程

$$p=\frac{RT}{V},$$

这里 p 表示气体压力，V 表示体积，T 表示温度，压力 p 依賴于两个变量 T 和 V。

一般地，具有多个自变量的函数，称为多元函数，記为 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。如果自变量有 n 个，称为 n 元函数。理想气体的气态方程就是一个二元函数。

有时也会遇到自变量只有一个但因变量却是多个的情形。例如(图 1-1-7)

$$y^2=x,$$

它的定义域为$[0,+\infty)$对于任何正数$x_0>0$,相应地可以得到两个 y 值$\sqrt{x_0}$和$-\sqrt{x_0}$，这种函数称为多值函数。多值函数往往可以分解为若干个单值函数来分别討論，如上面的函数就可以分解为两个单值函数

$$y=\sqrt{x},\quad y=-\sqrt{x}.$$

有时称这两个函数为多值函数$y^2=x$的单值支。

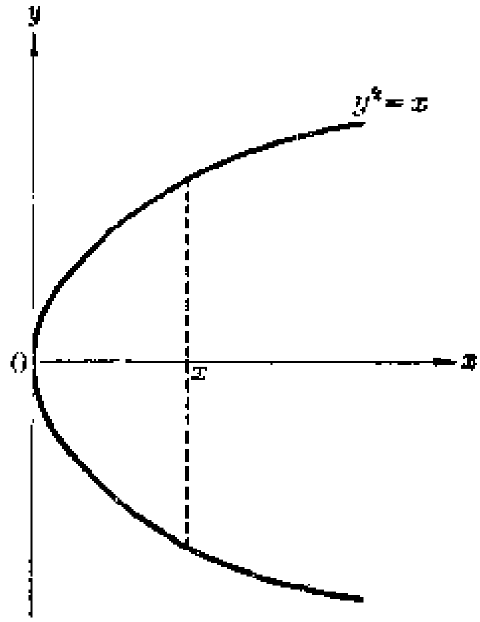


图 1-1-7

[例 4] 狄利克来(Dirichlet)函数

$$y=f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}.\end{cases}$$

例如，当$x=-2,\frac{3}{7},\frac{4}{7}$时，函数值 y 为 1，当$x=\sqrt{2},\sqrt{3},\pi$ 时，函数值为零。这个函数的图形是画不出来的，但可以作一些直观的想象：有无数多个点子稠密地分布在 x 軸上，也有无数多个点子稠密地分布在直綫 $y=1$ 上。

狄利克来函数非单調的。但它是偶函数，因为当 x 为有理数时，$-x$ 也是有理数，故 x 和 $-x$ 所对应的函数值皆为 1，两者相等，即$f(x)=1=f(-x)$。当 x 为无理数时，$-x$ 也是无理数，故$f(x)=0=f(-x)$。此外，任何有理数 r 皆是狄利克来函数的周期，这是因为，若 x 为有理数，那么 $x+r$ 也是有理数，故 $f(x)=1=f(x+r)$。若 x 为无理数，那么 $x+r$ 也是无理数，故 $f(x)=0=f(x+r)$。可見 r 为 $f(x)$ 的周期。因此，它没有最小周期。

三、基本初等函数

基本初等函数有以下几种，除了双曲函数外，讀者均已相当熟习，这里只将主要的地方概括地叙述一下。这些基本的初等函数在分析学中有很重要的地位。

1．幂函数：

$$y = x^{\mu} \quad (\mu \neq 0),$$

其中 μ 为任意常数。

(1) 幂函数的定义域：

当 μ 为正整数时定义域为 $(-\infty, +\infty)$。

当 μ 为負整数时为 $(-\infty, 0)$，$(0, +\infty)$。

当 $\mu = \frac{1}{\alpha}$，α 为正整数。若 α 为奇数，定义域为 $(-\infty, +\infty)$；若 α 为偶数时，定义域为 $[0, +\infty)$。

当 μ 为有理数，$\mu = \frac{p}{q}$ 时的定义域請讀者考虑之。

当 μ 为无理数时，定义域为 $(0, +\infty)$。

(2) 幂函数在第一象限内的图形（图 1-1-8, 9）：

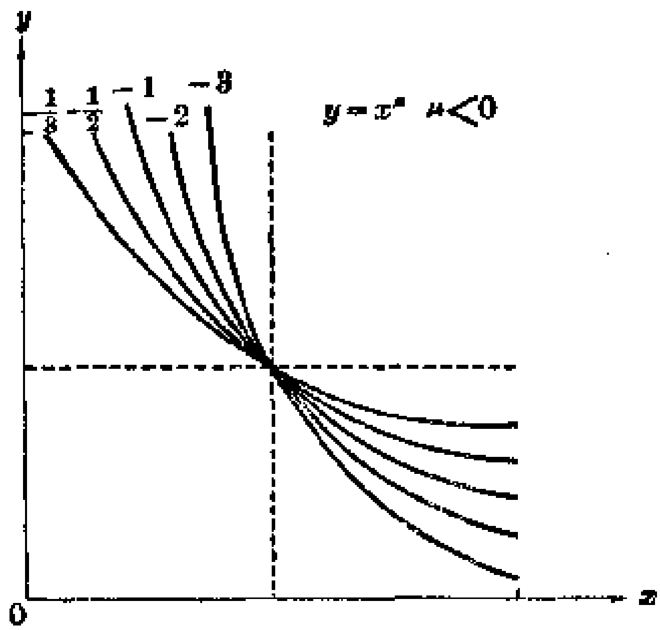


图 1-1-8

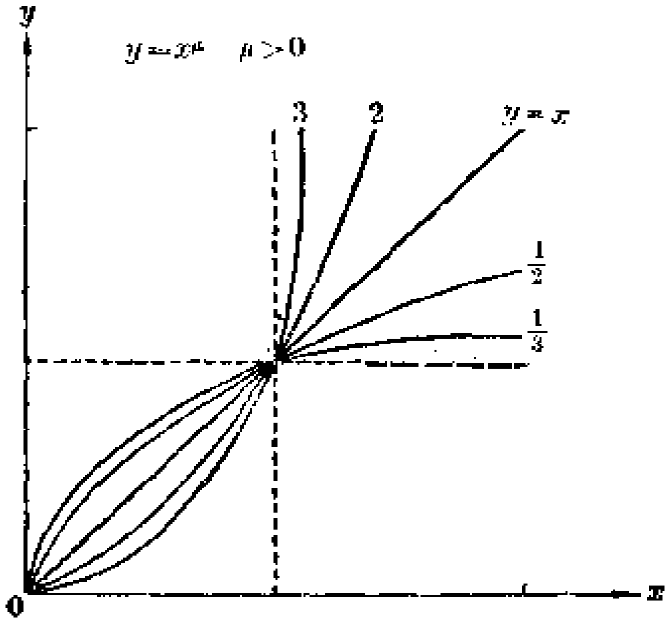


图 1-1-9

当 $\mu>0$ 时，函数是单调增加的，从图中可以看出增加的快慢是随着 μ 的不同而不同。μ 越大(或越小)，函数最初增加就越慢(或越快)，而以后却增加越快(或越慢)。在第二篇微分学中将会詳細討論函数变化的速度問題。

当 $\mu<0$ 时，函数是单调减少的。

不論 μ 为何值，函数图形皆經过(1, 1)点。

(3) 冪函数的奇偶性：

若 $\mu=\frac{p}{q}$(既約分数)为一有理数，那么：

当 p 为偶数时，为偶函数。

当 p 为奇数时，只有在 q 也是奇数时，函数才是奇函数。

2　指数函数：

$$y=a^x,$$

其中 a 为任意正常数，并設 $a\neq 1$.

(1) 指数函数的定义域$(-\infty, +\infty)$，值域$(0, +\infty)$。

(2) 指数函数的图形(图 1-1-10)：

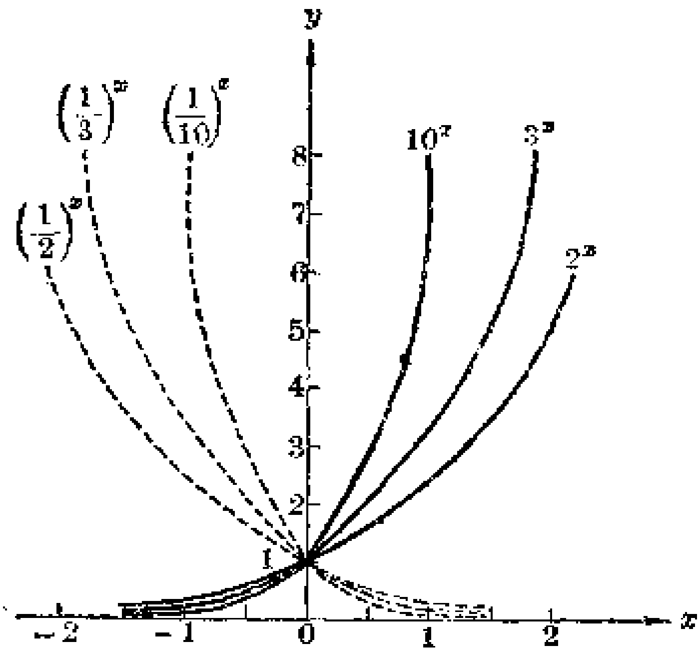


图 1-1-10

当 $a>1$ 时函数为单調增加。

当 $0<a<1$ 时函数为单調减少。

不論 a 为何値($a>0, a\neq1$)，函数图形均經过点(0,1)。

函数 a^x 和函数 $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图形是关于 y 軸对称的。

3. 对数函数:

$$y=\log_a x,$$

其中 a 为任意正常数，$a\neq1$，称为对数的底。

(1) 对数函数定义域为$(0, +\infty)$，值域$(-\infty, +\infty)$。

(2) 对数函数图形(图 1-1-11):

当 $a>1$ 时函数为单調增加。

当 $0<a<1$ 时，函数为单調减少。

不論 a 为何値($a>0, a\neq1$)函数图形皆經过点(1, 0)。

(3) 对数函数和指数函数互为反函数。

通常較常用的对数有以10为底和以 e 为底的，这里

$$e=2.71828\cdots$$

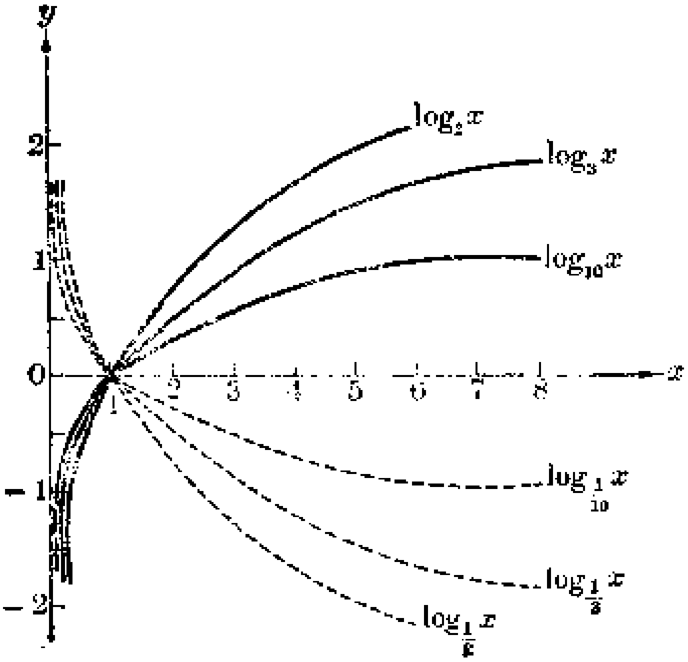


图 1-1-11

为一常数，将在下一章加以介紹。前者称为常用对数，后者称为自然对数。我們以后常将自然对数 $\log_e x$ 簡記为 $\ln x$，且将 $\log_{10} x$ 簡記为 $\lg x$。

4．三角函数：

正弦函数 $y=\sin x$，余弦函数 $y=\cos x$，正切函数 $y=\operatorname{tg} x$，余切函数 $y=\operatorname{ctg} x$ 等等。它們的图形見图 1-1-12，13。三角函数为周期函数，正弦和余弦函数的周期为 2π。正切和余切函数的周期

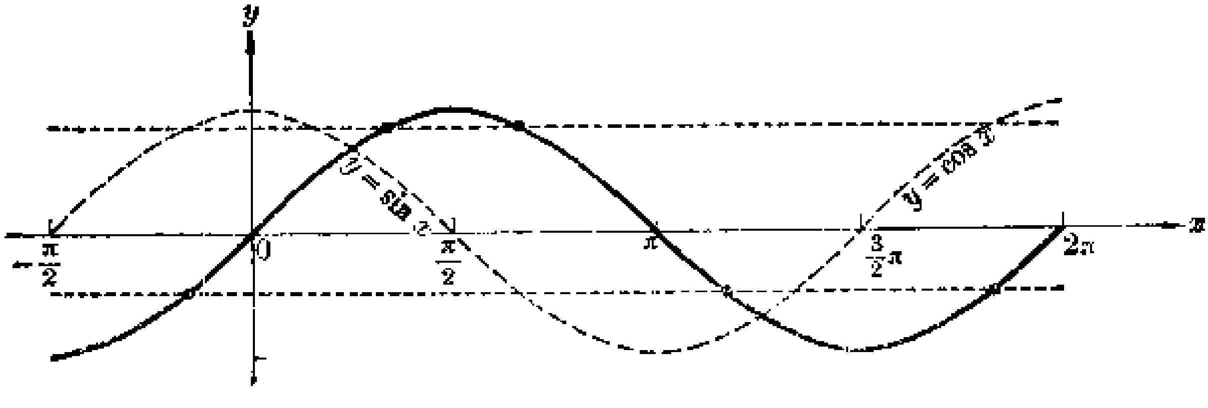


图 1-1-12

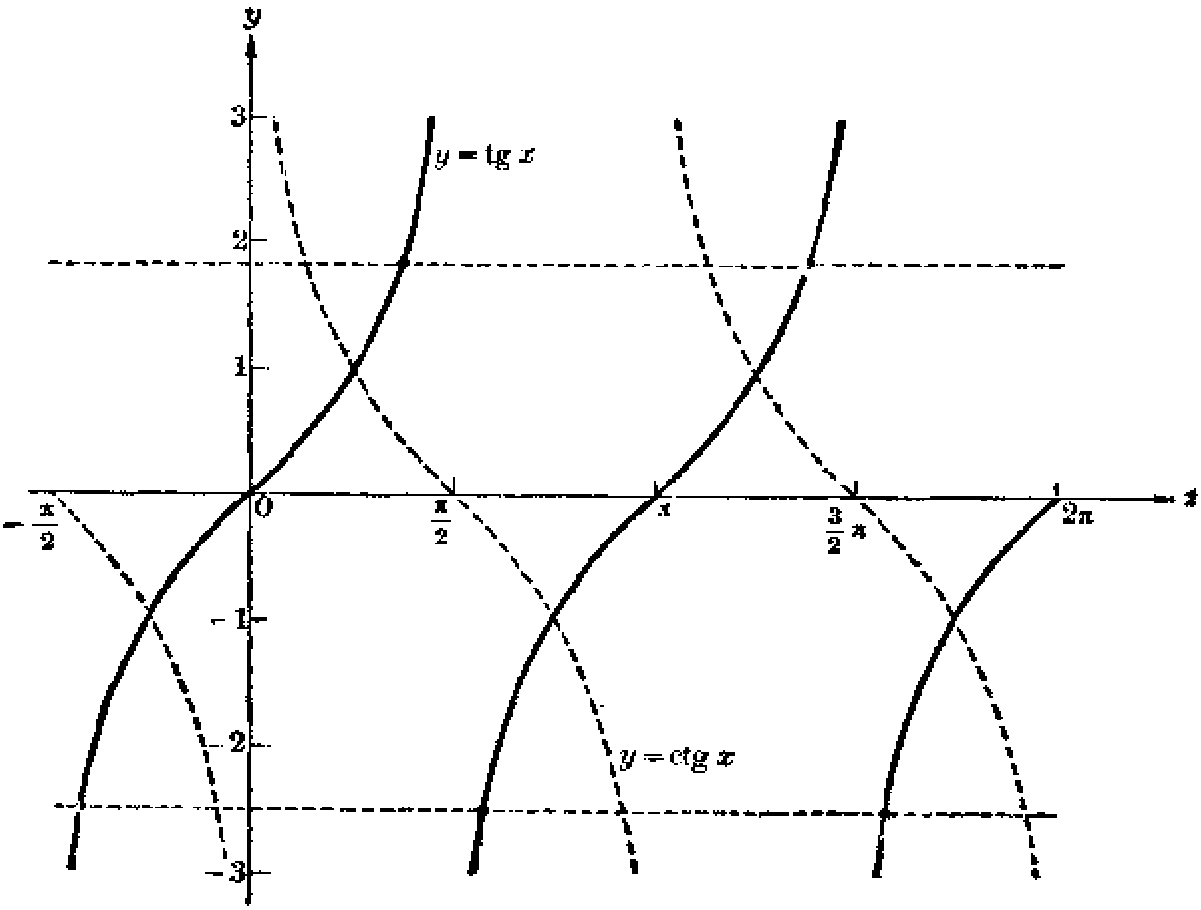


图 1-1-13

为 π. 还要指出，当三角函数的自变量 x 作为角度来看时，常了解为弧度，

$$\text{弧度}=\frac{\pi}{180}\times\text{角度}.$$

5、反三角函数：

$$y=\arcsin x,\qquad y=\arccos x,$$

$$y=\operatorname{arc\,tg} x,\qquad y=\operatorname{arc\,ctg} x,$$

$$y=\operatorname{arc\,sec} x,\qquad y=\operatorname{arc\,csc} x.$$

其图形見图 1-1-14, 15。

反三角函数是一种多值函数。前面已經說过，多值函数常常可以分解为若干支单值函数来討論。这里我們将图 1-1-14 15 中实綫的一支加以討論，也就是說，給 y 加了以下限制：

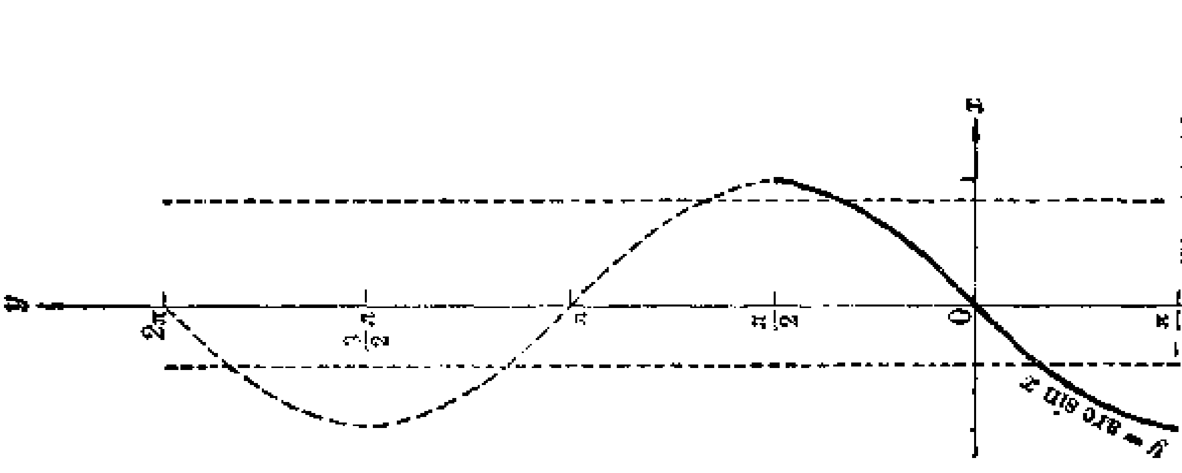

y = arc sin x
y
x
0
2π
$\frac{3}{2}\pi$
π
$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$

图 1-1-14

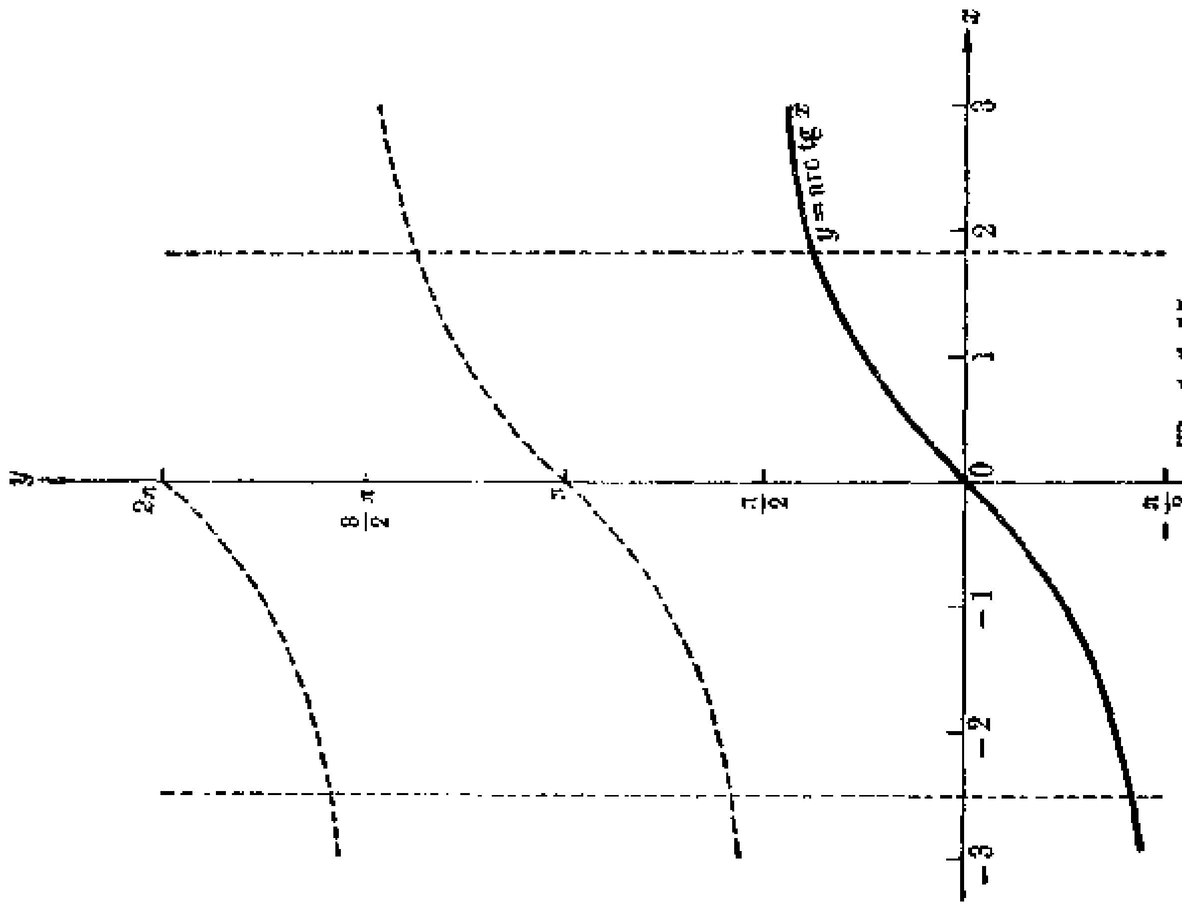

y = arc tg x
y
x
0
2π
$\frac{3}{2}\pi$
π
$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
1
2
3
−1
−2
−3

图 1-1-15

y	arc sin x	arc cos x	arc tg x	arc ctg x
限制 y 的不等式	$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$	$0\leqslant y\leqslant\pi$	$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$	$0<y<\pi$

这样确定的 y 值，叫做反三角函数的主值。在这样限制下，这些函数都是单值函数了。其他的单值支都是和这一支有确定的简单关系的。

6．双曲函数：在工程技术等应用問題中，常常会遇到下列几种函数，統称为双曲函数。虽然这些函数是由特殊的指数函数 e^x，e^{-x} 构成的，但由于在微分和积分运算中，它們之間存在簡单的关系式，所以单独提出来討論对于应用是方便的。

双曲正弦 $$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

双曲余弦 $$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\quad(\text{图}1\text{-}1\text{-}16),$$

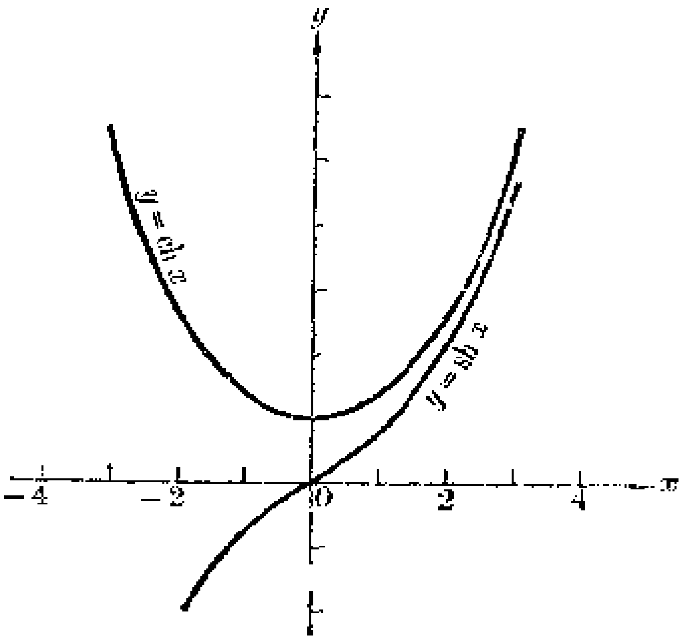


图 1-1-16

双曲正切 $$\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},$$

双曲余切 $\operatorname{cth} x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$ （图 1-1-17），

其中 e 是一个常数，$e=2.71828\cdots$。

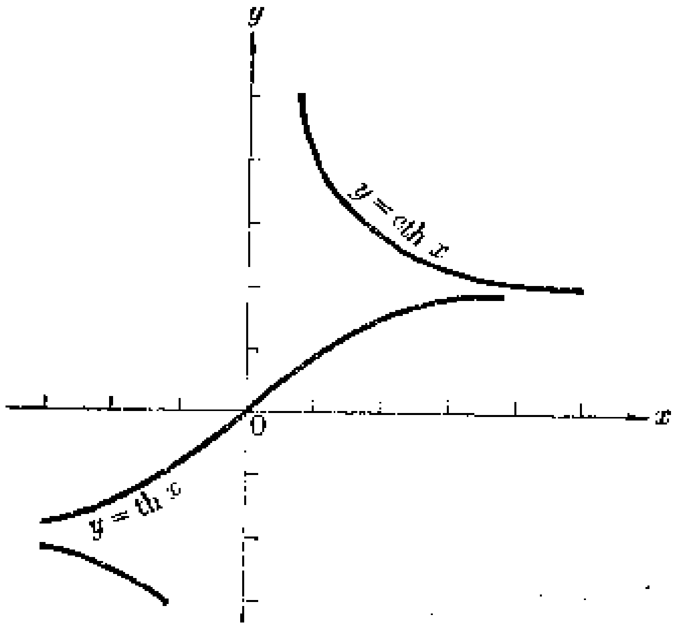


图 1-1-17

除了 $\operatorname{cth} x$ 在 $x=0$ 无意义外，它們对于一切实数 x 都有意义，这些函数与三角函数非常相似，例如直接驗証立即得到，它們成立着公式：

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1,$$
$$\operatorname{ch} 2x=\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x,\quad \operatorname{sh} 2x=2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x,$$
$$\operatorname{ch}(x\pm y)=\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y\pm\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} y\pm\operatorname{ch} x\operatorname{sh} y.$$

以上所介紹的都是基本初等函数。凡經过基本初等函数的算术运算所得到的函数以及經过有限次迭合所得到的复合函数，統称为初等函数，例如

$$y=\log_a x+\frac{e^{\sin\sqrt{x}}-1}{x^2}$$

就是一个初等函数。以后在掌握了积分和級数的工具后，还会看

到一些相当有用的非初等函数。

习　　题

1. 解下列不等式，并繪出 x 的范圍：

　(1) $-2<\frac{1}{x+2}<2$；　　(2) $(x-1)(x+2)(x-3)<0$；

　(3) $\frac{1}{x-1}<a$；　　(4) $0\leqslant\cos x\leqslant\frac{1}{2}$.

2. 求証下列絕对值不等式：

　(1) $|x-y|\geqslant||x|-|y||$；

　(2) $|x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$；

　(3) $|x+x_1+\cdots+x_n|\geqslant|x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|)$.

3. 解下列絕对值不等式，并繪出 x 的范圍：

　(1) $|x|>|x+1|$；　　(2) $2<\frac{1}{|x|}<4$；

　(3) $|x|>A$；　　(4) $|x-a|<\eta$，η 为常数，$\eta>0$；

　(5) $\left|\frac{x-2}{x+1}\right|>\frac{x-2}{x+1}$；　　(6) $2<\frac{1}{|x+2|}<3$.

4. 下列函数是否恒等，为什么？

　(1) $f(x)=\frac{x}{x}$，$\varphi(x)=1$；　　(2) $f(x)=x$，$\varphi(x)=\sqrt{x^2}$；

　(3) $f(x)=1$，$\varphi(x)=\sin^2x+\cos^2x$.

5. 求下列函数的定义域和值域：

　(1) $y=\sqrt{2+x-x^2}$；　　(2) $y=\sqrt{\sin x}$；

　(3) $y=\ln\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$；　　(4) $y=\frac{1}{\sin\pi x}$.

6. 設 $f(x)=x+1$，$\varphi(x)=x-2$，試解方程

　$|f(x)+\varphi(x)|=|f(x)|+|\varphi(x)|$.

7. 設 $f(x)=(|x|+x)(1-x)$，求使以下各式滿足的 x 值：

　(1) $f(x)=0$；　　(2) $f(x)<0$.

8. 設 $f(x)=ax^2+bx+c$，

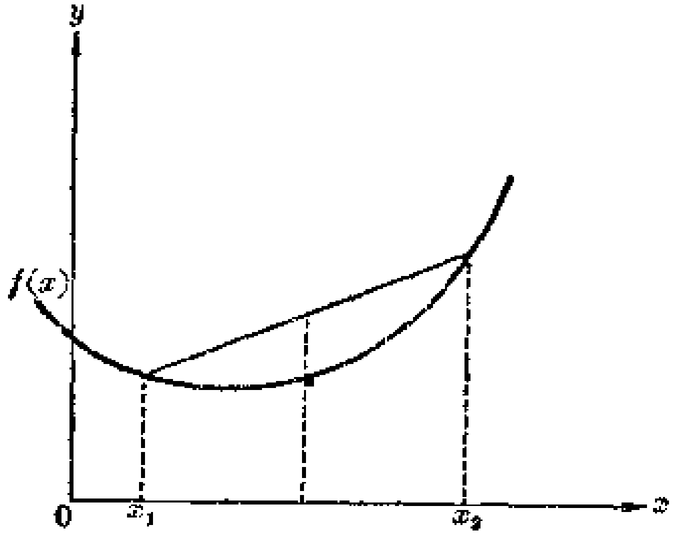
　証明：$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)\equiv0$.

9. 証明对于綫性函数 $f(x)=ax+b$，若自变数的諸值 $x=x_n$ $(n=1,2,\cdots)$ 組成一等差級数，則对应的函数值 $y_n=f(x_n)$ $(n=1,2,\cdots)$ 也組成一等差級数。

10. 如 $y=f(x)$ 图形上的任一条弦都高出于它所限的弧（如下图），証明下面不等式：

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

对于所有的 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$ 成立。



11. 証明下列各函数在所示区間内是单調增加的函数：

(1) $y=x^2$ $(0\leqslant x<+\infty)$；　(2) $y=\sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

12. 証明下列各函数在所示区間内是单調减少的函数：

(1) $y=x^2$ $(-\infty<x\leqslant 0)$；　(2) $y=\cos x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

13. 指出下列函数为奇函数、或为偶函数或非奇非偶：

(1) $y=x+x^3-x^5$；　(2) $y=a+b\cos x$；

(3) $y=x+\sin x+e^x$；　(4) $y=x\sin\frac{1}{x}$；

(5) $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & \text{当 } x>0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时},\\ -1, & \text{当 } x<0 \text{ 时},\end{cases}$

这个函数称为符号函数；

(6) $y=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}, & \text{当 } +\infty>x>\dfrac{1}{2} \text{ 时}, \\ \sin x^2, & \text{当 } \dfrac{1}{2}\geqslant x\geqslant -\dfrac{1}{2} \text{ 时}, \\ \dfrac{1}{2}x^2, & \text{当 } -\dfrac{1}{2}>x>-\infty \text{ 时}.\end{cases}$

14. 試証两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，一个奇函数与一个偶函数的乘积是奇函数。

15. 設$f(x)$为定义在$(-\infty,+\infty)$内的任何函数，証明$F_1(x)\equiv f(x)+f(-x)$是偶函数，$F_2(x)\equiv f(x)-f(-x)$是奇函数。

利用这一結果把下列函数用$F_1(x)$和$F_2(x)$的关系式表示出来：

(1) $y=a^x$;　　　　(2) $y=(1+x)^n$.

16. 説明下列函数哪些是周期函数，并求最小周期：

(1) $y=\sin^2 x$;　　　　(2) $y=\sin x^2$;

(3) $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$;　　　　(4) $y=\cos\frac{\pi}{4}x$;

(5) $y=|\sin x|+|\cos x|$;　　　　(6) $y=\sqrt{\operatorname{tg} x}$;

(7) $y=x-[x]$;　　　　(8) $y=\sin n\pi x$.

17. 求下列函数的反函数及反函数的定义域：

(1) $y=x^2\quad(-\infty<x\leqslant 0)$;

(2) $y=\sqrt{1-x^2}\quad(-1\leqslant x\leqslant 0)$;

(3) $y=\sin x\quad\left(\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi\right)$;

(4) $y=\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\quad(-\infty<x<+\infty)$;

(5) $y=\begin{cases}x, & \text{当 } -\infty<x<1 \text{ 时}, \\ x^2, & \text{当 } 1\leqslant x\leqslant 4 \text{ 时}, \\ 2^x, & \text{当 } 4<x<+\infty \text{ 时}.\end{cases}$

18. 驗証$y=\frac{1-x}{1+x}\ (-\infty<x<+\infty)$的反函数就是它本身，并找出函数$y=\frac{ax-b}{cx-d}$的反函数就是它本身的条件。

19. 下列函数組能否构成复合函数$y=f[\varphi(x)]$，如果能够构成則指出此复合函数的定义域及函数值范圍：

(1) $y=f(u)=2^u\quad u=\varphi(x)=x^2$;

(2) $y=f(u)=\ln u \quad u=\varphi(x)=1-x^2$;

(3) $y=f(u)=u^2+u^3 \quad u=\varphi(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时},\\ -1, & \text{当 } x \text{ 为无理数时};\end{cases}$

(4) $y=f(u)=2 \quad u=\varphi(x)$;

(5) $y=f(u)=\sqrt{u} \quad u=\varphi(x)=\cos x$.

20. 若$f(x)=x^2$, $\varphi(x)=2^x$, 求$f[\varphi(x)]$ 及$\varphi[f(x)]$.

21. 若$\varphi(x)=x^3+1$, 求$\varphi(x^2)$, $[\varphi(x)]^2$ 及$\varphi[\varphi(x)]$.

22. 設$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, 求$f[f(x)]$, $f\{f[f(x)]\}$, $f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

23. 延拓下列在$[0,1)$上定义的函数到整个实軸上去使函数成为以1为周期的函数:

(1) $y=x^2$;　(2) $y=\sin x$;　(3) $y=e^x$.

24. 延拓下列在$[0,\infty)$上定义的函数到整个实軸上去使函数(1)成为奇函数, (2) 为偶函数:

(1) $y=x^2$;　(2) $y=\sin x$.

25. 函数 $u=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & \text{当 } x>0,\\ 0, & \text{当 } x=0,\\ -1, & \text{当 } x<0,\end{cases}$

作这个函数的图形并証明

$$|x|=x\cdot\operatorname{sgn} x.$$

26. 設$y=\pi(x)$ 表示不超过数x的质数的数目, 对于自变数x取值为 0, 1, 2, …, 10, 作这个函数的图形。

27. 作下列函数的图形:

(1) $y=\operatorname{sgn}\cos x$;　(2) $y=|x|-2\left[\dfrac{x}{2}\right]$.

28. 作函数$y=(x)$ (数x的小数部分)的图形。

29. 作函数$y=[x]-x$(这里$[x]$为数x的整数部分)的图形。

30. 一个函数是用下述方法决定的:在每一个区間 $n\leqslant x<n+1$ (其中n为整数)内$f(x)$是綫性的且$f(n)=-1$, $f\left(n+\dfrac{1}{2}\right)=0$, 試作此函数的图形。

31. 作函数$y=|\sin x+2\cos x|$的图形。

32. 若已知函数$f(x)=\operatorname{tg}x$, 試作下列函数的图形:

(1) $y=f(2x)$;　(2) $y=f(kx+b)$　$(k\neq 0)$.

33. 若已知函数 $y=f(x)$ 的图形，作函数

$$y_1=|f(x)|,\quad y_2=f(-x),\quad y_3=-f(-x)$$

的图形，并說明 y_1, y_2, y_3 的图形与 y 的图形的关系。

34. 若已知 $f(x)$，$g(x)$ 的图形，試作函数

$$y=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\}$$

的图形，并說明 y 的图形与 $f(x)$，$g(x)$ 图形的关系。

35. 定义在 $[0,\pi]$ 上的函数 $y=x$，試先延拓到 $[0,2\pi]$ 使它关于 $x=\pi$ 为对称，然后再把已延拓到 $[0,2\pi]$ 上的函数延拓到整个实軸上使函数成为以 2π 为周期的函数。

36. 定义在 $[0,\pi)$ 上的函数 $y=x^2$，試先延拓到正实軸上使函数成为以 π 为周期的函数，然后再把它延拓到負实軸上使它成为奇函数。

第二章 极 限

§1 极限的概念

从緒論中的一些例子已經看到，为了能够很好地掌握变量的变化規律，不仅要考察变量的变化过程，而更重要的是要从它的变化过程来判断它的变化趋势。例如，从运动方程 $s=t^3$ 的一系列平均速度的变化趋势来看，在 $t=1$ 秒这一时刻可能有 3 米/秒的瞬时速度。这里所謂"可能"是根据这样事实：当我們把 $t=1$ 秒以后(或以前)的时間間隔取得越小，所得到的平均速度就越来越与 3 米/秒接近。这个判断的理論根据是很不充分的，因为它只是在我們考察了有限个平均速度的变化趋势后作出的結論。实际上，由于一秒时刻前后的时間可以无限地分割，从而平均速度的变化过程也是"无限"的，如果出现这样情况，在一定的时間間隔以后所得到的平均速度与 3 米/秒的差越来越大，那末我們的判断就必然是错了。是否能够驗証这个情况永不会发生呢？以及是否能够証明我們的判断的正确性呢？这样的驗証是非常困难的，主要是因为我們碰到了"无限"多个平均速度，而我們能够考察的总是它的变化的"有限"过程，以后它究竟如何变化，在沒有建立充分的理論根据之前是无从說明的。

为了把事情說得更清楚些，这里再看一个例子。我国魏晋时数学家刘徽試图从圓内接正多边形来計算半徑等于单位长度的圓面积。他从圓内接正六边形出发，每次把边数加倍，直觉地可意識到边数越多，多边形的面积也越来越接近于圓面积。他曾正确地計算出圓内接正 3072 边形的面积，从而得到圓周率 $\pi\approx\frac{3927}{1250}=3.1416$.

从这里可見早在一千六百余年前，刘徽就用他的所謂“割圆术”来計算圆周率，获得了这样精确的結果，成就是非常卓越的。然而在他所著的“九章算术注”里曾說：“割之弥細，所失弥少，割之又割，以至于不可割，則与圓周合体而无所失矣”。这个結論显然是很不确切了。首先，按他的“割圓”方法确实可作出无穷多个正多边形，因此应該是永恒地“可割”而不是“以至于不可割”。其次，无論边数增加到怎样多，終究还是多边形，絕不会“与圓周合体而无所失”。原因是在刘徽时代还沒有找出克服“无限”这个矛盾的工具，因此，他只能設想最后总有一个边数很多的多边形与圆“合体”，而将无限变化过程作为有限变化过程来处理了。

瞬时速度和圓面积都是客观存在的，因此就迫使我們不能不創造一套完整的理論和方法来确定它們的眞値。本节和以下几节将要介紹的极限理論和它的运算方法就是由于解决这样一些迫切需要的問題而产生的。

从上面的例子可以看到，平均速度或圓內接正多边形作为变量来說，它們都具有两个特点：第一，它們都是无穷尽地变化着，我們不可能指出哪一个量是它們变化的最后一个量。其次，平均速度是由于一次一次地把时間加以分割得来的，而多边形也是由于一次一次地把圓分割得来的。因此，它們都是一个接着一个地有次序地变化着，而不是“連續地”变化。以后，我們就着手专对具有这两个特点的变量来研究。至于連續变化的变量，要等到本章§4才談到。

一、邻域和极限的定义

現在面临的主要課題就是要深入而全面地掌握变量在“无限”变化过程中的变化趋势。为了容易理解，我們先从几何直观上来闡明极限的概念，从而引出它的分析的定义。

1. 邻域的概念：上面的例子里曾說到平均速度越来越接近

于瞬时速度，多边形的面积越来越接近于圓面积，只是从直观上对变量的变化趋势的大致描述。“越来越接近”的这个概念是相当模糊的。它对于变量变化到某一过程以及这过程以后的“接近”情况沒有确切說明。为了确切地表达出“接近”这个直观概念，很自然地会想到距离。例如，点 M 和点 A 很接近，就意味着点 M 和点 A 的距离很小。从直观的距离出发，我們引进点 A 的邻域的定义。

定义 对任一正数 δ，所有与点 A 的距离小于 δ 的点的全体，叫做点 A 的 δ 邻域，記为 $O(A, \delta)$。如果包括与点 A 的距离小于或等于 δ 的点的全体，則叫做点 A 的 δ 閉邻域，記为 $\bar{O}(A, \delta)$。

在直綫上，点 A 的 δ 邻域是指包含在开区間 $(A-\delta, A+\delta)$ 內的一切点。在这情况，$O(A, \delta)$ 也可以記为所有滿足不等式 $|x-A|<\delta$ 的点 x 的全体。特别地，当 x 恒在点 A 的左側时，即滿足 $0\leqslant A-x<\delta$ 的点 x 的全体，称为点 A 的左 δ 邻域，記为 $O^-(A, \delta)$。同样，滿足 $0\leqslant x-A<\delta$ 的点 x 的全体，称为点 A 的右 δ 邻域，記为 $O^+(A, \delta)$。在平面上，$O(A, \delta)$ 就是以点 A 为中心 δ 为半徑的开圓。如果点 A 的坐标为 (ξ, η)，則 $O(A, \delta)$ 即为滿足不等式 $\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}<\delta$ 的一切点 $M(x, y)$ 的全体。更高維空間的点的邻域的几何意义完全可以类似地推广。至于直綫上的閉邻域自然是閉区間，平面上的閉邻域是閉圓等。

2. 极限的概念：首先，利用邻域引出任意維空間点列的极限概念。所謂点列是由一个接着一个地有次序地变化着的无穷多个点所組成，因此可写作：

$$M_1, M_2, \cdots, M_n, \cdots,$$

这里 M_n 表示任意維空間的点。通常把这点列縮写作 $\{M_n\}$，M_n 称为点列的第 n 項。下面我們就来引进“极限”这个非常重要的概念。

点列极限的定义 对給定的点列$\{M_n\}$，若存在一点A具有如下性质：对任意給定的正数ε，点列中自某一点以后的一切点全都落在点A的ε邻域内，则称点A为点列$\{M_n\}$的极限，記为$\lim_{n\to\infty} M_n=A$，或$M_n\to A$。这时就說点列$\{M_n\}$为收斂的，且收斂于A。

我們把定义的意思再讲得清楚些，"点列中自某一点以后"这句話，就是說对任意給定的$\varepsilon>0$，有这么一个正整数N，当$n>N$时，M_n全都落在邻域$O(A,\varepsilon)$内。这个N一般是随ε而变的，因此有时写作$N(\varepsilon)$。

在极限定义中，特别要注意正数ε是任意給定的。由于ε是任意的，才能确切地表达出"无限接近"的意义，也就是极限的本质。同时，定义中的正整数N也不一定要求是最小的一个，只要它存在就可以了。如果存在一个数N能适合定义要求，则一切大于它的正整数都可以取作N。下面将有例題說明这一点。

从定义，可見极限的实质包括两方面：

(1) 对任意給定的$\varepsilon>0$，总可以找到一个正整数N，也就是存在一点M_N，从这点以后，虽然点列还是无穷尽地变化着，但全都落在邻域$O(A,\varepsilon)$内，那末我們就完全掌握了这点列在整个变化过程中的变化趋势，那就是它可以无限接近于点A。因此关鍵在于这样一个数N或这样一点M_N是否存在。以后我們往往就从找不到这个N来說明$\{M_n\}$不以点A为极限。

(2) 因$\varepsilon>0$是預先任意給定的，因此点列$\{M_n\}$在变化过程中与点A的接近程度可以随意要求，无論我們要求多么接近都可以。从这个意义上讲，点列$\{M_n\}$可以"无限精确"地与点A接近。因此关鍵在于是否对預先任意給定的正数ε都适合定义。以后我們就往往从对某一特殊的正数ε不适合定义来說明$\{M_n\}$不以点A为极限。

注意，上面所說的是对任意維空間的点列极限的概括性定义。現在从这个定义出发来引进实数列的极限定义。

由于直綫上的点与实数成一一对应，所以直綫上的点列就是数列，它是由一列实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 所組成，記为 $\{x_n\}$，此时在点列极限的定义中只要用两数之差的絕对值来表示距离，就导得数列 $\{x_n\}$ 以数 a 为极限的定义：

数列极限的定义　設存在一有限数 a，对任意給定的正数 ε，总有正整数 $N(\varepsilon)$，当 $n>N$ 时，数列 $\{x_n\}$ 中这样的一切 x_n 全都落在邻域 $O(a, \varepsilon)$ 內，也就是当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立，則称数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限，記为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

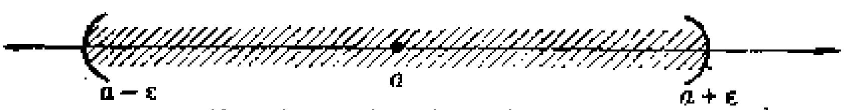
或

$$x_n \to a.$$

如果 $\{x_n\}$ 以 a 为极限，就說它收斂于 a，或說 a 为 $\{x_n\}$ 的极限。沒有极限的数列称为发散的。

注意，这个定义里的所謂“当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立”是指 $|x_{N+1}-a|<\varepsilon$，$|x_{N+2}-a|<\varepsilon$，…这样无穷多个不等式都应該成立。

极限的几何解释：所謂 $\{x_n\}$ 以 a 为极限，就是对任意給定的一个开区間 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$，从第 N 項以后的一切数 $x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots$ 全都落在这个区間內（如图 1-2-1）。



（x_{N+1}以后的一切数全都落在有阴影的区間中）

图 1-2-1

特別地，当 $a=0$ 时，也就是 $\{x_n\}$ 以零为极限时，这样数列所形成的变量称为无穷小量。它的分析定义是：設对任意給定的 $\varepsilon>0$，总可找到正整数 N，当 $n>N$ 时，$|x_n|<\varepsilon$，則称 $\{x_n\}$ 为无穷小量。

从这定义可知，无穷小量是以零为极限的变量。既不能把它理解为很小的量，也不能当作任意小的量。讀者必須严加区别。

从极限定义易見，若 $\{x_n\}$ 以 a 为极限，則 $\{x_n-a\}$ 必以零为极限，即 $\{x_n-a\}$ 是无穷小量。反之，若 $\{x_n-a\}$ 是无穷小量，則 $\{x_n\}$ 以 a 为极限。根据极限的这一性质，証明 $\{x_n\}$ 以 a 为极限和証明 $\{x_n-a\}$ 为无穷小量是一回事。我們往往用这方法来証明数列的极限。

（注 1） 从定义可以看出，数列是否有极限，只与它从某一项以后有关，而与它前面的有限个项无关。因此，在討論数列的极限时，可以添加，去掉或改变它的有限个項的数值，对收斂性和极限都不会发生影响。

（注 2） 直綫上的点列和高維空間的点列不同之处，在于直綫上点列的各点位置有左右关系，从而对应的数列中的各数也有大小关系。以后往往要研究两种特殊变化的数列：如对任一正整数 n，数列 $\{x_n\}$ 中的每一个数都不大于（或小于）在它后面的数，即

$$x_n \leqslant x_{n+1}\ (\text{或}\ x_n < x_{n+1}),$$

則称 $\{x_n\}$ 为单調增加（或严格单調增加）数列。如前面例子中多边形的面积就作成严格单調增加数列。另一方面，如对任一正整数 n，数列 $\{x_n\}$ 中的每一个数都不小于（或大于）在它后面的数，即

$$x_n \geqslant x_{n+1}\ (\text{或}\ x_n > x_{n+1}),$$

則称 $\{x_n\}$ 为单調減少（或严格单調減少）数列。如不需要特别說明增加或減少，則一般地称为单調（或严格单調）数列。一般的数列不限定是单調数列，自然包括有跳跃式变化的，也就是时而增加时而減少。要注意的是在极限定义中所指的都是一般数列，当然它也适用于单調数列。

（注 3） 通常我們是指 $\{x_n\}$ 从第一項起或从某項以后真正变化着的数列才算是变量。从第一項或从某項以后沒有变化的数列

都叫做常量。如

$$(1, 1, 1, \cdots)$$

或 $$(-20, -10, -5, -4, 2, 2, 2, 2, \cdots)$$

都是常量。前一个常量等于1，后一个常量等于2. 对常量来說，它們的极限沒有什么可以討論的，但为了以后說明方便起見，也可以說常量的极限就是它本身。因此，前一个数列的极限等于1，后一个数列的极限等于2. 常量本身作为它的极限显然也滿足于一般极限定义的要求。对前一数列可取 $N=1$，对后一数列可取 $N=4$.

下面用几个例子来說明极限的概念以及如何运用定义来考察数列的极限。

[例 1] 証明数列

$$\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}=1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots$$

以零为极限(也就是无穷小量)。

根据定义，要証明：对任意給定的 $\varepsilon>0$，总可找到正整数 N，当 $n>N$ 时，都成立着下面不等式：

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

要使这个不等式当 $n>N$ 时都成立，我們取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ 就可以了，因为这时必然有 $N+1>\frac{1}{\varepsilon}$，$N+2>\frac{1}{\varepsilon}$，…，从而有 $\frac{1}{N+1}<\varepsilon$，$\frac{1}{N+2}<\varepsilon$，…. 由于对任意給定的 $\varepsilon>0$，总有这样一个 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，都使不等式 $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}-0\right|<\varepsilon$ 滿足，故 $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$ 是一个无穷小量。

[例 2] 証明：对 $|q|<1$ 的任何数，数列 $\{q^n\}$ 为无穷小量。

这个数列在将来学习无穷級数时起很大作用，讀者必須熟悉

它。现在要証明：对任意給定的 $\varepsilon>0$，总可找到正整数 N，当 $n>N$ 时，使

$$|q^n|<\varepsilon,$$

即

$$n\ln|q|<\ln\varepsilon.$$

因 $|q|<1$，$\ln|q|<0$，故需要証明的不等式是

$$n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}.$$

因此可取 $N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，則当 $n>N$ 时，必有 $n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$，所以

$$q^n\to 0\quad(|q|<1).$$

从上面两个例子可以看到怎样去寻找 N。方法就是：从不等式 $|x_n-A|<\varepsilon$ 中解出 n，随即获得 N。

[例 3]　考虑数列 $\{\sqrt[n]{a}\}$，这里 a 为大于 1 的任何数。我們来証明 $\sqrt[n]{a}\to 1$。記 $\sqrt[n]{a}=1+\alpha_n\ (\alpha_n>0)$，則由 $a=(1+\alpha_n)^n>1+n\alpha_n$，可得不等式 $\alpha_n<\frac{a-1}{n}$。对任意給定的 $\varepsilon>0$，考察不等式：

$$|\sqrt[n]{a}-1|=\alpha_n<\frac{a-1}{n}<\varepsilon,$$

解得 $n>\frac{a-1}{\varepsilon}$。因此可取 $N=\left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]$，这就是所要求的 N。

有时直接解不等式 $|x_n-A|<\varepsilon$ 很不方便，上面例子显示一种求 N 的技巧，就是可以将 $|x_n-A|$ 适当放大，使 $|x_n-A|<\beta_n$，再解不等式 $\beta_n<\varepsilon$。在本例中 $\beta_n=\frac{a-1}{n}$，从而就較为方便地求得 N。

再来看一个例子：

[例 4]　証明数列 $x_n=\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}$ 的极限为 $\frac{1}{3}$。

考察下面的差：

$$x_n-\frac{1}{3}=\frac{-5n+10}{3(3n^2+2n-4)}.$$

如果直接从$\left|x_n-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$中解出$n$是相当不容易的。我們可以采取下述方法：

当$n>2$时，有

$$\left|x_n-\frac{1}{3}\right|=\frac{5n-10}{3(3n^2+2n-4)}<\frac{5n}{3\cdot 2n^2}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

所以取 2 与$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$两个数中較大的一个作为$N$即可，記作$N=\max\left(2,\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right)$。这时，当$n>N$时，就有

$$\left|x_n-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon.$$

3. 无穷远点的邻域、无穷大量：和建立点A的ε邻域一样，我們来叙述无穷远点的R邻域的概念：对任一正数R，所有与原点的距离大于R的点的全体称为无穷远点的R邻域，記为$O(\infty, R)$。在直綫上，就是满足不等式$|x|>R$的所有点x的全体，也就是閉区間$[-R, R]$外的所有点。又无穷远点的右或左R邻域也可分别定义为$(-\infty, -R)$或(R, ∞)中的所有点，分别記作$O^+(\infty, R)$或$O^-(\infty, R)$。在平面上，无穷远点的R邻域就是以原点为中心、R为半徑的閉圓外的所有点。这样就可以将“点列以点A为极限”的定义很自然地拓广到“点列以无穷远点为极限”的情况：

点列以无穷远点为极限的定义 对任意給定的正数R，若点列$\{M_n\}$中的点从某点M_N以后的一切点全都落在无穷远点的R邻域内，则称$\{M_n\}$以无穷远点为极限，記作

$$\lim_{n\to\infty} M_n=\infty$$

或
$$M_n\to\infty.$$

对直綫上的数列$\{x_n\}$，上面的定义就可以这样說：对任意給定的$M>0$，总可找到正整数N，当$n>N$时，一切x_n都落在閉区間

$[-M, M]$ 之外，亦即 $|x_n|>M$，則称数列 $\{x_n\}$ 为无穷大量，記作

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\infty$$

或 $$x_n\to\infty.$$

从上面定义可知，无穷大量是以∞为极限的变量，切不可与很大的量或任意大的量混淆起来。我們知道，∞仅仅是一个符号，它不代表任何定数，因此，无穷大量实际上是沒有极限的一种变量，从而它是发散变量的一种。如果 $\{x_n\}$ 是无穷大量，也可以說它发散于无穷大。

特別地，当无穷大量 $\{x_n\}$ 的每一項或从某项以后都保持一定符号(正或負)，这时按照它保持的正或負符号分别称 $\{x_n\}$ 趋向于 $+\infty$ 或 $-\infty$，記为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ (或 $x_n\to+\infty$) 或 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$ (或 $x_n\to-\infty$)。在这情况，分析定义就变为：对任意給定的正数 R，总可找到正整数 N，当 $n>N$ 时，$x_n>R$ 或 $x_n<-R$，亦即从某項以后，x_n 全部落在无穷远点的左 R 邻域或右 R 邻域内。

举例来說，数列

$$-80, 40, -40, 20, -20, 10, -10, 5, -5, 1, 2, \cdots, n, \cdots$$

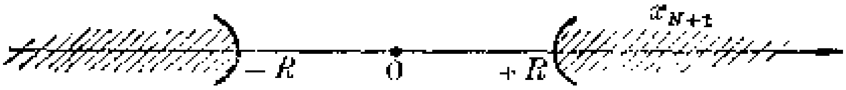
是正无穷大量，如取 $R=1000$，則这个数列从 1009 項以后的一切数都大于 1000，故可取 $N=1009$。

同样，可証数列 $\{-n\}$ 是負无穷大量。一般的无穷大量是跳跃式变化的，时正时負。在这情况，就不能确定它的符号。例如

$$-1, 2, -3, 4, -5, \cdots, (-1)^n n, \cdots$$

只知道它是无穷大量。至于是正或負就无从确定了。

无穷大量的几何解释 所謂 $\{x_n\}$ 是无穷大量，就是对任意給定的两个开区間 $(R, +\infty)$ 及 $(-\infty, -R)$，一定有这样一項 x_N，在它后面的一切 $x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots$ 全都落在这两个开区間内 (如图 1-2-2)。



($x_{N+1},x_{N+2},\cdots$全都落在有阴影的两个区間内)

图 1-2-2

如果是正无穷大量,則x_{N+1}, x_{N+2}, $\cdots$全都落在右边阴影区間内。如果是負无穷大量,則它們都落在左边阴影区間内。

从定义立知,若$\{x_n\}$为无穷大量,則$\{-x_n\}$也是无穷大量。同时也易知,若$\{x_n\}$为无穷大量,則$\{ax_n\}$也是无穷大量,这里a为不等于0的任意常数。

[例 5] 設q为适合不等式$|q|>1$的任意数,則$\{q^n\}$为无穷大量。

对任意給定的$R>0$,为了要$|q^n|=|q|^n>R$,即

$$n\ln|q|>\ln R,$$

由此即有$n>\dfrac{\ln R}{\ln|q|}$(此处不妨設$R>1$),因此可取$N=\left[\dfrac{\ln R}{\ln|q|}\right]$,即証明了$q^n\to\infty$.

无穷大量和无穷小量之間有密切联系,可用定理表之如下:

定理 1 若$\{x_n\}$是无穷大量,則它的倒数所成的数列$\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$为无穷小量。反之,若$\{x_n\}$为无穷小量,且$x_n\neq 0$ $(n=1,2,3,\cdots)$,則它的倒数所成的数列$\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$为无穷大量。

【証明】 首先,因$\{x_n\}$是无穷大量,則它至多只能含有有限个数等于零,否則它就不是无穷大量了。从上面所說的(注 1)不妨設每一$x_n\neq 0$. 根据定义,对任意給定的$M>0$,总可找到正整数N,当$n>N$时,有$|x_n|>M$,从而有$\left|\dfrac{1}{x_n}\right|<\dfrac{1}{M}$. 因为$M$是任意的,所以$\dfrac{1}{M}$也是任意的,从而就証明了$\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$是无穷小量。

定理的第二部分可同样証明,建議讀者作为练习(参見习

题7)。

[例6]　易知

$$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$$

为无穷大量，由定理，则

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$

为无穷小量。

二、有界点列(数列)、无界点列(数列)

1. 有界点列(数列)：为了以后需要，現在来討論一种很重要的点列和数列，卽所謂有界点列和有界数列。

定义　設存在一个正数 R，点列 $\{M_n\}$ 中的每一点都落在原点的 R 閉邻域 $\bar{O}(0, R)$ 内，则称 $\{M_n\}$ 为有界点列。

注意在上述定义中，只要存在一个正数 R 就可以肯定点列的有界性，不一定需要最小的 R。这时就称 R 为 $\{M_n\}$ 的界。因此，有界点列的界不是唯一的而是无穷多个。只要存在一个数 R 是它的界，則大于 R 的任何数也都可以作为它的界。

并不是任何点列都是有界的。举平面点列的例子来看，如果取直綫 $y=x$ 上的点 (n, n) 作为 M_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$，則 $\{M_n\}=\{(n, n)\}$ 显然不是有界的。因为不存在这样一个正数 R (不論取怎样大的数)，使 $\{M_n\}$ 中每一点都落在 $\bar{O}(0, R)$ 内。

在点列的有界性定义中，要求每一点都落在邻域 $\bar{O}(0, R)$ 内。其实不一定需要这样，只要点列 $\{M_n\}$ 中有这样一个点，比方說 M_N，从这点以后的所有点都落在某邻域 $\bar{O}(0, R)$ 内，就能够满足有界性的要求了。因为既然最多只有有限个点 $M_1, M_2, \cdots, M_{N-1}$ 可能落在邻域 $\bar{O}(0, R)$ 外面，我們就可以取一个較大的 $R_0(>R)$，使邻域 $\bar{O}(0, R_0)$ 包含落在 $\bar{O}(0, R)$ 外面的那有限个点。又因 $\bar{O}(0, R_0)$ 也包含了 $\bar{O}(0, R)$，故 $\bar{O}(0, R_0)$ 包含着数列中的一切

点，这样就回到原来定义的要求了。有时把适合改变了定义的点列称为“往后有界”。

（注4）点列往后有界的定义和它以原点为极限的定义初看起来很相似。但这两个定义有本质上的差异。在 $\{M_n\}$ 以原点为极限的定义中，要求从某点以后都落在邻域 $O(0, \varepsilon)$ 内，这里 ε 是任意给定的正数。而在有界性定义中的邻域 $\bar{O}(0, R)$ 的 R 是一个预先存在的某一确定正数，它不是任意的。举例来説，在单位圓周上取出一个点列 $M_n\left(\cos\frac{\pi}{n}, \sin\frac{\pi}{n}\right)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$，这点列显然是有界的，因可取 $R=1$。但它不以原点为极限，因所有点都不在 $O\left(0, \frac{1}{2}\right)$内。?

現在轉到在直綫上数列 $\{x_n\}$ 的有界性的討論。它的定义完全与点列的相似。

定义 1 設存在一正数 M，数列 $\{x_n\}$ 中的每一数都落在原点的 M 閉邻域 $\bar{O}(0, M)$ 内，也就是 $|x_n|\leqslant M$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$，則称 $\{x_n\}$ 为有界数列。

这里与高維空間点列唯一不同之处，在于对数列的数而言有大小关系。从定义可以看出，如果数列是有界的，則必存在一个正数 M，使数列中的一切数都落在閉区間 $[-M, M]$ 内，从而 M 就称为它的上界，$-M$ 就称为它的下界。有界数列的上界和下界都有无穷多个，一切大于 M 的数都是它的上界，一切小于 $-M$ 的数都是它的下界。

有这样的数列它只有上界而无下界，如一切負整数所成的数列 $\{-n\}$ 就是一个例子。我們也很容易举出只有下界而无上界的数列的例子。同时有上、下界的数列才能叫做有界的。如$\left\{\sin\frac{1}{n}\right\}$是有界数列，因$\left|\sin\frac{1}{n}\right|\leqslant 1$.

在上面定义中似乎有界数列的上界必是正数，下界必是负数。其实这对有界性不是本质的需要。某些数列可以负数为上界，也有一些数列以正数为下界。例如一切负整数所成的数列 $\{-n\}$ 就可以 -1 作为它的上界之一，而一切正整数列 $\{n\}$ 也可以 1 作为它的下界之一。这就可以看出，定义 1 不是有界性定义的唯一形式。从更一般意义上，也可有其他形式的有界性定义：

定义 2 若存在两个数 A, B (設 $A<B$)，数列 $\{x_n\}$ 中的每一数都在閉区間 $[A, B]$ 内，亦即 $A\leqslant x_n\leqslant B$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$，則称 $\{x_n\}$ 为有界数列。这时称 A 为它的下界，B 为它的上界。

上面两个定义只是形式上不同，沒有本质上的差异，从其中任一个可推到另一个。有时用定义 2 会更方便些。

(注 5) 上面所說的数列有界性的定义，都可以在形式上改作“往后有界”。一个数列如果是往后有界，則只需适当增大 M，或適当增大 B 減小 A，就可以回到原来有界性的定义了。因此，如果已知一个数列是往后有界的就可认为它是有界的了。以后都将这样承认而不再每一处声明。

象 (注 4) 所說的一样，往后有界数列和无穷小量虽然从定义看起来有些相似，但实际上两者有本质上的差异。但有极限的数列和有界数列之間确有密切关系，我們用定理形式表之如下：

定理 2 有极限的数列是有界的。

【証明】 設 $\{x_n\}$ 以 a 为极限。根据定义，对給定的 $\varepsilon=1$，总有正整数 N，当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-a|<1$$

或

$$a-1<x_n<a+1.$$

这就証明了 $\{x_n\}$ 是有界的(由定义 2)。

定理 2 的逆是不成立的。也就是有界数列不一定有极限。作为例子，如 $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \cdots)$ 显然是有界的，因 $0\leqslant x_n\leqslant 1$。但这

个数列沒有极限，因为它是由 0 和 1 两数所构成，如它有极限，那末极限必为 0 或 1，其他任何数都不可能是它的极限。但根据极限定义，我們易知 0 和 1 也都不是它的极限。对 0 来說，我們取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$. 如果 0 是它的极限，则必有正整数 N，当 $n>N$ 时，$|x_n|<\frac{1}{2}$，卽当 $n>N$ 时，有 $-\frac{1}{2}<x_n<\frac{1}{2}$. 这显然不是事实。从数列的結构来看，不存在这样一項，从这項以后，一切 x_n 都在区間 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ 內，因在任一項以后都有无穷多个"1"，而"1"显然不在这区間之內。同样，可証 1 也不是它的极限。从而肯定了这个数列沒有极限。

（注 6） 我們以前曾看到，如果数列是无穷大量就认为它是发散的。現在从上例中又看到，数列$(0, 1, 0, 1, \cdots)$是有界的，它显然不是无穷大量，但由于它沒有极限，从而也是发散的。因此，发散数列不一定是无穷大量。

2. 无界点列（数列）：現在进而討論无界点列或数列。所謂"无界"，相对于"有界"来說是否定的，也就是不为有界的点列（数列）就称为无界点列（数列）。但为明确起見，仍有必要給以确切的定义：

定义 对任意給定的正数 R，若点列 $\{M_n\}$ 中必有无穷多个点落在无穷远点的 R 邻域 $O(\infty, R)$ 內，则称 $\{M_n\}$ 为无界点列。

对于直綫上的数列 $\{x_n\}$ 的无界性也有相似定义：

定义 对任意給定的正数 M，若数列 $\{x_n\}$ 中必有无穷多个数在閉区間 $[-M, M]$ 外面，也就是有无穷多个 x_n 满足不等式 $|x_n|>M$，则称 $\{x_n\}$ 为无界数列。

注意无界数列的定义与无穷大量的定义很相似。然而这两个概念有着本质上的差别。在无穷大量定义中，要求能找到 N，当 $n>N$ 时，都有 $|x_n|>M$. 而在无界性定义中，只要求有无穷多个

x_n 满足不等式 $|x_n|>M$. 从定义立即得知：如果 $\{x_n\}$ 是无穷大量，则它必是无界的。但无界数列不一定是无穷大量。例如，数列 $(1, 0, 2, 0, 3, 0, \cdots, n, 0, \cdots)$ 显然是无界的，但它不是无穷大量，因在它的任一项的后面都有无穷多个"0"，故无論取任何正数作为 M，不会存在无穷大量定义中所要求的 N.

§2 数列极限的性质和运算

一个数列（变量）是否有极限，只是决定于数列本身的結构。因此，如果几个收斂数列之間沒有內在联系，則它們的极限之間自然也談不到有什么关系。但另一方面，如果两个或多个数列之間有了一定的联系，則它們的极限之間自然可能也有相应的关系了。为了今后以极限为基础来建立一套完整的分析理論，本节将对极限的一些重要性质加以討論。此外，还将討論极限的运算法則，这些法則在今后計算极限时是不可缺少的。

一、数列极限的性质

定理 1 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=b$，且 $a>b$，則总有一个正整数 N 存在，当 $n>N$ 时，不等式 $x_n>y_n$ 都成立。

【証明】 任意取一正数 ε，只要 $\varepsilon\leqslant\frac{a-b}{2}$，則由 $x_n\to a$，必有一正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，x_n 就全都落在 a 点的 ε 邻域內，即当 $n>N_1$ 时，有 $\frac{a+b}{2}<x_n<\frac{3a-b}{2}$. 同样，由 $y_n\to b$，也存在一正整数 N_2，当 $n>N_2$ 时，y_n 全都落在 b 点的 ε 邻域內，即当 $n>N_2$ 时，有 $\frac{3b-a}{2}<y_n<\frac{a+b}{2}$. 由于 $x_n>\frac{a+b}{2}$，$y_n<\frac{a+b}{2}$，上面两个邻域沒有公共点（如图 1-2-3），并且 b 点的 ε 邻域內的一切数 y_n（当 $n>N_2$ 时）皆小于 a 点的 ε 邻域內的一切数 x_n（当 $n>N_1$ 时）。所以只要取 $N=\max(N_1, N_2)$，則当 $n>N$ 时，$x_n>\frac{a+b}{2}$，

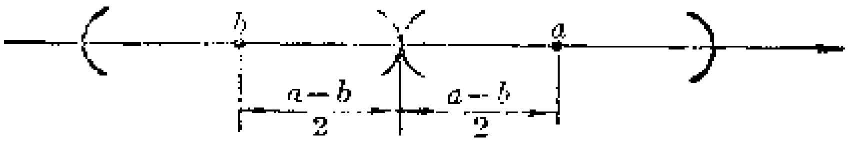


图 1-2-3

$y_n<\frac{a+b}{2}$ 必同时成立,从而当 $n>N$ 时,有

$$x_n>y_n.$$

推論 1 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$, 且有一正整数 N, 当 $n>N$ 时,不等式 $x_n>y_n$ 都成立,則 $a\geqslant b$.

特别地,若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 且有一正整数 N, 当 $n>N$ 时,有 $x_n>b$, 則 $a\geqslant b$.

【証明】 用反証法。如果在所設条件下,有 $a<b$,則由定理 1,必有一正整数 N, 当 $n>N$ 时,不等式 $x_n<y_n$ 都成立,这与所設条件之一矛盾,从而推論便被証明了。

特别情况也可以相似地来証明。

这里要注意的是:在 $x_n>y_n$ 的情况下,可能有 $a=b$. 例如 $x_n=\frac{1}{n}$, $y_n=\frac{1}{2n}$, 則对每一 n, 都有 $x_n>y_n$, 但

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=0.$$

推論 2 若 $x_n\to a$, 且 $a>b$ (b 为常数), 則有一正整数 N, 当 $n>N$ 时,有 $x_n>b$.

【証明】 設 $y_n=b\,(n=1,2,3,\cdots)$, 則 b 可看作 $\{y_n\}$ 的极限,即設 $y_n\to b$. 于是推論中的条件就成为 $x_n\to a$, $y_n\to b$, 且 $a>b$. 由定理 1, 必有一正整数 N, 当 $n>N$ 时, 有不等式 $x_n>y_n$. 但 $y_n=b$, 故即有 $x_n>b$. 即得所欲証的結果。

这个推論也可根据极限定义用反証法来証明。讀者可自証作为练习(参見习题 8)。

推論 1 和推論 2 是极限很重要的性质,以后經常要用到。讀

者必須熟练地掌握它們。

关于推論 2 也有可注意的特殊情况：若 $x_n\to a$，且 $a>0$，则当 n 充分大时，有 $x_n>0$.（这里所謂"充分大的 n"就是指有一正整数 N，幷对 $n>N$ 的一切 n 而說的。以后往往这样叙述，不再每一处声明。）

推論3 若 $x_n\to a$，且 $a<c$（c 为常数），则当 n 充分大时，有 $x_n<c$. 特别地，若 $x_n\to a$，且 $a<0$，则当 n 充分大时，有 $x_n<0$.

这推論的証明与推論 2 的証明相似。

定理2 若数列 $\{x_n\}$ 收斂，則它有一个且只有一个极限（极限的唯一性）。

【証明】 用反証法。設 $\{x_n\}$ 有两个相异极限 a, b. 不妨設 $a>b$. 今在 a, b 之間任取一数 r，即 $b<r<a$. 因 $x_n\to a$，且 $a>r$，由定理 1 的推論 2，则有一正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，有 $x_n>r$.

同样，因 $x_n\to b$，且 $b<r$，由定理 1 的推論 3，則有一正整数 N_2，当 $n>N_2$ 时，有 $x_n<r$.

今取 $N=\max(N_1, N_2)$，则当 $n>N$ 时，同时有 $x_n>r$ 及 $x_n<r$. 这是不可能的。定理于是得証。

定理3 若有一正整数 N，当 $n>N$ 时，有

$$x_n\leqslant y_n\leqslant z_n,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$，则有

$$\lim_{n\to\infty} y_n=a.$$

【証明】 因为所要的結論只是关于极限值的，所以不妨改变三个数列的前 N 項的值，使它們也滿足不等式 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$. 因此可設对每一 n，这不等式都成立。

因 $x_n\to a$，故对任意給定的 $\varepsilon>0$，有一正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$，即

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon \quad (n>N_1).$$

又因 $z_n\to a$，同样对上面所給定的 $\varepsilon>0$，也有一正整数 N_2，当 $n>N_2$ 时，有 $|z_n-a|<\varepsilon$，即

$$a-\varepsilon<z_n<a+\varepsilon \quad (n>N_2).$$

今取 $N=\max(N_1, N_2)$，則当 $n>N$ 时，上面两个不等式同时成立，即当 $n>N$ 时，有

$$a-\varepsilon<x_n\leqslant y_n\leqslant z_n<a+\varepsilon.$$

这样，則对任意給定的 $\varepsilon>0$，有一正整数 N，当 $n>N$ 时，有

$$|y_n-a|<\varepsilon,$$

亦即 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$。

推論 若存在一正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $a\leqslant y_n\leqslant z_n$（或 $z_n\leqslant y_n\leqslant a$），且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$。

这推論的証明是很明显的。

以后經常用定理 3 作为一种很重要的工具来求极限。它的重要性在于不仅告訴我們判断 $\{y_n\}$ 的极限存在的一种方法，而且可用这个方法来求极限。

[例 1] 求$\left\{\dfrac{1+n}{n^3}\right\}$的极限。

对任意正整数 n，显然有

$$\frac{1}{n}<\frac{1+n}{n^2}\leqslant\frac{2n}{n^2}=\frac{2}{n},$$

但 $\dfrac{1}{n}\to 0$，$\dfrac{2}{n}\to 0$，由定理 3，則

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{n^2}=0.$$

为了更深入地討論极限，現在来介紹一个很重要的概念，就是所謂子列：若在数列

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

中，保持原来次序自左往右任意选取无穷多个项，如

$$x_2,\ x_5,\ x_{12},\ \cdots,\ x_{56},\ \cdots.$$

这种数列称为 $\{x_n\}$ 的子列。为方便起見，用另一种下标来表示它。在选出的子列中，我們記第一項为 x_{n_1}，第 k 項为 x_{n_k}，于是可将 $\{x_n\}$ 的子列表如：

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ \cdots,\ x_{n_k},\ \cdots.$$

很明显，对每一 k，有 $n_k\geqslant k$。k 表示 x_{n_k} 在子列中第 k 項，n_k 表示 x_{n_k} 在原数列中第 n_k 項。又对任意两个正整数 h, k，如果 $h\geqslant k$，則 $n_h\geqslant n_k$。反过来，如果 $n_h\leqslant n_k$，則 $h\leqslant k$。

因为在子列 $\{x_{n_k}\}$ 中的下标是 k 而不是 n_k，故 $\{x_{n_k}\}$ 收斂于 a 应这样定义：对任意給定的 $\varepsilon>0$ 及定数 a，总可找到正整数 K 当 $k>K$ 时，一切 x_{n_k} 全都落在 a 点的 ε 邻域内。这时，記为 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$。

对給定的一个收斂数列 $\{x_n\}$，它的任何子列是否也收斂呢？又子列的极限与原数列的极限有什么关系呢？下面定理就来回答这問題。

定理4 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，則 $\{x_n\}$ 的任何子列 $\{x_{n_k}\}$ 都收斂，且它的极限也等于 a。

【証明】 因 $x_n\to a$，对任意給定 $\varepsilon>0$，必有一正整数 N，当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

今取 $K=N$，則对一切 $k>K$，有 $n_k>n_K=n_N\geqslant N$，这时就有

$$|x_{n_k}-a|<\varepsilon.$$

从而即有
$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=a.$$

这就是所要証明的。

这个定理对判别数列 $\{x_n\}$ 不收斂有很大方便。因为如果在 $\{x_n\}$ 中有一个子列不收斂，或有两个子列不收斂于同一极限，則由

上定理就可以断言 $\{x_n\}$ 不收斂。例如，数列 $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \cdots)$ 一定是发散的，因它有两个子列分别收斂于 0 及 1. 現在再看一个例子：

[例 2] 設 $x_n=\sin\frac{n\pi}{8}$. 在 $\{x_n\}$ 中取出两个子列：

$$\sin\frac{8\pi}{8},\ \sin\frac{16\pi}{8},\ \cdots,\ \sin\frac{8k\pi}{8},\cdots,$$

$$\sin\frac{4\pi}{8},\ \sin\frac{20\pi}{8},\ \cdots,\ \sin\frac{(16k+4)\pi}{8},\cdots,$$

則第一个子列的极限为 0，而第二个子列的极限为 1. 因此 $\left\{\sin\frac{n\pi}{8}\right\}$ 发散。

关于数列 $\{x_n\}$ 和它的子列的收斂关系，还有一个可注意的事实：如果数列 $\{x_n\}$ 的奇数項所成的数列 $\{x_{2n-1}\}$ 及偶数項所成的数列 $\{x_{2n}\}$ 都收斂，且它們都收斂于同一极限 l，則原数列 $\{x_n\}$ 也收斂，且极限也等于 l. 这个性质可根据极限定义易于証明，建議讀者自証（参見习題 17），我們以后往往利用它来求数列的极限。

[例 3] 設数列

$$\{x_n\}=\left(0,\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{4},\ \cdots\right),$$

于是有
$$x_{2n-1}=\frac{n-1}{n}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots),$$

$$x_{2n}=\frac{n+1}{n}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=1$，故

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1.$$

二、数列极限的运算

1. 若数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 都收斂，則从它們的对应項相加或相減作成的数列 $\{x_n\pm y_n\}$ 也都收斂，且

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\pm\lim_{n\to\infty}y_n.$$

这个結果显示：两收斂数列的和或差也收斂，且和或差的极限等于极限的和或差。

【証明】 我們仅对和的情况予以証明。至于差的极限的証明也完全类似。

設 $x_n\to A$，$y_n\to B$. 則对任意給定 $\varepsilon>0$，存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，有 $|x_n-A|<\varepsilon$. 同时也存在正整数 N_2，当 $n>N_2$ 时，有 $|y_n-B|<\varepsilon$.

令取 $N=\max(N_1, N_2)$，則当 $n>N$ 时，上两不等式同时成立。应用三角不等式，有

$$|(x_n+y_n)-(A+B)|\leqslant|x_n-A|+|y_n-B|.$$

于是当 $n>N$ 时，有

$$|(x_n+y_n)-(A+B)|<2\varepsilon.$$

即
$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=A+B=\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n.$$

特别地，两个无穷小量的代数和仍是无穷小量。

2. 若 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 都收斂，則 $\{x_ny_n\}$ 也收斂，且

$$\lim_{n\to\infty}x_ny_n=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n.$$

即两个收斂数列的积的极限等于极限的积。

【証明】 設 $x_n\to A$，$y_n\to B$. 于是因 $\{x_n\}$ 是有界的，即存在正数 M，使

$$|x_n|\leqslant M.$$

应用三角不等式，有

$$\begin{aligned}|x_ny_n-AB|&=|x_ny_n-x_nB+x_nB-AB|\\&\leqslant|x_ny_n-x_nB|+|x_nB-AB|.\end{aligned}$$

对任意給定 $\varepsilon>0$，有正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，有 $|x_n-A|<\varepsilon$. 同时也有正整数 N_2，当 $n>N_2$ 时，有 $|y_n-B|<\varepsilon$.

取 $N=\max(N_1,\ N_2)$，則当 $n>N$ 时，有

$$|x_ny_n-AB|\leqslant|x_n||y_n-B|+|B||x_n-A|$$
$$\leqslant M\varepsilon+|B|\varepsilon=\varepsilon(M+|B|),$$

即有
$$\lim_{n\to\infty}x_ny_n=AB=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n.$$

在上面証明里我們采取了加进 x_nB 再減去 x_nB 的方法，这样加一項減一項的方法在証明中是常用的。

从上面的运算法則，也易于証明两个无穷小量的积仍是无穷小量。特別地，若 $y_n=a=$ 常数，則有

$$\lim_{n\to\infty}ax_n=a\lim_{n\to\infty}x_n.$$

最后的等式只要 $a\neq0$ 即使 $\{x_n\}$ 为无穷大量也认为是成立的，因这时 $\{ax_n\}$ 也为无穷大量，而等号的意义表示两边都是无穷大量。

从証明的方法来看，即知代数和与积的两种运算可毫无困难地推广到有限个变量的情形。

3. 若 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 都收斂，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq0$，則 $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ 也收斂，且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}.$$

【証明】 設 $x_n\to A$，$y_n\to B$，此处 $B\neq0$。对任意給定 $\varepsilon>0$，有一个正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，有 $|x_n-A|<\varepsilon$。同样也有一正整数 N_2，当 $n>N_2$ 时，有 $|y_n-B|<\varepsilon$。

取 $M=\max(N_1,N_2)$，則当 $n>M$ 时，$|x_n-A|<\varepsilon$ 及 $|y_n-B|<\varepsilon$ 同时成立。现在作以下估計：

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{A}{B}\right|=\frac{|Bx_n-Ay_n|}{|y_n||B|}\leqslant\frac{|B||x_n-A|+|A||y_n-B|}{|B||y_n|}.$$

因 $B\neq0$，且根据乘法运算，有 $By_n\to B^2>\dfrac{B^2}{2}$。于是由本节定理1推論2，則存在一正整数 K，当 $n>K$ 时，有

$$By_n > \frac{B^2}{2}.$$

再取 $N=\max(M, K)$，則当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{A}{B}\right| < \frac{(|B|+|A|)\varepsilon}{\frac{B^2}{2}} = \frac{2(|A|+|B|)}{B^2}\varepsilon.$$

于是即有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{A}{B}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}.$$

(注) 上面各种运算都是在原来两个或多个数列皆收斂的假設下才有效的。如果不注意这点，就会得到无理結果。如 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n}=1$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)=1$ 是正确的。但如果应用乘法或除法运算，則有 $\frac{\lim\limits_{n\to\infty}n}{\lim\limits_{n\to\infty}n}=1$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=1$，这显然是錯了，因为不能有 $\frac{\infty}{\infty}=1$ 或 $\infty\cdot 0=1$. 原因是数列 $\{n\}$ 是无穷大量，乘法和除法运算都是无效的。

从和与积的运算，我們知两个或有限个无穷小量的代数和与积仍然是无穷小量。但有可注意的，在积的情况，只要其中一个因子是无穷小量，其余因子只須是有界的就够了，它們的积仍然保持是无穷小量。条件的这样减弱，对今后的討論是有很大便利的。現在就来予以証明。下面只对两个数列的积来証明就可以了。至于有限多个数列的情况完全可类似地証明。

定理 5 若 $\{x_n\}$ 为有界数列，$\{y_n\}$ 为无穷小量，则它們的积 $\{x_ny_n\}$ 是无穷小量。

【証明】 因 x_n 有界，必存在正数 M，使 $|x_n|\leqslant M$. 又因 $y_n\to 0$，故对任意給定 $\varepsilon>0$，有正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $|y_n|<\varepsilon$. 从而当 $n>N$ 时，有

$$|x_ny_n|=|x_n|\,|y_n|\leqslant M\varepsilon,$$

即 $\{x_ny_n\}$ 为无穷小量。

我們已經知道，如果两个数列之一是无穷小量，另一个至少是有界量，那末它們的积必为无穷小量。但也有这样情况：两个数列本身都不是无穷小量，而它們的积却是无穷小量。例如，下面两个数列

$$(1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots),$$

$$(0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \cdots)$$

的积 $(0,\ 0,\ 0,\ \cdots)$ 是一个无穷小量，但原来两个数列都是发散的。

与定理 5 相应的也有相似定理：

定理 6 若存在一数 $p>0$，对充分大的 n，有 $|x_n|>p$，且 $\{y_n\}$ 为无穷大量，則它們的积 $\{x_ny_n\}$ 也是无穷大量。

这个定理的証明与定理 5 的証明相似。作为练习，讀者可自己补証（习題 18）。

和无穷小量一样，两个数列的积虽然是无穷大量，但它們本身可以都不是无穷大量。例如，下面两个数列

$$(1,\ 1,\ 3,\ 1,\ 5,\ 1,\ 7,\ 1,\ \cdots),$$

$$(1,\ 2,\ 1,\ 4,\ 1,\ 6,\ 1,\ 8,\ \cdots)$$

的积为 $(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \cdots)$，是一个无穷大量，但原来两个数列都不是无穷大量。

又如果将定理 6 中的 $\{x_n\}$ 所应满足的条件改作有界，則 $\{x_ny_n\}$ 就不一定是无穷大量了。例如，

$$\{x_n\}=(1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots),$$

$$\{y_n\}=(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \cdots),$$

則有
$$\{x_ny_n\}=(1,\ 0,\ 3,\ 0,\ 5,\ 0,\ \cdots),$$

最后这个数列显然不是无穷大量。

推論 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\neq0$，$a$ 为有限或 ∞，且 $\{y_n\}$ 为无穷大量，

則 $\{x_n y_n\}$ 也是无穷大量。

【証明】 先設 a 为有限数。分两情况：1) $a>0$, 2) $a<0$.

1) $a>0$, 在 $(0, a)$ 内任取一个 $\varepsilon: 0<\varepsilon<a$. 有一正整数 N, 当 $n>N$ 时，有 $x_n>a-\varepsilon>0$. 于是这个 $a-\varepsilon$ 就起着定理 6 中 p 的作用。推論即已証明。

2) $a<0$, 可写：

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = -\lim_{n\to\infty}\{-(x_n y_n)\} = -\lim_{n\to\infty}\{(-x_n) y_n\}.$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}(-x_n) = -a>0$, 根据情况 1)，則 $\{-x_n y_n\}$ 为无穷大量，从而 $\{x_n y_n\}$ 也为无穷大量。

至于当 $\{x_n\}$ 也为无穷大量时，从无穷大量定义立可証得 $\{x_n y_n\}$ 为无穷大量。推論至此完全証明。

至于两个无穷大量或无穷小量之商以及无穷大量与无穷小量的积究竟是什么，要按具体情况而定，它可以是有限数、零、或无穷大。以后将对这些情况作仔細研究，这里不再深入討論了（参見习題 14）。

[例 4] 考察

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k}{b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + \cdots + b_l},$$

其中 k, l 都是正整数或 0; a_i, b_i 都是与 n 无关的数，且設 $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$.

可写：

$$\frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k}{b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + \cdots + b_l} = n^{k-l}\,\frac{a_0 + \dfrac{a_1}{n} + \cdots + \dfrac{a_k}{n^k}}{b_0 + \dfrac{b_1}{n} + \cdots + \dfrac{b_l}{n^l}},$$

但因 $a_0 + \dfrac{a_1}{n} + \cdots + \dfrac{a_k}{n^k} \to a_0$, $b_0 + \dfrac{b_1}{n} + \cdots + \dfrac{b_l}{n^l} \to b_0$, 应用除法运算，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0+\dfrac{a_1}{n}+\cdots+\dfrac{a_k}{n^k}}{b_0+\dfrac{b_1}{n}+\cdots+\dfrac{b_l}{n^l}}=\frac{a_0}{b_0}.$$

同时，有

$$\lim_{n\to\infty}n^{k-l}=\begin{cases}0, & \text{当 } k<l \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } k=l \text{ 时},\\ +\infty, & \text{当 } k>l \text{ 时},\end{cases}$$

如果属于前两情况即 $k<l$ 或 $k=l$，則可应用乘法运算，立得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0n^l+b_1n^{l-1}+\cdots+b_l}=\begin{cases}0, & \text{当 } k<l \text{ 时},\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当 } k=l \text{ 时}.\end{cases}$$

如果 $k>l$，于是由定理 6 的推論，立得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0n^l+b_1n^{l-1}+\cdots+b_l}=\infty,\quad \text{当 } k>l \text{ 时}.$$

在 §1(一)，例 4中，我們曾根据定义，証得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}=\dfrac{1}{3}$，那里的証明是相当煩难的。現在如果应用上例的結果，可很簡单地求得极限。

[例 5] 应用极限运算和上面的一些极限性质，可以求得某些較为复杂变量的极限。如

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cos n+\frac{n+1}{2n^2+1}\right]=0,$$

这是因为$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$是无穷小量，$\{\cos n\}$ 是有界量，故$\left\{\dfrac{1}{n}\cos n\right\}$是无穷小量。又根据例 4，$\left\{\dfrac{n+1}{2n^2+1}\right\}$也是无穷小量。于是利用极限运算法則立即得到結果。

本节中所述的极限的性质及运算法則等都是最基本的同时也是最重要的工具，讀者必須通过大量习題来掌握它們。而在施行极限运算时，必須注意每一步的合理性。

§3 关于数列的几个基本定理

一、上确界和下确界

上面我們已經叙述了极限的概念、基本性质及运算法則，但还不能滿足今后深入討論的需要。这一节我們将叙述关于数列的几个基本定理。有了这些基本定理，今后进一步探討才有了严格的理論基础，也可以說数学分析的严謹理論是建立在这几个定理的基础之上的。我們将首先引进两个非常重要的概念，即所謂**上确界与下确界**。虽然本节只限于討論数列，但为了今后可以普遍地应用这两个概念到函数上去，因此有必要对它們給以概括性的定义，也就是对比較数列广泛得多的所謂"数集"来叙述它們。因此下面先对"集"的概念略予介紹。

1. 集的概念：数学是研究現实世界中量的关系的科学。人类为了要从量的側面来认識事物，"为要能够在其純粹状态中去研究这些形式与关系，那么就必須完全使它們脫离其內容，把內容放置一边作为不相干的东西，……"(恩格斯："反杜林論"人民出版社，1956 年本 38 頁)。也就是說为了我們能够从量的側面来研究事物，必須把事物的"质"抽出去而只保留作为一个一个地可以区分它們的某些共有性质，把具有这共有性质的事物看作一个整体，就說它們組成一个"集"。如果研究的对象是实数，就叫做数集。組成集(数集)的各个事物叫做集的**元**。集必須有明确的准則，如"高个子的人"不能組成集，因为究竟身高多少才算作"高个子"是不明确的，如說："1.8 米以上的人"那就成为一个集了。又如一切正整数或一切 $x\geqslant 1$ 的数 x 都成为集。

集是数学中最基本的概念之一。我們平常用大写罗馬字母如 $A, B, E, \cdots$ 等来表示它。集中的元通常用小写罗馬字母如 $a, b, x, \cdots$ 等来表示。

如果 x 是 E 中的一元，我們就用符号：

$$x \in E$$

来記这件事，讀作"x 属于 E"。例如，若 E 为一切 $x \geq 1$ 的数 x 所組成，則 $2 \in E$。如果 x 不是 E 中的一元，則用符号：

$$x \overline{\in} E$$

来記，讀作"x 不属于 E"。例如，E 是一切正整数所組成，則 $-1 \overline{\in} E$。

2. 上确界与下确界的定义：一个集可有有限个元，也可有无穷多个元。同样，一个数集可由有限个数組成，也可由无穷多个数組成，前者称为有穷集(数集)，后者称为无穷集(数集)。数列是无穷数集的特殊情况，任何有穷数集都有一个最大数与一个最小数。但对于无穷数集来說就不一定有最大数与最小数了。例如，由一切 $x>1$ 所成的数集沒有最小数。数列也不一定有最大数与最小数。例如，数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 无最大数，而有最小数 $\frac{1}{2}$。又如数列 $\left\{-\frac{n}{n+1}\right\}$ 无最小数，而有最大数 $-\frac{1}{2}$ (如图 1-2-4)。

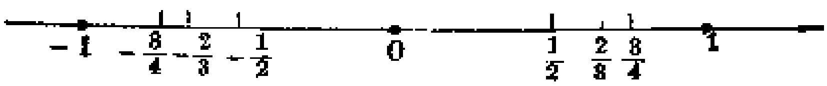


图 1-2-4

我們知道，有界数列有无穷多个上界和无穷多个下界。因而对有界数列来說，如果它有最大数，那么这个最大数也是它的上界中的一个，并且比这最大数小的任何数都不是它的上界，这时，**这最大数自然就是它的最小的上界**。同样，若数列有最小数，那么**这个最小数就是它的最大的下界**，也就是說，比这最小数大的任何数都不是它的下界。以上情况可根据上、下界的定义立即得知。

但在上面例子中已經看到，数列不一定有最大数或最小数，而数列是无穷数集的特殊情况，因此，对一般无穷数集来讲也不一定

有最大数或最小数。这时，我們就不能把数集的最大数作为它的最小的上界，也不能把最小数作为它的最大的下界。然而，对于某些数集或数列来說，最小的上界和最大的下界确实存在的，因此，这里暂时撇开它們的存在性，而对一般数集的最小的上界与最大的下界給予确切的定义是有必要的。下面就来叙述它們的定义：

設給定一数集 E．若存在这样一个数 β，适合下两条件：

(1) 集 E 中的一切数 $x\leqslant\beta$，

(2) 对任意給定的正数 ε，至少存在一个数 $x_0\in E$，使

$$x_0>\beta-\varepsilon,$$

則 β 叫做 E 的**上确界**，記为

$$\beta=\sup E,\quad 或\quad \beta=\sup_{x\in E}\{x\}.$$

上面第一个条件就意味着 β 是集 E 的上界之一，而第二个条件显示出凡小于 β 的任何数都不是 E 的上界。換言之，β 就是 E 的最小的上界。

同样，对給定的数集 E，若存在这样一个数 α，适合下两条件：

(1) 集 E 中的一切数 $x\geqslant\alpha$，

(2) 对任意給定的正数 ε，至少存在一个数 $x_0'\in E$，使

$$x_0'<\alpha+\varepsilon,$$

則 α 叫做 E 的**下确界**，記为

$$\alpha=\inf E,\quad 或\quad \alpha=\inf_{x\in E}\{x\}.$$

第一个条件說明 α 是 E 的下界之一，而第二个条件說明凡大于 α 的任何数都不是 E 的下界。也就显示出 α 是 E 的最大的下界。

并不是任何数集都有上、下确界。对任何有穷数集来說它們一定存在，这时，从上、下确界的定义容易推知，最大数就是它的上确界，最小数就是它的下确界。然而对无穷数集来讲，它就不一定

存在上、下确界了。例如，对于正整数列 $\{n\}$ 显然不存在适合上确界的第(1)条件的数 β。又对于負整数列 $\{-n\}$ 也不存在适合下确界的第(1)条件的数 α。

还要注意的是：一个无穷数集 E 即使它有上确界 β（或下确界 α），然而这个 β（或 α）可属于 E 也可不属于 E。例如，数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$，根据上、下确界的定义，易知 $\alpha=0$，$\beta=1$。于是 $\alpha\overline{\in}E$，而 $\beta\in E$。如果 β（或 α）属于 E，則我們說上（或下）确界 β（或 α）**可达到**。否則就說上(或下)确界**不达到**。在上例里，下确界 0 不达到而上确界 1 可达到。当上(或下)确界 β（或 α）可达到时，則 β(或 α）必是集 E 的最大数（或最小数），因如果有一数 $x\in E$ 且 $x>\beta$，則 β 就不是 E 的最小上界了。对下确界可达到必是集 E 的最小数的情况，也可同样証明。

下面看几个例子：

［例 1］ $E=\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots\right)$，$\alpha=0$（不达到），$\beta=1$（达到）。

［例 2］ $E=(1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots)$，$\alpha=1$（达到），$\beta$ 不存在。

［例 3］ $E=(-1,\ -2,\ \cdots,\ -n,\ \cdots)$，$\alpha$ 不存在，$\beta=-1$（达到）。

［例 4］ E 为一切整数組成，α 及 β 都不存在。

［例 5］ E 为 $0<x\leqslant 1$ 的一切数組成，則 $\alpha=0$(不达到)，$\beta=1$（达到）。

数集 E 的上(下)确界还有一个重要性质：若 $\beta(\alpha)$ 为 E 的上（下）确界并且 $\beta(\alpha)$ 不属于 E，那么在 E 中必存在一列 x_n，使 $x_n\to\beta\,(x_n\to\alpha)$（参見习题 27）。

現在提出一个基本問題：一个数集如果有上(或下)确界，那么，它的上（或下）确界是否只有一个或多个呢？下面的定理就来

回答这个問題：

定理 1　設一数集 E 有上(或下)确界，則这上(或下)确界是唯一的。

【証明】　仅对上确界的情况来証明，关于下确界的証明完全类似(参見习題26)。用反証法。設 β_1, β_2 都是 E 的上确界，則有三种可能情况：(i) $\beta_1<\beta_2$，(ii) $\beta_1>\beta_2$，(iii) $\beta_1=\beta_2$.

設情况(i)是可能的，則有比 β_2 小的数 β_1 是 E 的上界，从而 β_2 不是 E 的上确界，与假設矛盾。故情况(i)是不可能的。相似地，可証情况(ii)也是不可能的。最后，只有情况(iii)是眞实的。这就証明了上确界的唯一性。

前面已經說过不是任何数列都有上确界或下确界。但究竟怎样的数列才有上确界或下确界呢？为了回答这个問題，有下面基本定理：

定理 2　有上界的数列必有上确界，有下界的数列必有下确界。

本定理从直观上很容易理解，它的严格証明可以利用实数連續性得出。我們对这定理只作直观上承认，不予証明。

(注)　这里要提請讀者注意的是：对一般无穷数集来讲，我們不能肯定它有最大数或最小数。但对于一切上(或下)界作成的数集，从上一定理就可以肯定它有最小(或最大)数，即原来数集的上(或下)确界。从这个意义来說，上定理的严格証明似乎是不可缺少的。但由于我們在正文里略去了实数連續性，証明就缺乏了基础。讀者以后如有需要，可参閱本篇附录。

利用上述定理作为基础，可以証明下面其他一些重要定理。

二、极限存在的一个重要判别法

定理 3　单調有界数列必有极限。

【証明】　我們只就单調增加的有界数列来予以証明。因 $\{y_n\}$

有界，则必有上确界$\beta=\sup\{y_n\}$。现在証明β恰好就是$\{y_n\}$的极限，即$y_n\to\beta$。

由上确界的定义，则有：(i) $y_n\leqslant\beta(n=1,2,3,\cdots)$，(ii) 对任意給定的$\varepsilon>0$，在$\{y_n\}$中至少有一数$y_N$，使$y_N>\beta-\varepsilon$。但由于$\{y_n\}$是单調增加数列，因此当$n>N$时，有$y_n\geqslant y_N$，从而$y_n>\beta-\varepsilon$。也就是說：当$n>N$时，有

$$0\leqslant\beta-y_n<\varepsilon,$$

亦即当$n>N$时，有

$$\beta-\varepsilon<y_n<\beta+\varepsilon,$$

所以

$$y_n\to\beta.$$

这里不仅証明了单調有界数列极限的存在，而且也証明了：如果它是单調增加的，則上确界就是它的极限。

同样可証：单調減少有界数列的极限存在，且下确界就是它的极限(参見习題 19)。

推論 若$\{y_n\}$为单調增加无界数列，則$y_n\to+\infty$。若$\{y_n\}$为单調減少无界数列，則$y_n\to-\infty$。

这是因为单調增加的无界数列必沒有有限数为它的上界，故可认为它的上确界为$+\infty$。同样，对单調減少的无界数列可认为它的下确界为$-\infty$。

(注) 定理中的“单調性”和“有界性”两个条件都是不可缺少的，否則不一定能保証极限的存在。例如，数列$(0,1,0,1,\cdots)$是有界的但不是单調的，又如正整数列$\{n\}$是单調的但是无界的。我們已知它們的极限都不存在。但所設条件仅是充分的而不是必要的。例如，数列$\left\{(-1)^n\frac{1}{n}\right\}$不是单調的，但它是无穷小量。

定理 3 在判别数列极限存在时有很大便利，而且下面即将看到，利用这定理可导得其他的重要定理。现在来看一个例子，这个例子不仅告訴我們如何运用定理 3 来判断极限的存在性，并且又

告訴我們，当确知数列极限存在以后，还可以施行极限运算来求得极限值。

[例 6] 考察数列:

$$y_1=\sqrt{a},\quad y_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},\quad y_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\ \cdots,$$
$$y_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}},\ \cdots,$$

其中 $a>0$. 現在証明 $\{y_n\}$ 是收斂的。从这个数列的构造来看，它显然是单調增加的。我們来証明它也是有界的。易見

$$y_2=\sqrt{a+y_1},\quad y_3=\sqrt{a+y_2},\quad \cdots,\quad y_n=\sqrt{a+y_{n-1}},\ \cdots,$$

从而有
$$y_n^2=a+y_{n-1}.$$

因 $y_n>0$, 卽有

$$y_n=\frac{a}{y_n}+\frac{y_{n-1}}{y_n}.$$

又因 $y_{n-1}<y_n$, 故

$$y_n<\frac{a}{y_n}+1.$$

注意对每一正整数 n, $y_n\geqslant\sqrt{a}$, 則 $\frac{a}{y_n}\leqslant\sqrt{a}$. 从而对每一正整数 n, 有

$$y_n<\sqrt{a}+1.$$

这就証明了 $\{y_n\}$ 的有界性。根据定理 3, $\{y_n\}$ 有极限。

現在还可进一步来求 $\{y_n\}$ 的极限。設 $y_n\to l$. 对等式 $y_n^2=y_{n-1}+a$ 两边取极限，則有

$$\lim_{n\to\infty}y_n^2=\lim_{n\to\infty}(y_{n-1}+a),$$

从而得到下面方程

$$l^2=l+a.$$

因 $\{y_n\}$ 为正数列，它的极限 l 不能是負数。取上方程的正根，則得

$$l=\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}.$$

三、自然对数的底 e

现在討論一个非常重要数列的极限的存在問題。这个数列就是：

$$y_1=(1+1)^1,\ y_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ y_3=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3,\cdots,\ y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\cdots.$$

应用二項式展开，可得

$$y_n=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1}{n!}\frac{1}{n^n}$$
$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

$$y_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

但

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)<\left(1-\frac{1}{n+1}\right),$$
$$\left(1-\frac{2}{n}\right)<\left(1-\frac{2}{n+1}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\left(1-\frac{n-1}{n}\right)<\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right).$$

即 y_n 中从第三項起每項都小于 y_{n+1} 相应的項，而 y_{n+1} 中还多最后一項且这項显然大于零，因此 $y_n<y_{n+1}$。故 $\{y_n\}$ 是单調增加数列。現在来証明 $\{y_n\}$ 的有界性。因 y_n 的展开式中的每一項都是小于1

的，所以当 $n>1$ 时，有

$$
\begin{aligned}
y_n &< 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \\
&< 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n} \\
&= 1+1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) \\
&= 1+1+1-\frac{1}{n}<3,
\end{aligned}
$$

即 $\{y_n\}$ 为有界数列。根据定理 3，則

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

存在。通常我們記此极限为 e，它就是自然对数的底。我們称以 e 为底的对数为自然对数，通常記作 $\ln x$。在数学分析中所考虑的对数除特别声明外都是自然对数。

数 e 可通过初等运算計算到任意精确程度。我們可将 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 写作下形式：

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = &\left[2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots\right. \\
&\left.+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right] \\
&+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots \\
&\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left[\frac{1}{k+1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\right. \\
&+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k+1}{n}\right)+\cdots \\
&\left.+\frac{\left(1-\frac{k}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{(k+1)(k+2)\cdots n}\right].
\end{aligned}
$$

10! > 10^6

对第二项作下估計:

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$\cdot\left[\frac{1}{k+1}\left(1-\frac{k}{n}\right)+\cdots+\frac{\left(1-\frac{k}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{(k+1)(k+2)\cdots n}\right]$$

$$<\frac{1}{k!}\left[\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^{n-k}}\right]$$

$$<\frac{1}{k!}\left[\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{k!}\frac{1}{(k+1)\left(1-\frac{1}{k+1}\right)}=\frac{1}{k\cdot k!}.$$

于是得到下不等式:

$$0<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\left[2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]<\frac{1}{k\cdot k!}.$$

取 $n\to\infty$, 得

$$0<e-\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}\right)<\frac{1}{k\cdot k!}.$$

从而可用以下的和

$$2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}$$

作为 e 的精确到 $\frac{1}{k\cdot k!}$ 的近似值。

例如,取 $k=10$, 則得

$$e\approx 2.718281,$$

这个值精确到 $\frac{1}{10\cdot 10!}<0.0000001$. 还可取更大的 k 来計算 e 的更精确的近似值,如

$$e=2.718281828459045\cdots,$$

我們还可証明 e 是无理数，这里不詳述了。

四、几个基本定理

定理 3 説明了单調有界数列极限的存在性，这是数列极限存在的一个重要判别法。但如果数列不是单調的，就不能用这个定理来肯定它的收斂性了，因此一般地讲有界数列可以收斂也可以发散。但有界数列无論收斂与否，它有一个非常重要的性质：在其中总存在收斂的子列。这个性质不是每一无界数列都能具有的，例如，在正整数列 $\{n\}$ 中就不存在任何收斂子列。为了証明有界数列的这个重要性质，需要其他定理作基础，即所謂"区間套"定理，我們現在就来叙述它：

定理 4（区間套定理）　設一无穷閉区間列 $\{[a_n, b_n]\}$ 适合下面两个条件：(i) 后一区間在前一区間之内，即对任一正整数 n，有 $a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n$，(ii) 当 $n\to\infty$ 时，区間列的长度 $\{(b_n-a_n)\}$ 所成的数列收斂于零，即 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，則区間的端点所成两数列 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$ 收斂于同一极限 ξ，且 ξ 是所有区間的唯一公共点。

【証明】　从定理的条件显然有(图 1-2-5)

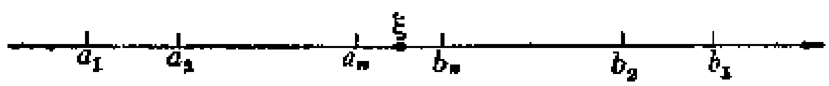


图　1-2-5

$$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots<b_1,$$

$$b_1\geqslant b_2\geqslant b_3\geqslant\cdots\geqslant b_n\geqslant\cdots>a_1,$$

故 $\{a_n\}$ 是单調增加有上界的数列，$\{b_n\}$ 是单調减少有下界的数列。根据定理 3，則 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，且极限等于 $\{a_n\}$ 的上确界。同样，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在，且极限等于 $\{b_n\}$ 的下确界。亦即对任何正整数 k，有

$$a_k\leqslant\lim_{n\to\infty}a_n,\quad b_k\geqslant\lim_{n\to\infty}b_n. \tag{*}$$

由定理的另一条件：$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，且由于已知 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$ 的

极限都存在，则有

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}b_n-\lim_{n\to\infty}a_n=0,$$

从而証明了两个极限相等，且設 ξ 是它們的同一极限。于是定理的一部分的結果即已証得。剩下要証的是：ξ 是所有区間的唯一公共点。从(*)的两个不等式，卽有

$$a_k\leqslant\xi\leqslant b_k\quad(k=1,2,3,\cdots),$$

也就是 ξ 是所有区間的一个公共点。現在要証明 ξ 是唯一公共点。

設除点 ξ 外，所設区間列还有另一公共点 ξ'，且 $\xi'\neq\xi$。由于 $a_n\leqslant\xi,\ \xi'\leqslant b_n\ (n=1,2,3,\cdots)$，故有

$$b_n-a_n\geqslant|\xi'-\xi|\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

由§2定理1推論1，則有

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)\geqslant|\xi'-\xi|.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，故有

$$|\xi'-\xi|\leqslant 0,$$

从而有 $\xi'=\xi$。定理的全部結果都已証得。

为了以后敘述簡单起見，这里还介紹一个符号：如果一个区間列 $\{[a_n, b_n]\}$ 适合条件：$a_n\leqslant a_{n+1}<b_{n+1}\leqslant b_n$，卽后一区間在前一区間之内，或两个区間重合，則記为：

$$[a_1, b_1]\supseteq[a_2, b_2]\supseteq\cdots.$$

如果任何两个区間不完全重合，則記为：

$$[a_1, b_1]\supset[a_2, b_2]\supset\cdots.$$

在区間套定理中，若将閉区間改为开区間，或将条件(i)或(ii)去掉，定理一般将不成立(参見习題31)。

从前面很多例子中我們知道，如果数列仅仅是有界的，則它不一定收斂。对于任何有界数列，如果它是收斂的，則由§2定理4，它的任意子列都收斂，且与原数列收斂于同一极限。但如果一个

有界数列是发散的，那么它是否还有收敛子列呢？下面将述一个定理，它对这問題作了肯定的回答，我們将称它为"致密性定理"，是由德国数学家魏尔斯脫拉斯(Weierstrass)首先得到的。有时也称为"魏尔斯脫拉斯定理"。在近代数学的一个重要分支泛函分析中，有一个非常重要的概念、即所謂"致密性"完全是在这个定理的基础上經过拓广建立起来的。现在就来叙述它：

定理 5 (致密性定理)　任一有界数列必有收斂的子列。

【証明】 設 $\{y_n\}$ 为有界数列，即存在两数 a, b，使 $a \leqslant y_n \leqslant b$。等分区間 $[a, b]$ 为两半，則至少有一个半区間含有 $\{y_n\}$ 中的无穷个数。把这一个半区間記为 $[a_1, b_1]$（如果两个半区間都含有无穷个 y_n，則任取其一作为 $[a_1, b_1]$）。再等分区間 $[a_1, b_1]$ 为两半，記含有无穷个 y_n 的半区間为 $[a_2, b_2]$。这个分割手續可以无限次地进行下去，則得到一个区間列 $\{[a_n, b_n]\}$，这区間列显然适合下两条件：

(1) $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$,

(2) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0$.

于是由区間套定理，必有唯一点 $\xi \in [a, b]$ 使 $a_n \to \xi$, $b_n \to \xi$，且 $\xi \in [a_k, b_k]$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$.

每一 $[a_k, b_k]$ 中均含有 $\{y_n\}$ 的无穷个元素。

在 $[a_1, b_1]$ 中任取 $\{y_n\}$ 的一項，記为 y_{n_1}，即 $\{y_n\}$ 的第 n_1 項。由于 $[a_2, b_2]$ 也含有无穷个 y_n，則它必含有 y_{n_1} 以后的无穷多个数，在这些数中任取其一，記为 y_{n_2}，則 $n_2 > n_1$。継續在每一 $[a_k, b_k]$ 中都这样取出一个数 y_{n_k}，即得 $\{y_n\}$ 的一个子列 $\{y_{n_k}\}$，其中 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$，且 $a_k \leqslant y_{n_k} \leqslant b_k$。令 $k \to \infty$，由于 $a_k \to \xi$, $b_k \to \xi$，故 $y_{n_k} \to \xi$。这就是定理所要的結果。

当数列 $\{x_n\}$ 为无界时，虽然不能应用魏尔斯脫拉斯定理，但也

有一个相仿的性质，卽在 $\{x_n\}$ 中必存在一个子列 $x_{n_k}\to\infty$ $(k\to\infty)$ (参見习題 33, 34)。

現在我們进入数列极限存在的充分和必要条件的討論。前面曾看到过一些例子，利用极限定义来証明数列以某数为极限。但数列的极限卽使存在也不是事先知道的，因此还必須从数列本身来找到能够判断它的收斂性的条件。定理 3 給出数列极限存在的一个很重要判别法，但在这定理的后面(注)中已經知道，那里只是說明了极限存在的充分条件而不是必要的。关于极限存在的充分和必要条件的寻求，經过許多数学家的不断努力，終于由法国数学家柯西 (Cauchy) 获得了最完善的結果。下面我們将以定理形式来叙述它。这个定理称为"完备性定理"也称"柯西收斂原理"。这个定理对近代数学的发展起着极其重大的作用，如无穷級数理論及泛函分析都是在它的基础上或經过一定拓广建立起来的。

定理 6(完备性定理) 数列$\{x_n\}$有极限的必要与充分条件是：对任意給定的 $\varepsilon>0$，有一正整数 N，当 $m, n>N$ 时，有

$$|x_n-x_m|<\varepsilon.$$

在泛函分析中把滿足这条件的数列称为基本列。

【証明】 首先証明条件的必要性：

設 $x_n\to a$，則对任意給定 $\varepsilon>0$，有一正整数 N，当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而当 $m, n>N$ 时，有

$$|x_n-x_m|\leqslant|x_n-a|+|a-x_m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

其次，証明条件的充分性：

首先，証明滿足条件的任何数列必有界。从所設条件，設 $\varepsilon=1$，必有一正整数 N，当 $m, n>N$ 时，有

$$|x_n-x_m|<1.$$

特別地，当 $n>N$ 且 $m=N+1$ 时，有

$$|x_n-x_{N+1}|<1,$$

从而当 $n>N$ 时，有

$$|x_n|\leqslant|x_n-x_{N+1}|+|x_{N+1}|<1+|x_{N+1}|.$$

这就証明了 $\{x_n\}$ 的有界性。由定理 5，必有收斂子列 $\{x_{n_k}\}$，且設 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$。根据子列收斂定义，对任意給定的 $\varepsilon>0$，必有正整数 K，当 $k>K$ 时，有

$$|x_{n_k}-a|<\varepsilon.$$

取一正整数 $k_0=\max(K+1, N+1)$，于是 $k_0>K$，且 $n_{k_0}\geqslant n_{N+1}\geqslant N+1>N$。因此，当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-a|\leqslant|x_n-x_{n_{k_0}}|+|x_{n_{k_0}}-a|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

即
$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

定理完全証毕。

这个定理的充分和必要条件是說：在数列 $\{x_n\}$ 中必存在这样一項 x_N，在这項以后任意两項的差的絕对值为任意小的正数。

[例 7] 設 $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$，証明 $\{x_n\}$ 是发散的。

取 $m=2n$，则对任意正整数 n，有

$$\begin{aligned}|x_{2n}-x_n|&=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\\&\geqslant\frac{1}{n+n}+\frac{1}{n+n}+\cdots+\frac{1}{n+n}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

于是若取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，則不会有这样正整数 N，使当 $n>N$ 时，有

$$|x_{2n}-x_n|<\frac{1}{2}.$$

由定理 6，即知 $\{x_n\}$ 无极限。

最后再讲一个定理，即“掩盖定理”，有时也称“波雷耳(Borel)

定理”。这定理在数学分析中起着与致密性定理同等重要的作用。也可用这定理作为基础来証明其他定理，如完备性定理等。先介紹区間的掩盖概念：

設一区間集 E（即 E 的元为区間）及某一区間 I（开或閉都可以）。若对属于 I 的任一点 ξ，即設 $\xi\in I$，可自 E 中至少找到一区間 Δ，使 $\xi\in\Delta$，則称 E 掩盖 I。

例如：

$$\left[0,\ \frac{1}{2}\right),\ \left[\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right),\ \left[\frac{2}{3},\ \frac{3}{4}\right),\cdots,\ \left[\frac{n-1}{n},\ \frac{n}{n+1}\right),\cdots \text{及}$$

$[1,\ 2]$ 掩盖区間 $[0,\ 2]$。

又 $\left(0,\ \frac{2}{3}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right),\cdots,\left(\frac{n-1}{n},\ \frac{n+1}{n+2}\right),\cdots$ 掩盖区間 $(0,1)$。

定理 7（掩盖定理） 若开区間所成的区間集 E 掩盖一个閉区間 $[a,\ b]$，則总可从 E 中选出有限个区間，使这有限个区間掩盖 $[a,\ b]$。

【証明】用反証法。設 $[a,\ b]$ 不能被 E 中任何有限个区間掩盖。等分 $[a,\ b]$ 为两个部分区間，則至少有一个部分区間不能被 E 中任何有限个区間掩盖，此区間記为 $[a_1,\ b_1]$。再等分 $[a_1,\ b_1]$，記不能被 E 中有限个区間所掩盖的那个部分区間为 $[a_2,\ b_2]$。可照这样作无限次分割，得到一个区間列 $\{[a_n,\ b_n]\}$，这区間列显然适合下列三条件：

（i） 每一 $[a_n,\ b_n]$ 均不能被 E 中任何有限个区間所掩盖，

（ii） $[a,\ b]\supset[a_1,\ b_1]\supset[a_2,\ b_2]\supset\cdots$，

（iii） $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}\to0$.

由条件(ii)及(iii)，根据定理 4，則有唯一点 $\xi\in[a,\ b]$，且 $a_n\to\xi$，$b_n\to\xi$。按掩盖概念及定理所設条件，在 E 中至少存在一个开区間，設为 $(\alpha,\ \beta)$，使

$$\xi\in(\alpha,\ \beta)\ \text{或}\ \alpha<\xi<\beta.$$

由 §2 定理1推論2及推論3，必存在一个正整数 N，当 $n>N$ 时，有

$$\alpha<a_n<b_n<\beta.$$

即当 $n>N$ 时，有

$$[a_n, b_n]\subset(\alpha, \beta).$$

也就是用 E 中一个区間 (α, β) 就可掩盖諸区間 $[a_n, b_n]$，此处 $n>N$，与(i)矛盾。定理証毕。

在定理的条件中，若 E 不是开区間集，或 $[a, b]$ 改为非閉区間，則从 E 中就不一定能选出有限个区間来掩盖。如在上面两个例子中就不能选有限个区間掩盖 $[0, 2]$ 或 $(0, 1)$。

§4 函数极限

一、函数的极限概念

上面我們討論的都是数列的情形，例如緒論中例1，物体运动的規律是

$$s=t^3,$$

从1秒到1.5秒、从1秒到1.2秒、从1秒到1.1秒、从1秒到1.01秒、从1秒到1.001秒……的平均速度分别是

$$\bar{v}_1=4.750\text{米/秒},\ \bar{v}_2=3.640\text{米/秒},\ \bar{v}_3=3.310\text{米/秒},$$
$$\bar{v}_4=3.030\text{米/秒},\ \bar{v}_5=3.003\text{米/秒},\ \cdots,$$

它們形成数列 $\{\bar{v}_n\}$，其极限是3，因此，物体在 $t=1$ 秒时的瞬时速度是3米/秒；但是，t 也可以取任意其他的数列而趋于1，这时得出的极限是否也完全相同呢，假若不同，又如何規定瞬时速度呢？另一方面，由于 t 是連續变量，它可以取1到某一值之間的任意的值，特别是 t 可以从某值連續下降或自某值連續上升地趋于1，也就是它可以沿数軸取每一实数值下降或上升地趋于1，这时从1秒到 t 秒或从 t 秒到1秒的平均速度

$$\bar{v}(t)=\frac{t^3-1^3}{t-1}$$

也随 t 而变化，它是 t 的函数，对这种情况，是否也可以定义极限，它的极限是否也是 3 呢？本节就将定义这种极限，称为函数的极限，特别是上面的情形，以后将分别記为

$$\lim_{t\to1+0}\bar{v}(t) \quad 和 \quad \lim_{t\to1-0}\bar{v}(t).$$

这里 $t\to1+0$ 表示 t 从大于 1 的某个值連續下降地趋于 1，$t\to1-0$ 表示 t 从小于 1 的某个值連續上升地趋于 1，以后将看到它們的确都等于 3，也就是当 t 接近于 1 时，$\bar{v}(t)$ 接近于 3，而且我們还会看到这两个函数极限存在而都等于 3，的确保証了 t 取任意的数列而趋于 1 时，$\bar{v}(t)$ 的极限也是 3，这样規定 3 米/秒为物体在 $t=1$ 秒的瞬时速度就是很自然的了。然而函数极限和自变量取某一数列时所得的数列的极限并不总是相等的，因此也有必要除数列极限外进而討論函数的极限，并且函数极限存在时不但概括了上述数列极限的情形，而且往往还表示了几何上或物理上的重要概念。

以上所說的只是函数极限的一种情况，由于自变量变化过程可有各种不同的情况，从而也得出几种不同的函数极限，其中与数列极限相似的是

$$\lim_{x\to+\infty}f(x).$$

即函数 $f(x)$ 当 x 連續地沿数軸上升趋于无穷时的极限。这种极限与数列极限的不同点仅在于这里自变量 x 是連續上升的，而数列 $\{y_n\}$ 中的自变量 n 却只取正整数值，但二者同样是上升而趋于 $+\infty$ 的。

例如設放射性物质原有的质量为 $N(0)$，經过时間 t 后所剩的质量为 $N(t)$，那么 $N(t)$ 与时間 t 有着以下的关系：

$$N(t)=N(0)e^{-\lambda t}.$$

这里 λ 是正的常数，称为衰变常数。显然，不論从这个式子本身或从实际情况都可以看出，随着 t 的不断增加，$N(t)$ 可以任意地接近于零，亦即

$$\lim_{t\to+\infty} N(t)=0.$$

完全类似于 $y_n\to A$ 的情形，函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 表示：对任意的 $\varepsilon>0$，可以找到正数 X，当 x 落在无穷远点的左邻域 $O^-(\infty, X)$ 中时，$f(x)$ 的值落在 A 的邻域 $O(A, \varepsilon)$ 中。这里与数列不同的只是 x 和 X 是实数，而数列中的 n 和 N 只是正整数。由此，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 的严格定义不难仿照 $y_n\to A$ 的情形給出如下：

定义　若对任意給定的 $\varepsilon>0$，可得一正数 X，使 $x>X$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 的极限。記为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$。

特別当 $A=0$ 时，称 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时为一无穷小量，在下面各种情形中，当极限为零时，也都称为在該情况下，$f(x)$ 为一无穷小量，以后我們不再重复說明了。

从几何图形上看，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 通常有三种情况，見图 1-2-6，1-2-7，1-2-8，即 $f(x)$ 可能从某值后单調減少或单調增加地趋于 A。也可能在 $y=A$ 上下摆动或在此直綫一側上下摆动地趋于 A，但上面三个图形中，当 $x>X$ 时，$f(x)$ 的图形完全落在两直綫 $y=A+\varepsilon$ 和 $y=A-\varepsilon$ 之間，亦即

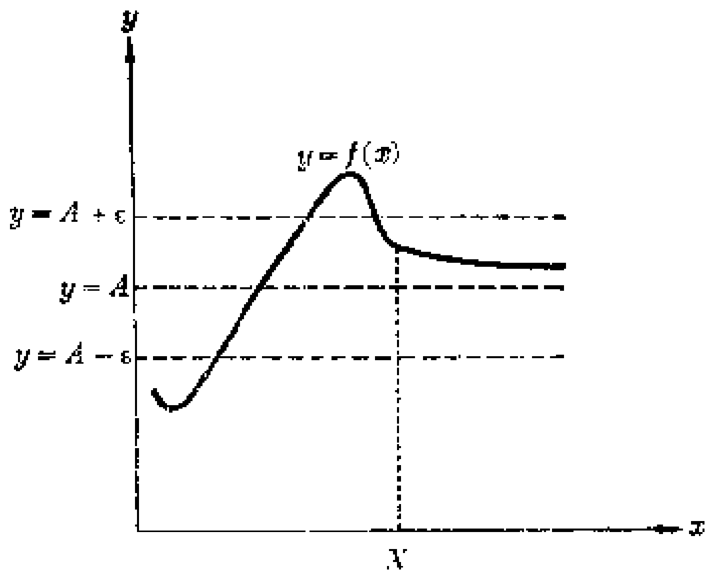


图　1-2-6

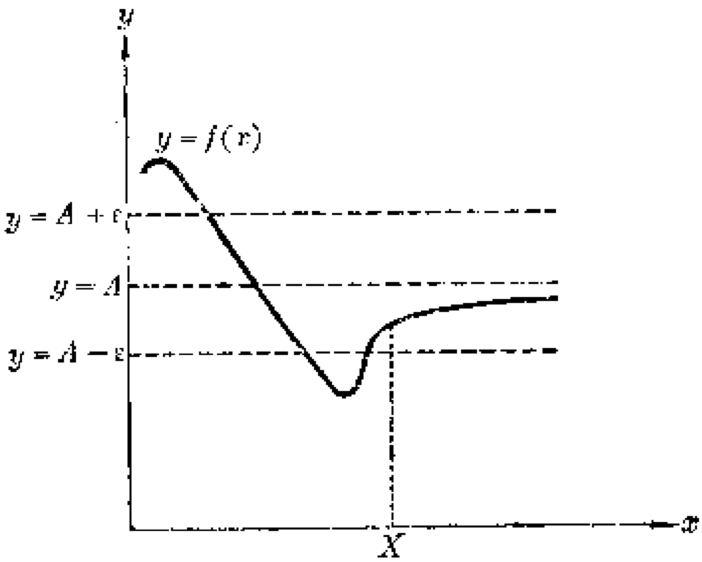


图 1-2-7

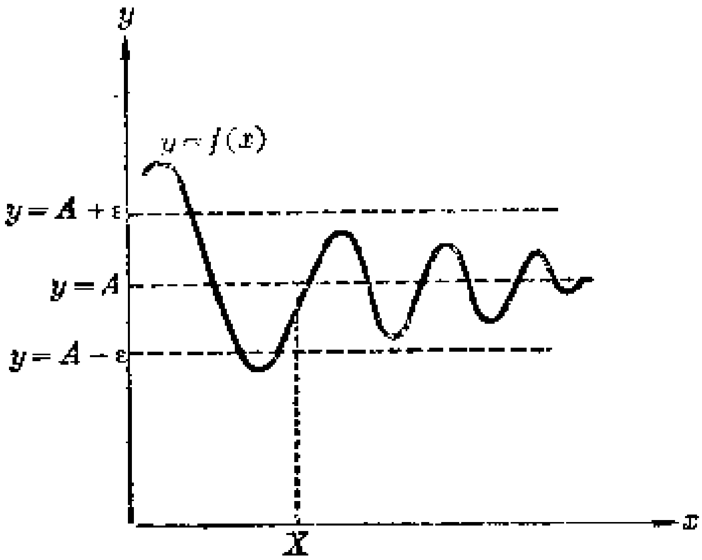


图 1-2-8

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon \text{ 或 } |f(x)-A|<\varepsilon.$$

完全类似地可以从数列的情况得到 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 为无穷大量、正无穷大量、负无穷大量，亦即

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

的情形，事实上，只要把上面定义中的 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 换成

$$|f(x)|>R,\quad f(x)>R,\quad f(x)<-R$$

就得到这三种无穷大量的定义，这里 R 是任意给定的一个正数。这

三个不等式的几何意义就是 $f(x)$ 落在无穷远点的邻域 $O(\infty, R)$、左邻域 $O^-(\infty, R)$ 和右邻域 $O^+(\infty, R)$ 中。

同样也可考虑 x 自某值无限下降而趋于 $-\infty$ 时 $f(x)$ 的极限：

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \quad (\infty,\ +\infty \text{ 或 } -\infty),$$

从数列的情形 $y_n\to-\infty$ 就知道，这时需要考虑无穷远点的右邻域 $O^+(\infty, X)$，因此只要把上面相应的极限和无穷大量的定义中的 $x>X$ 改成 $x<-X$ 就得到上面几种极限的定义。又对于

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad (\infty,\ +\infty \text{ 或 } -\infty)$$

几种情况也只要把 $x>X$ 换成 $|x|>X$ 就行了，亦即把无穷远点的左邻域 $O^-(\infty, X)$ 换成无穷远点的邻域 $O(\infty, X)$。例如：

定义 若对任意給定的正数 ε，可得正数 X，使 $x<-X$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么，称 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限为 A，記为 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$。也就是說，当 x 落在 $O^+(\infty, X)$ 中时，$f(x)$ 落在 $O(A, \varepsilon)$ 中。

定义 若对任意給定的正数 ε，可得正数 X，使 $|x|>X$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么，称 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限为 A，記为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$。亦即当 x 落在 $O(\infty, X)$ 中时，$f(x)$ 落在 $O(A, \varepsilon)$ 中。

由上面的定义和它們的几何意义显然可以看出当

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad (\infty,\ +\infty \text{ 或 } -\infty)$$

时，有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad (\infty,\ +\infty \text{ 或 } -\infty),$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \quad (\infty,\ +\infty \text{ 或 } -\infty).$$

反之，若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 都等于 $A(\infty, +\infty$ 或 $-\infty)$，

那么也有 $\lim_{x\to\infty} f(x)=A(\infty, +\infty$ 或 $-\infty)$，事实上，按照 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$ 和 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$ 的定义；对 $\varepsilon>0$，存在着 X_1 和 X_2，使

$$x>X_1 \text{ 时}, \ |f(x)-A|<\varepsilon$$

和

$$x<-X_2 \text{ 时}, \ |f(x)-A|<\varepsilon,$$

若取 $X=\max(X_1, X_2)$ 就得到

$$|x|>X \text{ 时}, \ |f(x)-A|<\varepsilon.$$

因此，$\lim_{x\to\infty} f(x)=A, \infty, +\infty$ 或 $-\infty$ 只不过是 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ 同时等于 $A, \infty, +\infty$ 或 $-\infty$ 的情形。

[例 1] 証明 $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+x}{x^2-2}=2$.

和数列的情形一样，从定义出发，只要証明能找到 X，使 $|x|>X$ 时，

$$\left|\frac{2x^2+x}{x^2-2}-2\right|<\varepsilon,$$

但 $|x|>\sqrt{2}$ 时 $\left|\dfrac{2x^2+x}{x^2-2}-2\right|=\dfrac{|x+4|}{|x^2-2|}\leqslant\dfrac{|x|+4}{|x|^2-2}$.

把右边的式子和数列 $\dfrac{n+4}{n^2-2}$ 一样予以放大，得到当 $|x|\geqslant 4$ 时

$$\frac{|x|+4}{|x|^2-2}<\frac{2|x|}{\frac{1}{2}|x|^2}=\frac{4}{|x|},$$

事实上，当 $|x|>4$ 时，$|x|+4>2|x|$，而只要 $|x|>2$ 时，就有 $|x|^2-2>\frac{1}{2}|x|^2$，因此当 $|x|>4$ 时，这两个不等式都成立，从而得到上面的不等式。由于 $|x|>\dfrac{4}{\varepsilon}$ 时

$$\frac{4}{|x|}<\varepsilon,$$

因之，只要取 $X=\max\left(4, \dfrac{4}{\varepsilon}\right)$ 即可。

从上面一些定义中的极限和邻域的对应关系，不难得到

$$\lim_{x\to c} f(x)=A$$

的意义，事实上，从 $x\to c$，我們应考虑点 c 的邻域 $O(c,\delta)$，因此这个极限的意义就是对 A 的任一邻域 $O(A,\varepsilon)$ 可找到 c 的一个邻域 $O(c,\delta)$，使 x 在 $O(c,\delta)$ 中而不等于 c 时，$f(x)$ 落在 $O(A,\varepsilon)$ 中。严格地說，我們有

定义　若对任意給定的 $\varepsilon>0$，可得 $\delta>0$，使当 $0<|x-c|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么称 $f(x)$ 在 c 点的极限为 A。

由于在定义中只要求正数 δ 存在，而未限定它的大小，所以函数在一点 c 的极限的情形只与它在这点邻近的性质有关，因而說极限是局部性质。

［例 2］　設 $s=t^3$，証明 $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{s(t)-s(1)}{t-1}=3$。

按照定义，要找这样的数 $\delta>0$，使 $0<|t-1|<\delta$ 时，

$$\left|\frac{s(t)-s(1)}{t-1}-3\right|<\varepsilon,$$

但　　　左端 $=\left|\dfrac{t^3-1}{t-1}-3\right|=|t^2+t-2|=|t+2|\,|t-1|$，

又由于我們不一定要找满足定义的最大的 δ，因此不妨只就 $t=1$ 的某一邻域来考虑，例如取 $|t-1|<1$，即 $0<t<2$，这时 $2<|t+2|<4$，于是

$$|t+2|\,|t-1|<4|t-1|,$$

而 $|t-1|<\dfrac{\varepsilon}{4}$ 时，上式右端就小于 ε，因此只要取 δ 等于 1 和 $\dfrac{\varepsilon}{4}$ 二数中最小的即可，亦即取

$$\delta=\min\left(1,\ \frac{\varepsilon}{4}\right).$$

与上例不同的是，这里是取 min 而非 max，这是因为当 $|t-1|$ 小

于1和$\frac{\varepsilon}{4}$中的最小数时，就有$|t-1|<1$和$|t-1|<\frac{\varepsilon}{4}$，因之，

$$|t+2||t-1|<4|t-1| \text{ 和 } 4|t-1|<\varepsilon$$

都能成立。

从这个例子还可以看到在定义中可以不考虑c点(亦即只考虑$0<|x-c|$的情形)的原因，也就是說，极限$\lim\limits_{x\to c}f(x)$是否存在和它等于什么值完全与$f(x)$在c点的值无关，甚至象上例中，极限$\lim\limits_{t\to 1}\frac{s(t)-s(1)}{t-1}=3$而这个函数在$t=1$时沒有意义，从瞬时速度的概念来看，这是很自然的，物体在$t=1$秒的瞬时速度是从1秒到t秒的平均速度当$t\to 1$时的极限，这里t是不能等于1的，"从1秒到1秒的平均速度"的說法是毫无意义的。从定义的几何意义来說，图1-2-9也就是当x在$O(c,\delta)$中而不等于c时，$f(x)$在直綫$y=A+\varepsilon$和$y=A-\varepsilon$之間，而不論$f(c)$本身是否等于A或是否有定义。

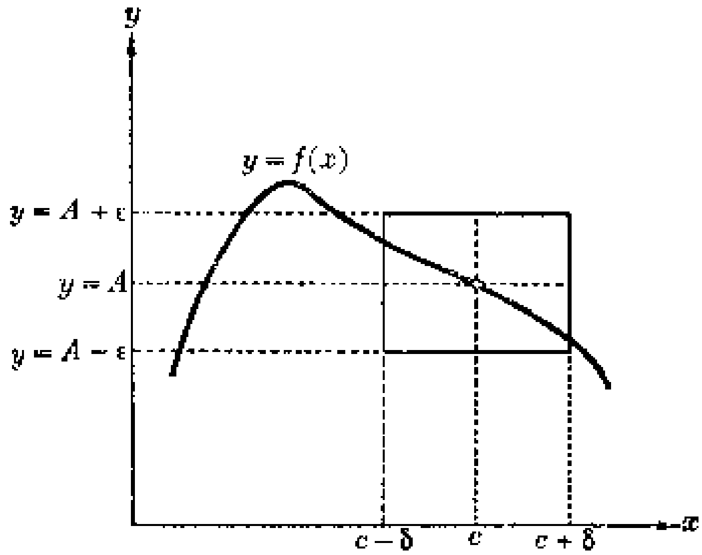


图 1-2-9

$\lim\limits_{x\to c}f(x)=A$也和$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$一样，是和另两种极限存在且同时等于$A$等价的，这两个极限是

$$\lim_{x\to c-0}f(x) \quad \text{和} \quad \lim_{x\to c+0}f(x),$$

它們的意义在本节开始时就已經說过了，前者表示x从小于c的某值上升而趋于c时$f(x)$的极限，后者表示x从大于c的某值下降而趋于c时$f(x)$的极限，因此只要把c点的邻域$O(c,\delta)$分别

用 c 点的左邻域 $O^-(c,\delta)$ 和右邻域 $O^+(c,\delta)$ 代替，就得到这两种极限的情形；亦即在 $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ 的定义中，将 $0<|x-c|<\delta$ 分别用不等式

$$0<c-x<\delta \text{ 和 } 0<x-c<\delta$$

代替，就得到 $\lim\limits_{x\to c-0}f(x)=A$ 和 $\lim\limits_{x\to c+0}f(x)=A$ 的定义。又由于对满足不等式 $0<|x-c|<\delta$ 的点 x，成立着不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 时，那么当 x 满足 $0<c-x<\delta$ 或 $0<x-c<\delta$ 时，这个不等式当然仍旧成立，因此，当 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=A$ 时，$\lim\limits_{x\to c-0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to c+0}f(x)$ 也存在而等于 A；反之当这两个极限存在且都等于 A 时，按定义，对 $\varepsilon>0$，存在着 δ_1，$\delta_2>0$，使

$$0<c-x<\delta_1 \text{ 时，} |f(x)-A|<\varepsilon$$

和

$$0<x-c<\delta_2 \text{ 时，} |f(x)-A|<\varepsilon.$$

現取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，那么，当 $0<|x-c|<\delta$ 时，即有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

也就是 $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ 也存在而等于 A。

由于 $\lim\limits_{x\to c-0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to c+0}f(x)$ 只考虑在 c 点左侧或右侧的值，因此称它們为单側极限，特别是前者又称为 $f(x)$ 在 c 点的左极限，后者称为右极限，有时也分别記它們为 $f(c-0)$ 和 $f(c+0)$。又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 也是单側极限。

完全类似地，可以对 $\lim\limits_{x\to c}f(x)$，$\lim\limits_{x\to c-0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to c+0}f(x)$ 为无穷大量（∞，$+\infty$ 或 $-\infty$）的情形給予严格的定义，这只要用不等式 $|f(x)|>R$，$f(x)>R$ 或 $f(x)<-R$ 代替 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 就行了，我們不再詳細叙述。

［例 3］　証明 $\lim\limits_{x\to-0}e^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to+0}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$。

先証明前者，仍从不等式

$$e^{\frac{1}{x}}<\varepsilon$$

出发来找定义中的 δ，两边取以 e 为底的对数，得

$$\frac{1}{x}<\log \varepsilon.$$

注意 $x\to-0$，因此只考虑負的 x 值；当 $\varepsilon\geqslant1$ 时，上面的不等式恒成立，此时 δ 可以任意选取，若 $\varepsilon<1$，由于 x，$\log \varepsilon$ 都是負的，以 $\frac{x}{\log \varepsilon}$ 乘不等式两边，仍保持不等号的方向，亦即

$$x>\frac{1}{\log \varepsilon} \quad 或 \quad 0<0-x<-\frac{1}{\log \varepsilon},$$

因此，取 $\delta=-\frac{1}{\log \varepsilon}$ 即可。

要証明 $\lim\limits_{x\to+0} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，我們从不等式

$$e^{\frac{1}{x}}>R$$

出发，当 $R\leqslant1$ 时，上面的不等式恒成立，δ 可以任意选取。当 $R>1$ 时，取对数后就知道当

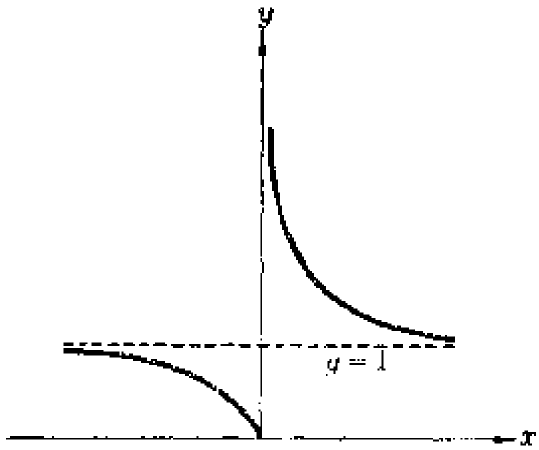


图 1-2-10

$0<x-0<\frac{1}{\log R}$ 时，上面的不等式成立，因此取 $\delta=\frac{1}{\log R}$ 即可。

这个函数 $y=e^{\frac{1}{x}}$ 的图形見图 1-2-10。

二、函数极限的性质、运算和两个判别准則

由于函数极限的情形和数列极限的情形完全相似，只是前者的自变量是連續变化的，而后者的自变量 n 只取正整数值，因此关于

$$x_n\to A \quad 或 \quad x_n\to\infty$$

的一些性质和运算一般也适用于

$$\lim_{x\to c} f(x),\ \lim_{x\to c+0} f(x),\ \lim_{x\to c-0} f(x),\ \lim_{x\to\infty} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(x),\ \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

等于 A 或为无穷大量的情形，并且証明也大体相同，只要把 $n>N$

改成相应的邻域 $0<c-x<\delta$, $0<x-c<\delta$ 等等即可，我們只列出这些性质和运算法则而不詳細叙述了。

首先定义函数的有界性。

定义　若存在正数 M，使 $f(x)$ 在某区間上滿足

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在此区間上是有界的。

定义　若存在数 $b(a)$，使 $f(x)$ 在某区間上滿足

$$f(x)\leqslant b\quad(f(x)\geqslant a),$$

则称 $f(x)$ 在此区間上是有上界的（有下界的），此时，称 $b(a)$ 为 $f(x)$ 在此区間上的上（下）界。

若 $f(x)$ 在某区間上既有上界亦有下界，则称 $f(x)$ 在此区間上是有界的。

这两个定义的等价性，完全类似于数列的情形，这里不再細述了。

下面只就 $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ 来叙述函数极限的性质和运算，其他的五种情形也完全相仿。这些性质都可相仿于数列极限性质来証明（参見习題 45, 46）。

性质 1　若 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to c}g(x)=B$，且 $A>B$，则存在 $\delta>0$，使当 $0<|x-c|<\delta$ 时，$f(x)>g(x)$.

性质 2　若 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to c}g(x)=B$ 且存在 $\delta>0$，使当 $0<|x-c|<\delta$ 时，$f(x)>g(x)$，则 $A\geqslant B$.

性质 3　若 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=A$ 而 $A>B$ $(A<B)$ 則存在 $\delta>0$，使当 $0<|x-c|<\delta$ 时，$f(x)>B$ $(f(x)<B)$.

性质 4　若 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to c}f(x)=B$，則 $A=B$.

这个性质說明了函数极限的唯一性。

性质 5　若存在 $\delta>0$，使当 $0<|x-c|<\delta$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$

$\leqslant h(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to c} h(x)=A$, 則 $\lim\limits_{x\to c} g(x)=A$.

性质 6 若 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=A$, 則存在 $\delta>0$, 使 $f(x)$ 在区間 $(c-\delta, c)$ 和 $(c, c+\delta)$ 内有界,亦即在不等式 $0<|x-c|<\delta$ 所表示的区間内有界。

就数列而言,我們知道,当 x_n 有极限时, x_n 一定有界;亦即存在 $M>0$, 使对任意的 n, 有 $|x_n|\leqslant M$. 但就函数的极限来說,由极限存在,只能断定在相应的某个邻域上,函数是有界的,而不能断定它在整个定义范圍内有界。例如

$$\lim_{x\to -0} e^{\frac{1}{x}}=0,$$

极限的确存在,由此也只能肯定 $e^{\frac{1}{x}}$ 在某一区間 $(-\delta, 0)$ 内有界,而不能說它在整个定义范圍内有界。事实上

$$\lim_{x\to +0} e^{\frac{1}{x}}=+\infty,$$

而对无穷大量,我們有完全相似的結果。

性质 6′ 若 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$ ($+\infty$ 或 $-\infty$), 則 $f(x)$ 在任意的区間 $(c-\delta, c)$ 或 $(c, c+\delta)$ 内无界。

因为若 $f(x)$ 在 $(c-\delta, c)$ 有界,亦即存在正数 M, 使在此区間内, $|f(x)|\leqslant M$; 那么,对大于 M 的正数 R, 我們将找不到 δ, 使当 $0<|x-c|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x)|>R,$$

亦即

$$\lim_{x\to c} f(x)\neq\infty.$$

除以上性质外,对数列来說,还有关于子列的定理,亦即,若 $x_n\to A$, 則 x_n 的任一子列也以 A 为极限。对函数极限来說,也有完全相似的性质。以

$$\lim_{x\to c-0} f(x)=A$$

为例，这个式子表示 x 沿数轴連續上升而趋于 c 时，函数值 $f(x)$ 的极限为 A；那么，当 x 以任何方式自 c 点的左方而趋于 c 时，$f(x)$ 也以 A 为极限。例如 x 取有理数上升而趋于 c 时，$f(x)$ 的极限为 A，我們記为

$$\lim_{r\to c-0} f(r)=A \quad (r\text{ 取有理数}).$$

这个式子表示：对給定的 $\varepsilon>0$，可得有理数 R，使适合不等式 $R<r<c$ 的任何有理数 r，函数值 $f(r)$ 滿足

$$|f(r)-A|<\varepsilon,$$

R 的存在很容易由 $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)=A$ 来証明；事实上，按照定义，可以得到实数 $X=c-\delta$，使当 $X<x<c$ 时

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

現在只要取 $[X, c)$ 中任一有理数为 R 即可。

这种形式的极限，在附录中定义 a^β 时还要用到，在那里，我們正是用

$$\lim_{r\to\beta} a^r$$

来定义实数 a 的无理数冪 a^β 的。因此，我們把这种极限特别提出。此外，当 $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)=A$ 时，x 还可以用各种方式单調上升地或忽大忽小地趋于 c，而 $f(x)$ 的极限仍然是 A，这里我們不多說了。下面只特别提出 x 取数列 x_n 而趋于 c 的情形，这时有下面的定理，它闡明了函数极限和数列极限之間的关系。

性质 7 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=A$（$A$ 为有限或 ∞）的充分必要条件为对任何以 c 为极限的数列 x_n，$x_n\neq c$，都有 $f(x_n)\to A$.

【証明】 下面只就 A 为有限时来証明，A 为无穷时証明也完全相似。

必要性：和証明子列的情形一样，从定义出发，由 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=A$，于是对任意的 $\varepsilon>0$，可得 $\delta>0$，当 $0<|x-c|<\delta$ 时，

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

但由于 $x_n\to c$，故对 $\delta>0$，又可得正整数 N，使 $n>N$ 时

$$|x_n-c|<\delta,$$

因为 $x_n\neq c$，故上面的不等式可改写为

$$0<|x_n-c|<\delta,$$

而适合这个不等式的 x_n，其函数值 $f(x_n)$ 适合

$$|f(x_n)-A|<\varepsilon,$$

亦即当 $n>N$ 时，这个不等式成立，这也就說明了数列 $\{f(x_n)\}$ 以 A 为极限。

充分性：用反証法。若 $\lim\limits_{x\to c}f(x)\neq A$，则对某一个 $\varepsilon>0$，不能找到函数极限定义中的 δ，也就是对任意的 $\delta>0$，都可以找到一点 x，$0<|x-c|<\delta$，使 $|f(x)-A|\geqslant\varepsilon$；特别若取 δ 为 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$，得到 $x_1, x_2, x_3, \cdots$，适合

$$0<|x_1-c|<1,\qquad |f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon,$$

$$0<|x_2-c|<\frac{1}{2},\qquad |f(x_2)-A|\geqslant\varepsilon,$$

$$0<|x_3-c|<\frac{1}{3},\qquad |f(x_3)-A|\geqslant\varepsilon,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

从左边一列可以看出 $x_n\to c$，$x_n\neq c$，而右边一列却說明数列 $f(x_n)$ 不以 A 为极限，与假設矛盾。充分性得証。

用这个定理可以証明某些函数的极限不存在或不为无穷大量。

[例 4] $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时极限不存在。

因为取 $x_n=1\Big/\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$时，则 $x_n\to 0$，$x_n\neq 0$，而 $f(x_n)\equiv 1$，其极限也就等于 1；但若取 $x_n=1\Big/\left(2n\pi-\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x_n)\equiv -1$，

因此，$f(x_n)\to -1$；这就説明了 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在；事实上，若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在而等于 A，那么由前一数列得到 $A=1$，而由后一数列得 $A=-1$，这是不可能的。

当然，更简单地，还可取 $x_n=1\Big/\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$，则 $f(x_n)$ 本身就无极限，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的函数极限不存在。

对 $x\to +0$，$x\to -0$，$x\to +\infty$，$x\to -\infty$，$x\to\infty$ 等情形，也有完全类似的定理（参見习题 47, 48）。在例 4 中取的数 x_n 都是正数，因此它也説明了 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的右极限不存在。

本节开始时所提的瞬时速度的問題，至此完全得到了解决。因在例 2 中已証明 $s=t^3$ 在 $t=1$ 时函数 $v(t)$ 的极限为 3，因此当 t 取任一数列而趋于 1 时，这函数的极限也是 3. 又从例 4 我們还看到函数极限和自变量取数列时所成的数列极限并不总是相等的，也有可能后者存在而前者不存在。

[例 5] $f(x)=x\sin x$，当 $x\to +\infty$ 时无极限亦不是无穷大量。

事实上，取 $x_n=\frac{n\pi}{2}$ 时，$\{f(x_n)\}$ 为

$$\frac{\pi}{2},\ 0,\ -\frac{3\pi}{2},\ 0,\ \frac{5\pi}{2},\ 0,\ -\frac{7\pi}{2},\ 0,\ \cdots,$$

这个数列无极限，也不是无穷大量。

下面只列出函数极限的运算法則，証明也完全和数列的情况相似，此处不詳細叙述了（参見习题 50）。又虽然我們只对 $x\to c$ 的情况列出运算法則，但它們对其他类型的函数极限也是完全适用的。

运算法則 1 若 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to c} g(x)=B$，则

$$\lim_{x\to c}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B,\ \lim_{x\to c} f(x)g(x)=AB,\ \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B},$$

在商的情况下，要求 $B\neq 0$。

运算法則2　若 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$, $g(x)$ 在某区間 $(c-\delta, c)$, $(c, c+\delta)$ 有界,那么, $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x)=0$.

运算法則3　若 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$, 則 $\lim\limits_{x\to c}\frac{1}{f(x)}=0$;又若 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$, 且在某区間 $(c-\delta, c)$, $(c, c+\delta)$, $f(x)\neq 0$, 那么, $\lim\limits_{x\to c}\frac{1}{f(x)}=\infty$.

[例 6]　$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$.

事实上, x 是无穷小量, $\sin\frac{1}{x}$ 是有界量,从运算法則 2 卽得。

[例 7]　設 $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$, m, n 为非負整数,則

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } m=n \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } m>n \text{ 时},\\ \infty, & \text{当 } m<n \text{ 时}.\end{cases}$$

事实上,当 $m=n$ 时,上下各用 x^n 除,得到

$$\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\frac{a_0+a_1\frac{1}{x}+\cdots+a_n\frac{1}{x^n}}{b_0+b_1\frac{1}{x}+\cdots+b_n\frac{1}{x^n}},$$

因为 $x\to\infty$, 由运算法則 3, 得到 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, 再由运算法則 2, 得到

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,\ \cdots,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{n-1}}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

以及

$$\lim_{x\to\infty}a_1\frac{1}{x}=0,\ \cdots,\ \lim_{x\to\infty}a_n\frac{1}{x^n}=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}b_1\frac{1}{x}=0,\ \cdots,\ \lim_{x\to\infty}b_n\frac{1}{x^n}=0,$$

最后从运算法则 1 得出所求极限为 $\frac{a_0}{b_0}$.

当 $m>n$ 时，用 x^m 除分子分母，和上面一样討論，就知道极限为 0.

当 $m<n$ 时，从

$$\frac{a_0x^n+\cdots+a_n}{b_0x^m+\cdots+b_m}=1\Big/\left(\frac{b_0x^m+\cdots+b_m}{a_0x^n+\cdots+a_n}\right)$$

而右端分母极限为 0，由运算法则 3 即得。

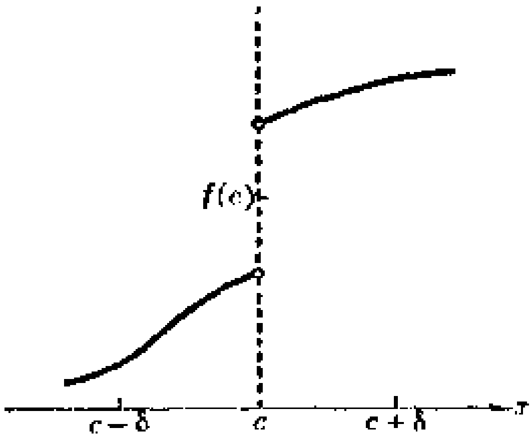


图　1-2-11

在上一节（§ 3）中，我們已經知道了数列极限存在的两个判別准則——柯西的收斂原理（即完备性定理）和单調有界数列必有极限。这里，对函数的情形也有类似的定理。但要注意，下面的关于单調有界的定理，只对单側极限成立。例如图 1-2-11 中所給出的函数 $y=f(x)$，它虽然在 $(c-\delta, c+\delta)$ 內单調有界，但在 $x=c$ 点却无极限。

定理 1　若 $f(x)$ 在 c 点的某一左邻域 $(c-\delta, c)$ 內单調，并且有界，那么 $\lim\limits_{x\to c-0}f(x)$ 存在。又对其他的单側极限 $\lim\limits_{x\to c+0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 也有类似的情形。

这个定理的証明和数列的情形一样，只要証明 $f(x)$ 在这邻域內的上确界或下确界就是它的极限即可（参見习題 69）。

定理 2（完备性定理）　$\lim\limits_{x\to c}f(x)$ 存在的充分必要条件为对任意的 $\varepsilon>0$，可得 $\delta>0$，使适合不等式

$$0<|x'-c|<\delta,\quad 0<|x''-c|<\delta$$

的任意两点，其函数值 $f(x')$，$f(x'')$ 满足不等式

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

【証明】 必要性的証明完全与数列的情况相似，这里从略；現只証明充分性。

由定理条件，对 $\varepsilon>0$，可得 $\delta>0$，使

$$0<|x'-c|<\delta,\quad 0<|x''-c|<\delta$$

时，恒有 $$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

現任选数列 $\{x_n\}$ 适合 $x_n\to c$，$x_n\neq c$，于是对 $\delta>0$，可得正整数 N，使 $n>N$ 时，

$$0<|x_n-c|<\delta,$$

因之，对任意的正整数 p，当 $n>N$ 时，也有

$$0<|x_{n+p}-c|<\delta,$$

于是 $$|f(x_n)-f(x_{n+p})|<\varepsilon,$$

从数列的完备性定理，知道数列 $\{f(x_n)\}$ 收斂，設它的极限为 A。从 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$ 和 $x_n\to c$，$x_n\neq c$，知道有适当大的、固定的正整数 N，使

$$|f(x_N)-A|<\varepsilon \text{ 和 } 0<|x_N-c|<\delta$$

同时成立，那么从后一式和 δ 的选取，当

$$0<|x-c|<\delta$$

时，就有(这里把 x 和 x_N 看作上面的 x' 和 x'')

$$|f(x)-f(x_N)|<\varepsilon,$$

于是当 $0<|x-c|<\delta$ 时，

$$|f(x)-A|\leqslant|f(x)-f(x_N)|+|f(x_N)-A|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

因此对任意的正数 2ε，可以找到函数极限定义中的 δ，这就証明了 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=A$。

对于其他形式的极限，也有完全相似的定理(参見习題 88)。

三、两个常用的不等式和两个重要的极限

1．对任意的 x，恒成立着不等式 $|\sin x|\leqslant|x|$，又当 $-\frac{\pi}{2}<x$

$<\frac{\pi}{2}$ 时，$|x| \leqslant |\operatorname{tg} x|$；在这两个不等式中，等号只在 $x=0$ 时成立。

【証明】 作单位圆如图 1-2-12，設圓心角 $\angle AOC$ 为一銳角，其弧度为 x，由于 $\triangle AOB$ 的面积 $<$ 扇形 AOB 的面积 $<\triangle AOC$ 的面积，而从几何上，这三个面积分别等于 $\frac{1}{2}\sin x$，$\frac{1}{2}x$ 和 $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$，因此，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，証明了

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x$$

或

$$|\sin x|<|x|<|\operatorname{tg} x|.$$

又当 $-\frac{\pi}{2}<x<0$ 时，$0<-x<\frac{\pi}{2}$，由上得到，

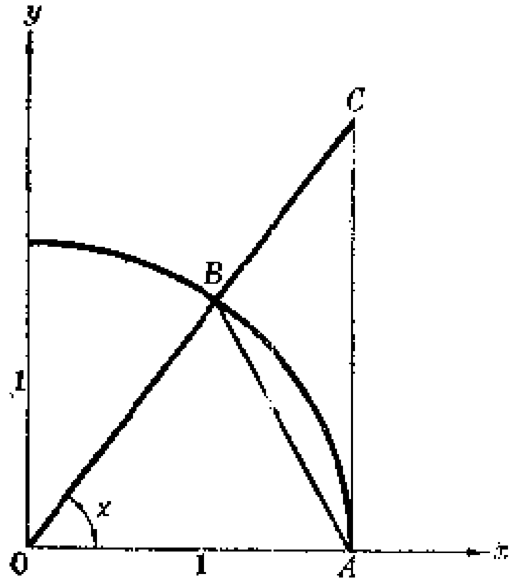


图 1-2-12

$$\sin(-x)<-x<\operatorname{tg}(-x) \quad 或 \quad -\sin x<-x<-\operatorname{tg} x,$$

亦即当 $-\frac{\pi}{2}<x<0$ 时，也証明了

$$|\sin x|<|x|<|\operatorname{tg} x|,$$

所以这个不等式当 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ 时恒成立。但 $|x|\geqslant\frac{\pi}{2}$ 时

$$|\sin x|\leqslant 1<\frac{\pi}{2}\leqslant|x|.$$

这就完全証明了結論。

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

事实上，用 $|\sin x|$ 除不等式 $|\sin x|<|x|<|\operatorname{tg} x|$ 的各項，并由于 $\frac{x}{\sin x}$ 和 $\cos x$ 在 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ 时为正，因此当 $x\neq 0$ 时，

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x} \quad 或 \quad 1>\frac{\sin x}{x}>\cos x,$$

因之

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\leqslant 2\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{1}{2}x^2,$$

而当 $x\to 0$ 时，右端趋于 0，所以中間各項也趋于零，特别是

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)=0 \text{ 或 } \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

附带我們还証明了

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1.$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

先討論 $x\to+\infty$ 的情形。因 $[x]\leqslant x<[x]+1$，故

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)<\left(1+\frac{1}{x}\right)\leqslant\left(1+\frac{1}{[x]}\right)$$

而
$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1},$$

但由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$，而 $x\to-\infty$ 时，$[x]$ 取正整数值而趋于 $+\infty$，故从

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\Big/\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right\}=\frac{e}{1}=e$$

和
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e$$

得到

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}=e \text{ 和 } \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}=e,$$

由极限性质 5 即得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

剩下的是証明

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,$$

作代换 $x=-y$，则

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}$$

$$=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right),$$

但当 $x\to-\infty$ 时，$y-1\to+\infty$，上式右端以 e 为极限，所以左端也以 e 为极限，証毕。

§5 連續函数

一、連續函数和不連續函数

在数学分析中，要研究种种不同性质的函数，其中有一类重要的函数，就是連續函数。

"連續"与"間断"（或不連續）照字面上来讲，是不难理解的。例如图 1-2-13 中的函数 $y=f(x)$，我們說它是連續的，而图 1-2-14

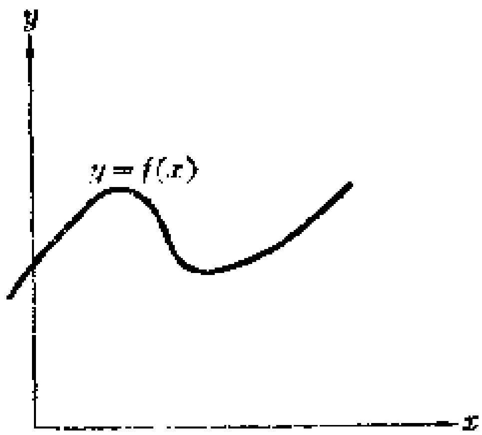


图 1-2-13

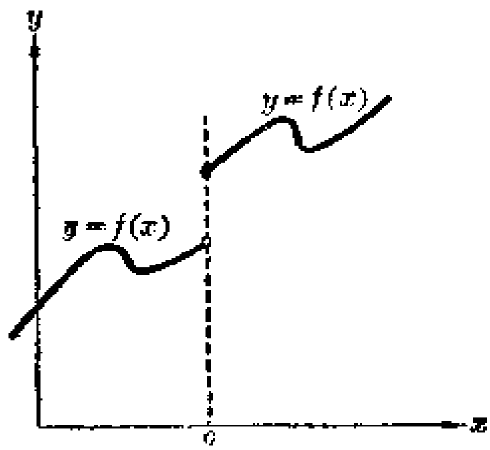


图 1-2-14

中的函数在 c 点是間断的。又如考虑第一章中冰融化前后，从 $-10°C$ 到 $10°C$，热量随温度 t 变化的情形，当 t 从 $-10°C$ 增加到 $0°$ 时，Q 由零增加到 5 卡，而当 t 超过 $0°C$ 时，Q 陡然增加到 85 卡，因此函数

$$Q=Q(t)=\begin{cases}0.5t+5, & \text{当 } -10\leqslant t\leqslant 0 \text{ 时},\\ t+85, & \text{当 } 0<t\leqslant 10 \text{ 时};\end{cases}$$

在 $t=0$ 时是間断的，亦卽不連續的；而在其他的 t 値，它是連續的，从图 1-1-2 也可以看到。

我們不难举出大量的連續或不連續的函数，例如 $y=\sin x$ 在每点 x 都連續，而 $y=[x]$ 在所有整数点都不連續，但究竟怎样才叫連續呢？单从图形上看是不行的，有这样的每点都連續而在图形上却无法表示出来的函数。图形只能帮助我們更形象化地理解这一概念，而为了对它作进一步的分析和研究，还必須給“連續”以确切的定义。

所謂函数是連續的，它是指因变量随自变量变化的情形而言，以 $s=t^3$ 为例，它表示出物体所經的距离 s 随时間 t 的变化关系，可以看出，此时 s 是随时間 t 而連續变化的。就 $t=1$ 秒来說，此时 $s=1$ 米，当 t 愈接近于 1 秒时，s 也愈接近于 1 米；而不是当 t 小于 1 秒时，s 小于某数例如 0.5 米，当 t 达到 1 米时，它从 0.5 米陡然增加到 1 米，或是当 t 刚超过 1 秒时，s 从 1 米陡然增加到 2 米或陡然減少到 0.1 米。就前面讲过的热量随温度变化的情形来說，恰好有这种情形；在 t 小于 0° 而趋于 0 这个値时，虽然 Q 也趋于 $Q(t)$ 在 $t=0$ 时的値 5 卡，但 t 一旦超过 0° 时，Q 立刻增加到 85 卡，这說明在 $t=0°$ 时，Q 不是随 t 連續变化的，而发生了跳跃。因之粗糙地說，函数 $y=f(x)$ 在点 c 是連續的，也就是說当自变量改变（与 c 的差）很小时，因变量的变化（与 $f(c)$ 的差）也很小；亦卽当 x 愈接近于 c 时，$f(x)$ 愈接近于 $f(c)$ 这个値。把这个概念写成严格的数学形式，就是：

定义 若对任意給定的 $\varepsilon>0$，可得 $\delta>0$，使当 $|x-c|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-f(c)|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在点 c 連續。

定义　若 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$，亦即函数在点 c 的极限等于它在这点的函数值，那么称 $f(x)$ 在点 c 連續。

从函数极限的定义可以看出，以上两个定义显然是等价的，只不过 $f(c)$ 代替了那里的 A。在定义中不应再要求 $0<|x-c|$（也就是 $x\neq c$），因为就連續而言，$f(c)$ 在点 c 必須有定义，拿 $s=t^3$ 从 1 秒到 t 秒的平均速度 $\bar{v}(t)$ 来說，显然它在 $t=1$ 时的极限是 3，但它在 $t=1$ 时沒有意义，从图 1-2-15 上来看也剛好有一个空隙，这里我們认为它在 $t=1$ 是不連續的。因此总的說来，函数在点 c 連續的要求是：1) $f(x)$ 在点 c 有定义，2) $f(x)$ 在点 c 的函数极限 $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ 存在，3) $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$。任何一条不滿足，$f(x)$ 在点 c 就不連續。可見函数在某点是否連續，是函数在这点的局部性质。同时我們不能仅从直观上来理解它的图形在这一点是否"断开"，而应該按定义来判断它（参見习題 59(9)）。

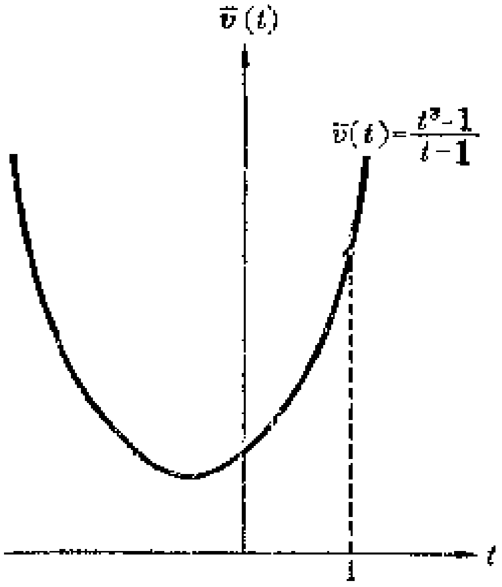


图　1-2-15

下面我們給出函数 $f(x)$ 在某一区間上連續的意义：若函数 $f(x)$ 在开区間 (a, b) 内每一点連續，也就是說，对 (a, b) 内任何一点 c 均成立着

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c),$$

则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内連續。对闭区間 $[a, b]$ 来說，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續的意义是指：$f(x)$ 在 (a, b) 内連續，同时有

$$f(a+0)=f(a),\quad f(b-0)=f(b).$$

也就是說，函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内每一点連續，而在端点 a, b 分别存在着右、左极限，并且其极限值各为 $f(a), f(b)$.

若一个函数 $f(x)$ 在点 c 成立着 $f(c-0)=f(c)$，则称此函数在点 c 为左連續。若成立着 $f(c+0)=f(c)$，則称此函数在点 c 为右連續，于是立即知道，函数 $f(x)$ 在点 c 連續的充要条件为函数在此点既是左連續也是右連續。

[例 1] $\sin x$, $\cos x$ 在任意一点 c 是連續的，也就是在$(-\infty, +\infty)$内連續。

【証明】 由于

$$|\sin x-\sin c|=2\left|\cos\frac{x+c}{2}\right|\left|\sin\frac{x-c}{2}\right|\leqslant 2\cdot 1\cdot\frac{|x-c|}{2},$$

因此若取 $\delta=\varepsilon$（任意給定的正数），就得到当 $|x-c|<\delta$ 时，上式左端小于 ε，即 $\sin x$ 在点 c 連續。同理可証 $\cos x$ 的連續性。

[例 2] 当 p 是正整数时，x^p 在任意一点 c 連續，即在$(-\infty, +\infty)$内連續。

【証明】 由于

$$\begin{aligned}|x^p-c^p|&=|x-c|\,|x^{p-1}+cx^{p-2}+\cdots+c^{p-1}|\\&\leqslant|x-c|(|x|^{p-1}+|c|\,|x|^{p-2}+\cdots+|c|^{p-1}),\end{aligned}$$

象函数极限的情形一样，不妨就 $|x-c|<|c|$ 所表示的区間来考虑，这时从 $|x-c|\geqslant|x|-|c|$，得到 $|x|\leqslant 2|c|$，因之上式右端小于

$$\begin{aligned}&|x-c|(2^{p-1}|c|^{p-1}+2^{p-2}|c|^{p-1}+\cdots+|c|^{p-1})\\&<2^p|c|^{p-1}|x-c|,\end{aligned}$$

于是只要 $|x-c|<\varepsilon/2^p|c|^p$，上式右端就小于 ε，所以取

$$\delta=\min(|c|,\ \varepsilon/2^p|c|^{p-1})$$

即可。但当 $c=0$ 时，必須另行討論：这时由

$$|x^p-c^p|=|x|^p=|x-c|^p,$$

因此取 $\delta=\varepsilon^{\frac{1}{p}}$ 即可。

二、連續函数的运算和基本初等函数的連續性

由极限的运算立即得到下面的定理。

定理 1　若 $f(x)$，$g(x)$ 都在点 c 連續，則

$$f(x)\pm g(x),\quad f(x)g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

也在点 c 連續；但对商的情形，必須設 $g(c)\neq 0$。

以 $f(x)g(x)$ 为例，由于

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c),\quad \lim_{x\to c} g(x)=g(c),$$

由极限的运算法則即得

$$\lim_{x\to c} f(x)g(x)=f(c)g(c),$$

即 $f(x)g(x)$ 在点 c 的极限等于它在这点的函数值。

由这个定理和 $\sin x$，$\cos x$ 的連續性知道

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x},\quad \operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x},\quad \sec x=\frac{1}{\cos x},\quad \csc x=\frac{1}{\sin x}$$

在分母不为零的点都是連續的，也就是在它們的定义范圍内的每一点都連續。

又：两个不連續函数或者一个連續一个不連續的函数的和、积、商是否仍旧連續呢？請讀者考慮(参見习題 63，64)。

反三角函数的連續性由下面的定理即得，但这个定理要到下一节(§ 6)再証明。

定理 2　設 $f(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 是严格增加(減少)且在每点連續的，又 $f(a)=\alpha$，$f(b)=\beta$，則在区間 $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ 上，存在着 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$，它在这区間上也是单調增加(減少)和連續的。

从这个定理可知反三角函数也是在它們的定义范圍内連續的，以 $y=\operatorname{arc\,tg} x$ 为例。我們任取一个小于 $\pi/2$ 的正数 δ，由于 $\operatorname{tg} x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}+\delta,\ \frac{\pi}{2}-\delta\right]$ 上严格上升且在每点連續，因此 $\operatorname{arc\,tg} y$

在$\left[\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}+\delta\right), \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\right]$上严格上升且在每点連續，但$\delta$是任意的，所以对任意的点$y_0$，恒可取$\delta$充分小，使$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}+\delta\right)<y_0<\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)$，由是 arc tg y 在$(-\infty, \infty)$中任意一点y_0連續。也就是 arc tg x 在$(-\infty, \infty)$中每点x連續。

同样，由于x的正整数次幂x^p在$[0, R]$是严格单調的，并且在每点連續，因之$x^{\frac{1}{p}}$在$[0, R^p]$上是連續且严格单調的，这里R是任意給定的正数。由R的任意性即知$x^{\frac{1}{p}}$在$[0, +\infty)$是連續的。

定理3 若$u=g(x)$在点x_0連續，$g(x_0)=u_0$，而$y=f(u)$在点u_0連續，那么复合函数$y=f(g(x))$在点x_0連續。

【証明】 按定义要証明对任意的$\varepsilon>0$，可得$\delta>0$，使$|x-x_0|<\delta$时，

$$|f(g(x))-f(g(x_0))|<\varepsilon,$$

現在，先对$\varepsilon>0$，得到$\eta>0$，使$|u-u_0|<\eta$时，

$$|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon \text{ 或 } |f(u)-f(g(x_0))|<\varepsilon,$$

由于$f(u)$在点u_0連續，这样的η是一定存在的。其次，由于$g(x)$在点x_0連續，对这个η，又可得$\delta>0$，使$|x-x_0|<\delta$时，

$$|g(x)-g(x_0)|<\eta \text{ 或 } |g(x)-u_0|<\eta,$$

但从这个不等式和η的选取，即得

$$|f(g(x))-f(g(x_0))|<\varepsilon.$$

証明函数的連續性时，常常要用这个定理，甚至象$x^{\frac{p}{q}}$和$\sin x^2$这样簡单的函数，也以用这个定理去証明它們的連續性比較簡便。这里我們設p, q是两个互质的正整数，将

$$y=x^{\frac{p}{q}}=(x^p)^{\frac{1}{q}}$$

看成复合函数

$$y=u^{\frac{1}{q}}, \quad u=x^p,$$

由于 $u=x^p$ 在 $[0+\infty)$ 中每一点連續，而其值域是 $[0, +\infty)$，但 $y=u^{\frac{1}{q}}$ 在 $0\leqslant u<+\infty$ 中每点連續，由定理就得到 $x^{\frac{p}{q}}$ 在 $[0, +\infty)$ 連續。

对 x 的負有理数冪 $x^{-\frac{p}{q}}$，从 $x^{-\frac{p}{q}}=1/x^{\frac{p}{q}}$，由定理 1 知道 $x^{-\frac{p}{q}}$ 在 $(0, \infty)$ 内每一点連續。由是，我們得出了 x 的有理数冪 x^r 当 $r>0$ 时在 $[0, \infty)$ 中每一点連續，当 $r<0$ 时，在 $(0, \infty)$ 内每一点連續。至于 $x<0$ 的情况，可由函数 x^r 的奇偶性来討論。

关于基本初等函数的連續性，現在只剩下 a^x，$\log_a x$ 和 x^α (α 为无理数) 沒有討論了。我們先从 a^x 的单調性和它的一些性质来証明它的連續性，暫設 $a>1$，則当 $x>0$ 时，$a^x>1$，又由 $\frac{1}{x}\geqslant\left[\frac{1}{x}\right]$ 得到 $x\leqslant 1\Big/\left[\frac{1}{x}\right]$，于是当 $x>0$ 时，

$$1<a^x\leqslant a^{1/\left[\frac{1}{x}\right]},$$

但当 $x\to+0$ 时，$\frac{1}{x}\to+\infty$，而 $\left[\frac{1}{x}\right]$ 取正整数值而趋于 $+\infty$，因此由 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$ 得到 $\lim\limits_{x\to+0} a^{1/\left[\frac{1}{x}\right]}=1$，因之

$$\lim_{x\to+0} a^x=1.$$

对 $\lim\limits_{x\to-0} a^x$，可作代换 $x=-y$，則 $x\to-0$ 时，$y\to+0$，而

$$\lim_{x\to-0} a^x=\lim_{y\to+0} a^{-y}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to+0} a^y}=1,$$

即
$$\lim_{x\to0} a^x=1.$$

由此可証 a^x 在任一点 c 的連續性，事实上，从

$$a^x-a^c=a^c(a^{x-c}-1)$$

当 $x\to c$ 时，$x-c\to0$ 而 $a^{x-c}\to1$，因之上式右端趋于零，亦即

$$\lim_{x\to c} a^x=a^c.$$

現在設 $a<1$，令 $a=\frac{1}{b}$，那么 $b>1$，而

$$a^x=\left(\frac{1}{b}\right)^x=\frac{1}{b^x},$$

由于 b^x 在 $(-\infty,\infty)$ 内每点連續且不为零，所以 a^x 亦在 $(-\infty,\infty)$ 内每点連續。

由 a^x 的单調性和連續性，利用定理 2 就得到 $\log_a x$ 在它的定义范圍内每点連續。最后，利用对数函数性质，可写

$$y=x^\alpha=e^{\alpha\ln x},$$

因之可把 x^α 看成复合函数

$$y=e^u,\ u=\alpha\ln x,$$

由定理 3 即知 x^α 在它的定义范圍 $(0,\infty)$ 内每点連續。

綜上所述，我們得到

定理 4 一切基本初等函数在其定义范圍内是連續的。

定理 3 説明了复合函数的連續性，它的結論也可以写成

$$\lim_{x\to x_0}f(g(x))=f(g(x_0))=f(\lim_{x\to x_0}g(x)).$$

也就是說，若 $f(u)$，$g(x)$ 連續，那么极限号 $\lim\limits_{x\to x_0}$ 可以与函数符号 f 互换，实际上如果并不要求 $f(g(x))$ 在点 x_0 連續，而只要求极限号可以从 f 之外搬到 f 内，并不一定要 f，g 都連續。完全类似于定理 3 的証明，可以証得下面的复合函数的极限运算的定理。

定理 5 若滿足下列两条件之一：

1) $f(u)$ 在 u_0 連續，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，

2) $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，但在 x_0 的某一邻域 $(x_0-\delta,x_0)$，$(x_0,x_0+\delta)$ 内，$g(x)\neq u_0$，那么

$$\lim_{x\to x_0}f(g(x))=\lim_{u\to u_0}f(u).$$

特别在 1) 的条件下，此式又可写为

$$\lim_{x\to x_0}f(g(x))=f(\lim_{x\to x_0}g(x)),$$

由此可知，要函数符号 f 和极限号可以交换，只要 f 是連續函数也就行了。

又对于 $x\to\infty$，$u\to\infty$ 或 A 为 ∞ 的情形，也有类似的定理。

这个定理具有很重要的意义，我們从前时常对自变量作代换来求极限，其实是基于这个定理的。例如求 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))$ 时，作代换 $u=g(x)$，而由 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，把求 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))$ 的問題，化为求极限 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)$。但这样作代换，并不是永远通行无阻的，还必須注意本定理的条件（参見习題 53，54，55，56）。

［例 3］ 設

$$y=f(u)=\begin{cases}0, & \text{当 } u=0 \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } u\neq 0 \text{ 时};\end{cases}\qquad u=g(x)=x\sin\frac{1}{x}.$$

此时 $f(g(x))$ 当 $x=1/n\pi$ $(n=\pm1, \pm2, \cdots)$，其值为零，而在其他点，其値为 1，显然，$\lim\limits_{x\to 0} f(g(x))$ 不存在。

但若在討論 $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x))$ 时，作代换 $u=g(x)$，而从

$$\lim_{x\to 0} g(x)=0 \quad 和 \quad \lim_{u\to 0} f(u)=1$$

来断定

$$\lim_{x\to 0} f(g(x))=\lim_{u\to 0} f(u)=1$$

就是錯誤的。

利用这个定理，下面再証明几个重要的极限，它們都是常常用到的。

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^x=e^\alpha$ （α 为不等于零的常数）。

事实上，由于

$$\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x=\left[\left(1+\frac{1}{x/\alpha}\right)^{\frac{x}{\alpha}}\right]^\alpha,$$

从

$$y=\left(1+\frac{1}{u}\right)^u,\quad u=\frac{x}{\alpha}$$

及 $x\to\infty$ 时 $u\to\infty$ 得到（此时，条件 2）自然滿足）

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/\alpha}\right)^{\frac{x}{\alpha}}=e,$$

又由
$$y=u^{\alpha},\ u=\left(1+\frac{1}{x/\alpha}\right)^{\frac{x}{\alpha}}$$
及条件1) 得到所求极限为 e^{α}。

2. $\lim_{x\to0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}=e^{\alpha}$.

因为
$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}=\left(1+\frac{\alpha}{1/x}\right)^{\frac{1}{x}},$$
由
$$y=\left(1+\frac{\alpha}{u}\right)^{u},\ u=\frac{1}{x}$$
以及 $x\to0$ 时，$u\to\infty$，从条件2) 即得。

3. $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}=\alpha$.

由
$$y=\ln u,\ u=(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}$$
及条件1) 即得。

三、不連續点的类别及其求法

由連續函数的定义可知，$f(x)$ 在点 c 連續必須

1) $f(x)$ 在点 c 有定义，

2) $f(c+0)$，$f(c-0)$ 都存在，

3) $f(c+0)=f(c-0)=f(c)$，

不满足任一条件，$f(x)$ 在点 c 就不連續，因此，不連續有下列几种情况：

1. $f(c+0)$，$f(c-0)$ 存在，但不相等，此时称 c 为 $f(x)$ 的第一类不連續点。

以第一段所說的热量随温度变化的情形 $Q=Q(t)$ 为例，由于
$$\lim_{t\to-0}Q(t)=5,\quad \lim_{t\to+0}Q(t)=85,$$
故 $Q(t)$ 在 $t=0$ 有第一类不連續点。又如

$$y=[x]$$

在所有的整数点 N 有第一类不連續点，因为

$$\lim_{x\to N-0}[x]=N-1,\quad \lim_{x\to N+0}[x]=N。$$

由本章 §4 的定理 1 推知，閉区間上的单調函数只有第一类不連續点(参見习題 69)。

2. $f(c+0)$ 与 $f(c-0)$ 中至少有一不存在，此时称 $f(x)$ 在点 c 有第二类不連續点。

例如 $y=\sin\frac{1}{x}$ 和 $y=e^{\frac{1}{x}}$ 在 $x=0$ 都有第二类不連續点，前者的左、右极限都不存在，后者左极限存在而右极限为 ∞。

3. $f(c+0)=f(c-0)$ 亦即 $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ 存在，但它不等于 $f(c)$ 或 $f(x)$ 在点 c 沒有定义。这时称 c 为第三类不連續点。

例如 $\bar{v}(t)=\frac{t^3-1^3}{t-1}$ 在 $t=1$ 时极限存在而函数沒有意义，故为第三类不連續点，又如

$$y=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & \text{当 } x\neq0 \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } x=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

由于 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$ 而 $f(0)=1$，

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 亦有第三类不連續点。

对这种不連續点，只要改变或重新定义 $f(x)$ 在 c 这一点的値，使它等于 $f(x)$ 在这点的极限，新的函数就在点 c 連續，所以这类不連續点也称为可移不連續点。

由上面的定义可以判别不連續点的类别，但对給定的函数，如何找出它的不連續点呢？这主要依靠連續函数的运算法則和基本初等函数的連續性，对包含有非初等函数的函数，还要先討論这些非初等函数有哪些不連續点。有了这些知識，那么由一些已知其

不連續点的函数經过加、減、乘、除所得的函数，除上面这些不連續点外，在其他任一点都是連續的；因此需要討論的只是以上这些点，也就是这些函数中每一个函数的不連續点，但須注意也还不能肯定它們一定是不連續点。此外还要注意，使商的分母为零的点一定是不連續点，因为函数在这点沒有意义。对复合函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 来說，除了应考虑 $g(x)$ 的不連續点外，还要考虑 $f(u)$ 的不連續点 $u_0(=g(x_0))$ 所对应的点 x_0。

[例 4] 討論 $y=\dfrac{x}{\operatorname{tg} x}$ 的不連續点。

由于 x 在 $(-\infty, \infty)$ 内每点連續，$\operatorname{tg} x$ 的不連續点和等于零的点分别为 $n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 和 $n\pi$ $(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$，但 $x=0$ 时，分子分母都等于零，而

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} x}=1,$$

故 $x=0$ 为可移不連續点，又当 $n=\pm1, \pm2, \cdots$ 时，

$$\lim_{x\to n\pi}\frac{x}{\operatorname{tg} x}=\infty,$$

故 $x=n\pi$ $(n=\pm1, \pm2, \cdots)$ 为第二类不連續点。最后，因为

$$\lim_{x\to n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\operatorname{tg} x}=0 \quad (n=0, \pm1, \pm2\cdots),$$

故 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 也是可移不連續点。

[例 5] 討論 $y=x[x]$ 的不連續点。

这里要討論的只是 $[x]$ 的不連續点，亦即 $0, \pm1, \pm2, \cdots$，但

$$\lim_{x\to 0} x[x]=0=0\cdot[0],$$

故 $x=0$ 其实是連續点，但当 $N=\pm1, \pm2, \cdots$ 时

$$\lim_{x\to N-0} x[x]=N(N-1), \quad \lim_{x\to N+0} x[x]=N^2,$$

而二者只有 $N=0$ 时才相等，故 $\pm1, \pm2, \cdots$ 都是第一类不連續点。

§6 閉区間連續函数的性质

閉区間上的連續函数，具有許多很重要的性质，其中大多数性质从直观上看来是相当明显的，但在数学上却必須一个个加以严格的論証，而不能仅以直覺来代替。这些性质，对于开区間上的連續函数或者閉区間上的非連續函数，一般說来是不成立的，在下面的討論中，我們将給出恰当的例子来表明这一点。

这些性质的証明，除零点的定理以外，我們都用魏尔斯脫拉斯定理（即致密性定理）来証明。但也可以用掩蓋定理来証明，为了說明这一点，在証明有界性定理时，我們将給出两种不同的証明方法，使讀者初步学会如何应用这些定理。

一、有界性定理

定理 1　若函数 $f(x)$ 在閉区間 $[a, b]$ 上連續，則它在 $[a, b]$ 上有界。

【証明 I】　用魏尔斯脫拉斯定理（致密性定理）来証。

假設函数 $f(x)$ 在閉区間 $[a, b]$ 上无界。也就是說，对于任何自然数 n，在閉区間 $[a, b]$ 上至少存在一点 x_n 使得 $|f(x_n)|>n$。令取 $n=1, 2, 3, \cdots$，得到一点列 $\{x_n\}$，这些点 $x_n\in[a, b]$，并且 $|f(x_n)|>n$，亦即 $f(x_n)\to\infty$ $(n\to\infty)$。

由魏尔斯脫拉斯定理知道，在有界数列 $\{x_n\}$ 中能选出一个收斂的子列 $x_{n_k}\to x_0$ $(k\to\infty)$。此处 $x_0\in[a, b]$。

按照剛才的討論 $f(x_n)\to\infty$ $(n\to\infty)$，再由子列的性质知道：对于 x_{n_k} 亦有 $f(x_{n_k})\to\infty$ $(k\to\infty)$。

另一方面，由已知条件，函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續，故在 x_0 点处，当 $x\to x_0$ 时，就有 $f(x)\to f(x_0)$。如令 $x_{n_k}\to x_0$ $(k\to\infty)$，根据函数极限与数列极限的关系，有

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

到此我們获得了两个矛盾的結論：

$$f(x_{n_k})\to\infty \text{ 及 } f(x_{n_k})\to f(x_0) \quad (k\to\infty).$$

也就是說，$f(x)$在$[a, b]$上无界的假設与已給条件矛盾，这样就証明了定理。

【証明 2】 用掩盖定理来証。

按連續的定义，$f(x)$在$[a, b]$上每一点x_0的极限存在，因之存在点x_0的某邻域$O(x_0, \delta)$，使$f(x)$在这个邻域内为有界，$|f(x)|\leqslant M$。这里的正数δ及M的值当然与点x_0有关，随着点x_0的不同，一般說来，δ及M也将不同。由于x_0是$[a, b]$上的任何一点，因此在$[a, b]$上每一点都得到这样的一个邻域（亦即开区間），这些开区間的全体构成一个开区間集，它包含了$[a,b]$上的每一点，亦即掩盖了$[a, b]$。由掩盖定理，在这个开区間集中必有有限个开区間掩盖$[a, b]$，記这有限个开区間为

$$(x_1-\delta_1, x_1+\delta_1), (x_2-\delta_2, x_2+\delta_2), \cdots, (x_k-\delta_k, x_k+\delta_k),$$

相应的M分别記为$M_1, M_2, \cdots, M_k$。如今只要取

$$M^*=\max(M_1, M_2, \cdots, M_k),$$

那么在$[a, b]$上总成立着：

$$|f(x)|\leqslant M^*,$$

事实上，对$[a, b]$上任意一点x，按掩盖定理，在这k个开区間$O(x_i, \delta_i)$ $(i=1,2,\cdots,k)$中至少有一个包含点x，設它为$O(x_j, \delta_j)$，但在这个开区間上，$|f(x)|\leqslant M_j$，故

$$|f(x)|\leqslant M_j\leqslant M^*.$$

由于x为$[a, b]$上的任意一点，于是証明了$f(x)$在$[a, b]$上有界。

在上面的証明中，还有一点须要补充說明一下，在端点a及b上，按极限性质，应有半开半閉区間$[a, a+\delta)$及$(b-\delta', b]$，使在这两个区間上函数为有界，而这两个区間均非开区間，但我們可以把它們換为开区間$(a-\delta, a+\delta)$及$(b-\delta', b+\delta')$，并考慮

函数 $F(x)$：

$$F(x)\begin{cases} f(a), & \text{当 } a-\delta<x<a, \\ f(x), & \text{当 } a\leqslant x\leqslant b, \\ f(b), & \text{当 } b<x<b+\delta', \end{cases}$$

由上面的討論知道 $F(x)$ 在 $[a-\delta, b+\delta]$ 上有界，亦即 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界。

这个定理只表明了閉区間上的連續函数一定有界。但对于开区間上的連續函数和閉区間上的非連續函数，下面的例子表明，这时既不能肯定它們一定无界，也不能肯定它們一定有界，須按具体的問題而定。例如函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 和 $y=\frac{1}{x}$ 均在开区間 $(0, 1)$ 連續，但前者在 $(0, 1)$ 內有界，后者无界。

定理1 还可以拓广为：若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上只有第一类不連續点，則它在 $[a, b]$ 上有界（参見习題73）。

二、最大（小）値定理

正象数列的情形一样，我們定义函数 $f(x)$ 在区間 X 上的上确界 β 及下确界 α 为 $f(x)$ 在这个区間上的函数值所組成数集的上、下确界。亦即

$$\beta=\sup_{x\subset X}\{f(x)\},\quad \alpha=\inf_{x\subset X}\{f(x)\}.$$

例如函数 $f(x)=x-[x]$（图1-2-16）在区間 $[0, 1]$ 的上确界为1，下确界为0。又如函数 $f(x)=[x]-x$（图1-2-17）在区間 $[0, 1]$ 的上确界为0，下确界为 -1。而函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 內的上确界为 $+\infty$，下确界为1。

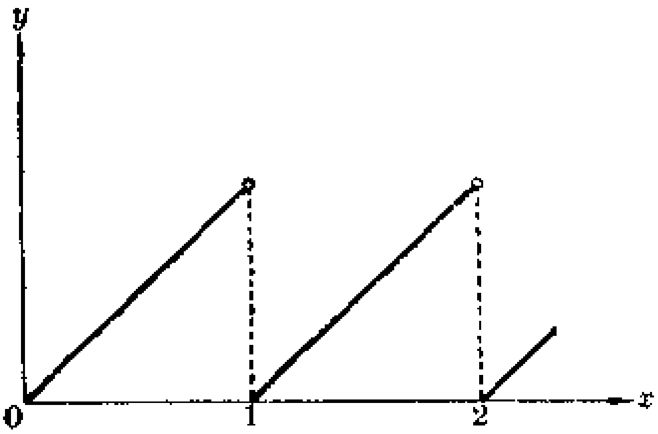


图　1-2-16

若上确界能达到，亦即至少存在着一点 $x_0\in X$，使 $f(x_0)=\beta$，我們就称 $f(x)$ 在区間 X 上有最大值 β。例如函数 $f(x)=[x]-x$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值为 0，因为 $f(0)$ 和 $f(1)$ 都等于 0。又如函数 $f(x)=x-[x]$ 在 $[0,1]$ 上虽有上确界 $\beta=1$，但无最大值，因为在区間 $[0, 1]$ 上沒有一点的函数值为 1。对于下确界和最小值，亦可同样討論。

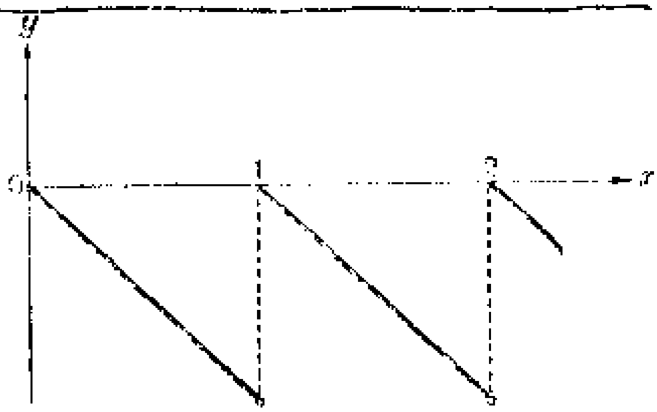


图 1-2-17

从上面的两个例子还可以看到，若函数 $f(x)$ 在閉区間不連續或仅在开区間連續，就不一定有最大值或最小值。即使对有界函数而言，虽然它一定存在上确界和下确界，但它仍然可以沒有最大值和最小值。

但是，我們有下面的定理。

定理 2 在閉区間 $[a, b]$ 上的連續函数 $f(x)$ 一定有最大值和最小值。

【証明】 由有界性定理，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界。因之有上确界和下确界。現只証明 $f(x)$ 有最大值，亦即 $f(x)$ 可以达到上确界 β。事实上，按照上确界定义，对 $\varepsilon=\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, 3\cdots)$，存在这样的 $x_n\in[a, b]$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$，使

$$\beta-\frac{1}{n}<f(x_n)\leq\beta,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\beta.$$

由魏尔斯脫拉斯定理，$\{x_n\}$ 有一收斂的子数列 $\{x_{n_k}\}$，設 $x_{n_k}\to x_0\in[a, b]$，再由子列的性质

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\beta,$$

而 $f(x)$ 在点 x_0 連續，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，由函数极限与数列极限的关系，最后得到

$$\beta=\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

这就証明了 $f(x)$ 有最大值。同理可証 $f(x)$ 有最小值。

三、根的存在定理

在代数中，对一个代数方程 $P(x)=0$ ($P(x)$ 是多项式) 曾經用 $P(x)$ 在某一区間两端的符号来决定根的位置。例如 $P(1)<0$，$P(2)>0$ 时，就可断定 $(1, 2)$ 内至少有 $P(x)=0$ 的一个根。假若左端不是多项式 $P(x)$ 而是任意的函数 $f(x)$，是否也可以这样作呢？随便画一函数如图 1-2-18，我們有 $f(a)<0$，$f(b)>0$，而在 $[a, b]$ 内却沒有 $f(x)=0$ 的根。

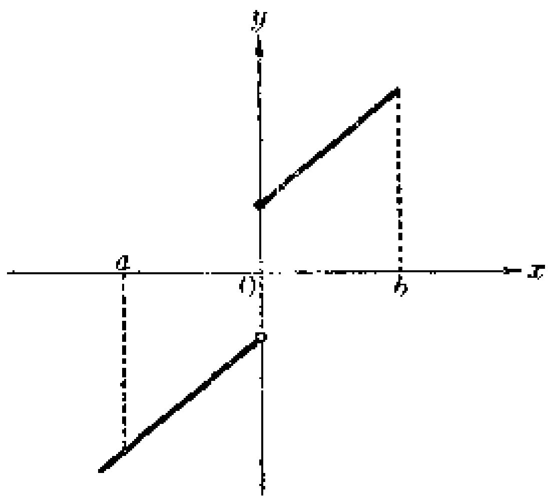


图 1-2-18

問題正是由于 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 中有不連續点 $x=0$。我們有：

定理 3 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 連續，且 $f(a)$，$f(b)$ 异号，則在 (a, b) 内至少有 $f(x)=0$ 的一个根 ξ.

【証明】 应用区間套定理。不妨設 $f(a)<0$，$f(b)>0$，将 $[a, b]$ 二等分，中点为 $\frac{1}{2}(a+b)$. 若 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，定理就得到了証明。若不然，两个部分区間中必有一个区間，在两端点处函数值异号，設此区間为 $[a_1, b_1]$，那末也有 $f(a_1)<0$，$f(b_1)>0$，再将 $[a_1, b_1]$ 二等分，中点为 $\frac{1}{2}(a_1+b_1)$. 若 $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=0$，定理就得到了証明。若不然，可以繼續下去，有两种可能：

1．进行若干次后，在某分点处函数为零，这样定理即得証明。

2．分点处函数不为零，此时函数在两端异号，如此我們得到

一个区間序列$\{[a_n, b_n]\}$，它有两个性质：(1) $[a_1, b_1]\supset[a_2, b_2]\supset\cdots$，且$f(a_n)<0$，$f(b_n)>0$；(2) 当$n\to\infty$时，$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0$，由区間套定理，必有$\xi\in(a,b)$，使$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$。現在証明，$\xi$点正是我們所要求的根。因为$f(x)$在$[a, b]$上連續，因此在$x=\xi$处亦連續，因而$f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)\leqslant 0$和$f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)\geqslant 0$，即$f(\xi)=0$。

注意，在定理的条件下，$f(x)=0$在(a, b)之間也可能不止一个根，又当$f(x)$在$[a, b]$不連續，或者$f(a)$，$f(b)$同号时，也不能說$[a, b]$中一定沒有$f(x)=0$的根，讀者可自行举出这样的例子。

由定理3，立即获得介值定理：若函数$f(x)$在$[a, b]$連續，它的最大值为M，最小值为m，則对任何数c，$m<c<M$，在$[a,b]$內至少存在一点ξ，使$f(\xi)=c$（参見习題67(1)，(2)及75）。为了証明这一定理，可以作輔助函数$F(x)=f(x)-c$，利用$F(x)$及定理3証明之。

四、反函数連續性的定理

在上一定理的基础上，可以証明上节中的反函数連續性定理，亦即：

定理4 設$y=f(x)$在$a\leqslant x\leqslant b$上严格增加(减少)且連續，又$f(a)=\alpha$，$f(b)=\beta$，則在$\alpha\leqslant y\leqslant\beta$上存在着$y=f(x)$的反函数$x=\varphi(y)$，$\varphi(y)$在$[\alpha, \beta]$上也是严格增加(减少)且連續的。

【証明】 不妨設$y=f(x)$在$a\leqslant x\leqslant b$上是严格增加且連續的，首先証明对任一点$y_0\in[\alpha, \beta]$，存在唯一的$x_0\in[a, b]$，使$f(x_0)=y_0$，这样，按反函数的定义，也就是說反函数$\varphi(y)$在点y_0是有定义的，并且$\varphi(y_0)=x_0$。

若y_0就是α或β，那么x_0就等于a或b。若$\alpha<y_0<\beta$，我們考虑在$[a, b]$上連續的函数$F(x)$：

$$F(x)=f(x)-y_0.$$

由于
$$F(a)=f(a)-y_0=\alpha-y_0<0,$$
$$F(b)=f(b)-y_0=\beta-y_0>0,$$

故在 (a, b) 中存在一点 x_0，满足 $f(x_0)=y_0$，并且它是唯一的，事实上，由 $f(x)$ 的严格增加，当 $x>x_0$ 时，$f(x)>f(x_0)$；而 $x<x_0$ 时，$f(x)<f(x_0)$，所以沒有其他点 x 满足 $f(x)=y_0$，因此对每点 $y\in[\alpha, \beta]$，由方程 $f(x)-y=0$ 对应着唯一的点 x，亦卽在 $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ 上 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 存在。

其次証明 $\varphi(y)$ 在 $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ 上也是严格增加的，事实上对 $[\alpha, \beta]$ 上任意的点 y_1, y_2，若 $y_1<y_2$ 則一定有 $\varphi(y_1)<\varphi(y_2)$，否則，若 $\varphi(y_1)\geqslant\varphi(y_2)$，記 $x_1=\varphi(y_1)$，$x_2=\varphi(y_2)$，那么 $y_1=f(x_1)$，$y_2=f(x_2)$。而由 $f(x)$ 的单調增加性，当 $x_1\geqslant x_2$ 时应有 $y_1\geqslant y_2$，这是与上面的假設相矛盾的。

最后，証明 $\varphi(y)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 連續。卽証明 $\varphi(y)$ 在区間上任意一点 y_0 是連續的。按定义，也就是要証明，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使 $|y-y_0|<\delta$ 时，成立着：

$$|\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon.$$

記 $\varphi(y_0)=x_0$，$\varphi(y)=x$，那么 $f(x_0)=y_0$，$f(x)=y$，我們所要导出的不等式 $|\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon$ 化为：

$$|x-x_0|<\varepsilon,$$

亦卽
$$x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon.$$

从 $\varphi(y)$ 的严格单調增加性，要这个不等式成立，只要

$$f(x_0-\varepsilon)<f(x)<f(x_0+\varepsilon)$$

卽可。也就是只要

$$f(x_0-\varepsilon)-f(x_0)<y-y_0<f(x_0+\varepsilon)-f(x_0),$$

因此可以取：

$$\delta=\min\{f(x_0)-f(x_0-\varepsilon),\ f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)\}.$$

【注意】 若 y_0 是区間端点 α 或 β，則 $|y-y_0|<\delta$ 应换成

$$0\leqslant y-\alpha<\delta \text{ 或 } 0\leqslant \beta-y<\delta,$$

再类似地进行討論，又上面的証明中，还应設 $a\leqslant x_0-\varepsilon<x_0+\varepsilon\leqslant b$，只要取 ε 充分小就可以滿足这个要求，而这并不影响以上推断的正确性。

五、一致連續性

先叙述一致連續性概念：設 $f(x)$ 在某一区間 X（或开，或閉）連續，按照定义，也就是 $f(x)$ 在这区間每一点都連續。即对区間 X 中任意的点 x_0 及对任意的 $\varepsilon>0$，可找到 $\eta>0$，使区間中任意的点 x，当 $|x-x_0|<\eta$ 时就有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。

一般来說，对同一个 ε 当 x_0 不同时，η 一般是不同的，例如图 1-2-19 中 $y=\dfrac{1}{x}$ 的曲綫，对接近于原点的点 x_0'，η 就应取小一些。而当 x_0 离原点較远时，η 却可取大一些，对后者所得的 η 值，就不一定可用于前者，但在以后的討論中，我們往往要求能取到一个对区間 X 内所有的点都适用的 η，也就是說对任意的 $\varepsilon>0$，可找到 $\eta>0$，使对区間中任意的点 x_0 及任意的点 x，当 $|x-x_0|<\eta$ 时就有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，这种性质并不是每一函数都具备的。具备这性质的函数，称为一致連續函数。将函数在区間連續和一致連續的定义加以比較，粗看起来，只是"对区間中任意的点 x_0"一个在前一个在后，然而仔細体会一下，它們截然不同。前者是給定了 ε，x_0 来决定 η 的，因此一般說来，η 随着 ε 和 x_0 而改变，我們把这种 η 記为 $\eta(\varepsilon, x_0)$，而后者是只給了 ε 就

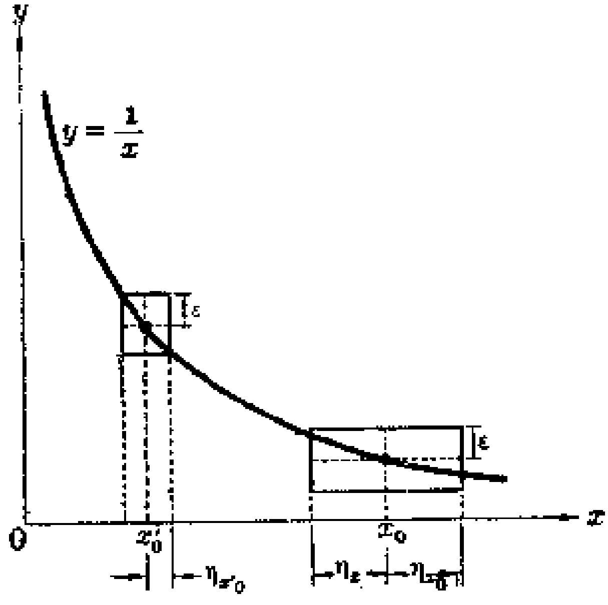


图 1-2-19

来决定 η. 也就是 η 只随 ε 而变，我們記为 $\eta(\varepsilon)$，而这种 $\eta(\varepsilon)$ 对任意的 x_0 都可用。仍然拿 $y=\frac{1}{x}$ 的情形来看。对区間 $(0, 1)$ 的点 x_0，我們不妨求出满足 $|x-x_0|<\eta$ 时

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

的 η 的精确值，来看看 η 依賴于 x_0 的情况。从

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\varepsilon$$

得到
$$\frac{1}{x_0}-\varepsilon<\frac{1}{x}<\frac{1}{x_0}+\varepsilon$$

$\left(\text{当 } \frac{1}{x_0}<\varepsilon\text{，即 } x_0\varepsilon>1 \text{ 时，只要考虑右边的不等式}\right)$，

亦即
$$\frac{x_0}{1-x_0\varepsilon}>x>\frac{x_0}{1+x_0\varepsilon}$$

或
$$\frac{x_0^2\varepsilon}{1-x_0\varepsilon}>x-x_0>\frac{-x_0^2\varepsilon}{1+x_0\varepsilon},$$

故只要取 $\eta=\min\left(\frac{x_0^2\varepsilon}{1+x_0\varepsilon}, \frac{x_0^2\varepsilon}{1-x_0\varepsilon}\right)=\frac{x_0^2\varepsilon}{1+x_0\varepsilon}=\eta(\varepsilon, x_0)$.

可見当 $x_0\to 0$ 时 $\eta\to 0$，而 η 的确是依賴于 x_0 的。我們得不到一个对 $(0, 1)$ 每点都能用的正数 η. 也就是說 $\frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内不一致連續。

現設 $c>0$ 是一个小于 1 的定数，而就区間 $(c, 1)$ 来考虑，容易証明：

当 $x_0\in(c, 1)$ 时，

$$\eta(\varepsilon, x_0)=\frac{x_0^2\varepsilon}{1+x_0\varepsilon}>\frac{c^2\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

因此若取 $\eta(\varepsilon)=c^2\varepsilon/(1+\varepsilon)$，那么对 $(c, 1)$ 上任意两点 x_0, x 只要 $|x-x_0|<\eta(\varepsilon)$ 时，就有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

也就是說 $\frac{1}{x}$ 在区間 $(c, 1)$ 内是一致連續的。

应当注意，函数 $f(x)$ 在某区間的連續性，只是与区間中每一点及其附近的点 $f(x)$ 的情形有关。事实上，按照定义，只要它在区間中每一点都連續就行了。也就是說只要考慮在每一点是否有适合連續定义的 η. 前面已說过，这种性质称为局部性质。而一致連續性，却要考虑 $f(x)$ 在整个区間的情形，在整个区間内来找适合一致連續定义的 η，这种性质称为整体性质。

在一致連續定义中"对任意的 x_0，任意的 x"也就是說"对任意两点 x', x''"至于那一个是 x_0，那一个是 x 是沒有关系的，因之一致連續的定义通常也叙述为:

"对任意的 $\varepsilon>0$，可找到 $\eta>0$，使对区間 X 中任意两点 x' 和 x''，当 $|x'-x''|<\eta$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，則称函数 $f(x)$ 在区間 X 上一致連續，也称均匀連續。"

[例 1] 証明 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $(c, 1)$ $(c>0)$ 是一致連續的，而在 $(0,1)$ 連續而非一致連續。

【証明】 当 $c<x$, $x_0<1$ 时

$$|f(x)-f(x_0)| = \left|\sin\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x_0}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2xx_0}\right|\left|\cos\frac{x+x_0}{2xx_0}\right|$$

$$\leqslant\frac{|x-x_0|}{xx_0}\leqslant\frac{|x-x_0|}{c^2},$$

故只要取 $c^2\varepsilon$ 作为一致連續定义中的 η 即可。

当考虑区間 $(0, 1)$ 时，由上节(§5)知道 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 連續，但若取

$$x_n'=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}},\quad x_n''=\frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}}\quad (n\text{ 正整数}),$$

則
$$|f(x_n')-f(x_n'')|=|1-(-1)|=2,$$

而 $$|x_n'-x_n''|=\frac{\pi}{4n^2\pi^2-\frac{\pi^2}{4}}\to 0 \quad (\text{当 } n\to\infty \text{ 时}).$$

所以对于小于 2 的任何 $\varepsilon>0$，不能找到一致連續定义中的 η。因为不論 η 怎样小都可找到两点 x_n'，x_n'' 虽然 $|x_n'-x_n''|<\eta$（只要 n 取得相当大）而 $|f(x_n')-f(x_n'')|=2>\varepsilon$。

最后注意，从定义中可以看出一致連續的函数在这区間上一定連續。但連續函数不一定是一致連續的。特别从上例可以看到，开区間連續的函数可能一致連續，也可能不一致連續，它与端点的极限情况很有关系，但对閉区間連續的函数，有下面的定理。

定理 5（康托（Cantor）定理） 閉区間 $[a,b]$ 上的連續函数 $f(x)$ 一定一致連續。

【証明】 采用反証法，假設函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非一致連續，也就是說，存在如此的 $\varepsilon_0>0$，对于任何数 $\eta>0$，在区間 $[a,b]$ 内至少存在两点 x_1 及 x_2，虽然 $|x_1-x_2|<\eta$，但 $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon_0$。現在取 $\eta=\frac{1}{n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，那么在 $[a,b]$ 内存在两点 $x_1^{(n)}$ 及 $x_2^{(n)}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，虽然 $|x_1^{(n)}-x_2^{(n)}|<\frac{1}{n}$，但

$$|f(x_1^{(n)})-f(x_2^{(n)})|\geqslant\varepsilon_0.$$

应用魏尔斯脫拉斯定理，在有界数列 $\{x_1^{(n)}\}$ 中存在一个收斂的子列 $x_1^{(n_k)}\to x_0$ $(k\to\infty)$，这里 $x_0\in[a,b]$。

再由于 $|x_1^{(n)}-x_2^{(n)}|<\frac{1}{n}$，所以 $|x_1^{(n_k)}-x_2^{(n_k)}|<\frac{1}{n_k}$，亦即

$$x_1^{(n_k)}-x_2^{(n_k)}\to 0 \quad (k\to\infty).$$

現因 $x_1^{(n_k)}\to x_0$ $(k\to\infty)$。所以 $x_2^{(n_k)}\to x_0$ $(k\to\infty)$。并且 $|f(x_1^{(n_k)})-f(x_2^{(n_k)})|\geqslant\varepsilon_0$ 对一切 k 成立。

另一方面，由于函数 $f(x)$ 在点 x_0 連續，亦即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

按函数极限与数列极限的关系，有

$$\lim_{k\to\infty} f(x_1^{(n_k)}) = f(x_0),\quad \lim_{k\to\infty} f(x_2^{(n_k)}) = f(x_0),$$

得到

$$\lim_{k\to\infty} (f(x_1^{(n_k)}) - f(x_2^{(n_k)})) = 0,$$

这同 $|f(x_1^{(n_k)}) - f(x_2^{(n_k)})| \geq \varepsilon_0$ 对一切 k 成立矛盾。亦即假設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上非一致連續是不对的。从而証明了康托定理。

对于开区間 (a, b) 内的連續函数，只要在端点 a, b 处，函数具有单側极限 $f(a+0)$，$f(b-0)$，那么可以断言这个函数在 (a, b) 一致連續(参見习題 81)。对于无穷区間 $[a, +\infty)$ 上的連續函数，如果当 $x\to+\infty$ 时函数具有有限极限，那么这函数是 $[a, +\infty)$ 上的一致連續函数(参見习題 87)。

一致連續的函数必为有界的(参見习題 85)。

§7 多元(二元)函数的极限与連續

多元函数的极限和連續的概念，也完全和一元函数相类似，下面我們只就二元函数来討論，对二元以上的情形，也有类似的結果。

一、二元函数的极限与連續

要定义二元函数 $f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 的函数极限，只要注意平面上的点 $M_0(x_0, y_0)$ 的邻域是什么就行了，由邻域的定义，$M_0(x_0, y_0)$ 的邻域 $O(M_0, \delta)$ 是以 M_0 为心，以 $\delta>0$ 为半徑的圓的内部点的全体，也就是滿足不等式

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$$

的点 $M(x, y)$ 的全体，或写为 $|M-M_0|<\delta$，这里 $|M-M_0|$ 表示 M, M_0 两点間的距离。再注意函数在某点的极限与函数在这点的值无关，因此 $f(x, y)$ 在 M_0 点的极限为 A 的意义为：对点 A 的任何邻域 $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$，可得 M_0 的邻域 $O(M_0, \delta)$，使这个邻域内不与 M_0 重合的任意一点 M 的函数值 $f(M)=f(x, y)$，落在 A

的 ε 邻域 $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ 中。也就是

定义 若对任給的 $\varepsilon>0$，可得 $\delta>0$，使

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

时，恒有
$$|f(x, y)-A|<\varepsilon,$$

那么称 A 为 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的极限，并記为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A$.

这定义也可用与一个变量的函数的情形完全相同的形式写做：对任意的 $\varepsilon>0$，可得 $\delta>0$，使 $0<|M-M_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(M)-A|<\varepsilon,$$

极限的記号也可改記为 $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A$. 这一定义对二元以上的情形也完全适用。

我們也可以不用圓来表示 M_0 的邻域，例如可用以 M_0 为心、2δ 为边长的正方形作为邻域，那么定义可述为

定义 若对 $\varepsilon>0$，可得 $\delta>0$，使当

$$|x-x_0|<\delta, \quad |y-y_0|<\delta,$$

且 (x, y) 不与 (x_0, y_0) 重合，亦即 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\neq 0$ 时，恒有

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon,$$

那么称 A 为 $f(x, y)$ 在点 M_0 的极限。

这个定义与前面的定义显然是等价的，因为以 M_0 为心的圓恒可容納一个以 M_0 为心的正方形，因此能找到一个能滿足不等式

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon$$

的圓邻域，也必能找到滿足这不等式的正方形域。反之在以 M_0 为心的正方形内恒可作一个以 M_0 为心的圓，这就証明了两个定义的等价性(图 1-2-20)。

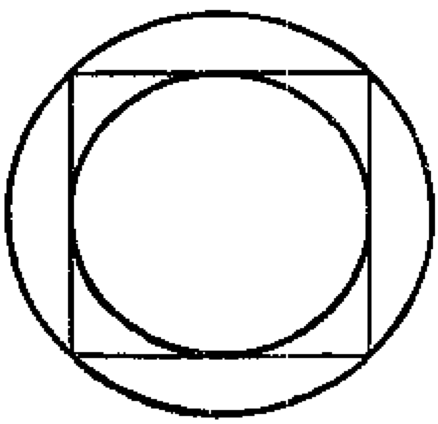


图 1-2-20

应該注意，在上面的定义中，不能簡單地在 $|x-x_0|$ 和 $|y-y_0|$ 左端加上"0<"的記号，因为

$$0<|x-x_0|, \quad 0<|y-y_0|$$

表示 (x, y) 不仅不与 (x_0, y_0) 重合，并且也不能与直綫 $x=x_0$ 或 $y=y_0$ 上任一点重合，这是与二元函数的极限的要求相違背的。与单变量函数的情形一样，若 $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A$，那么当 M 以任何点列(或沿某一曲綫等等)趋于 M_0 时，$f(M)$ 的极限都是 A，反之亦然，但由 M 取某一点列或沿某一曲綫、取某些特定的点列或沿某些特定的曲綫趋于 M_0 时，$f(M)$ 的极限是 A，还不能肯定

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=A.$$

[例 1] $f(x, y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

显然，
$$f(0, y)=0, \quad f(x, 0)=0,$$

因此
$$\lim_{y\to 0} f(0, y)=0, \quad \lim_{x\to 0} f(x, 0)=0,$$

亦即当 M 沿直綫 $x=0$ 或 $y=0$ 而趋于 $(0, 0)$ 点时，$f(x, y)$ 趋于零；但当 M 沿直綫 $y=mx$，$(m\neq 0)$ 趋于零时，

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx)=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{m}{1+m^2}=\frac{m}{1+m^2}\neq 0,$$

即 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点极限不存在。

[例 2] $f(x, y)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0<y<x^2 \text{ 时},\\ 0, & \text{其他点}.\end{cases}$

显然，当 M 沿 x 軸或 y 軸趋于点 O 时，$f(x, y)\to 0$. 又可証当 M 沿任一射綫趋于 O 点时，都有 $f(x, y)\to 0$(图 1-2-21)，以上半平面的射綫 $y=ax$, $y\geqslant 0$ 来說，由于 $y=ax$ 与 $y=x^2$ 除点 0 外还交于另一点，而在这两个交点間，$f(x, y)\equiv 0$，故沿此射綫所得的极限为零。但当 M 沿曲綫 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 而趋于点 0 时，因为 $f(M)\equiv 1$，故 $f(M)\to 1$，因此 $f(M)$ 在点 0 的极限仍然不存在。这說明即使

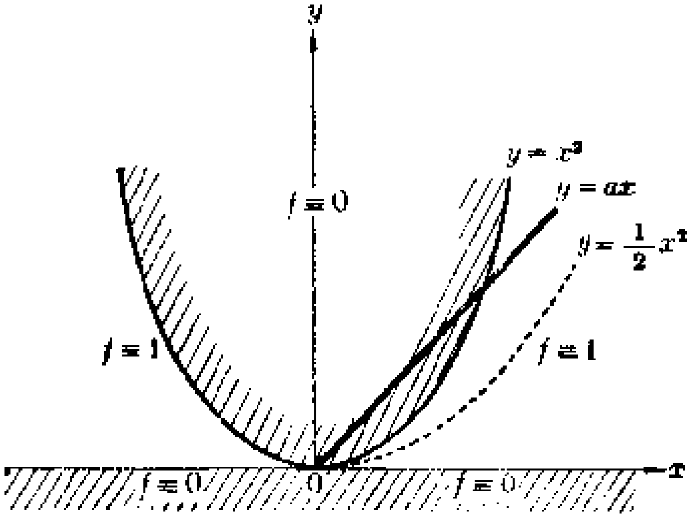


图 1-2-21

M沿某些特定的綫(包括直綫)趋于M时，$f(M)$有共同的极限，由此还不能肯定$\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$存在。

連續函数的概念由极限概念立即可以得到，亦即若$f(M)$在M_0有定义，$\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$存在，且二者相等，则称$f(M)$在点$M_0$連續。因此把上面的$A$换成$f(M_0)$，就可得到連續的$\varepsilon$-$\delta$定义以及其他情形。例如若$f(x, y)$在$M_0(x_0, y_0)$連續，那么单元函数$f(x, y_0)$和$f(x_0, y)$也分别在$x_0$和$y_0$連續，事实上前者在$x_0$的极限和后者在$y_0$的极限(也就是$f(x, y)$当$M$沿直綫$y=y_0$和$x=x_0$趋于$M_0$时的极限)都等于它們在該点的值$f(x_0, y_0)$，因此它們分别在$x_0$和$y_0$点連續。但由这两个单元函数在$x_0$和$y_0$点的連續性，并不能肯定$f(x, y)$在$(x_0, y_0)$是連續的(参見习題95, 96)，例如

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{当 } x^2+y^2\neq 0 \text{ 时,}\\ 0, & \text{当 } x=y=0 \text{ 时;}\end{cases}$$

$f(x, 0)\equiv 0$, $f(0, y)\equiv 0$在$x=0$和$y=0$分别是連續的，但$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$不存在，因之，$f(x, y)$在$(0, 0)$点不連續。

又如在例2中，也有$f(x, 0)\equiv 0$, $f(0, y)\equiv 0$，故也可得到相

同的結論(在这情形中,甚至 $f(x, mx)$ 也在 $x=0$ 連續)。

关于极限的性质和运算法則,以及連續函数的运算法則,和单元函数的情形完全相似,其証明也大体相同,只要把 $0<|x-c|<\delta$ 改为 M_0 点的圓邻域或正方形邻域即可。又由連續函数的运算法則和基本初等函数的連續性也可找出多元函数的不連續点。

[例 3] 求函数

$$u=\operatorname{tg}(x^2+y^2)$$

的不連續点。

由于二元函数 $v=x^2+y^2$ 在任何点 (x,y) 連續,于是复合函数 $u=\operatorname{tg} v$ 在 $v\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时,也就是当 $x^2+y^2\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,1,2,\cdots)$ 时,为連續的,而当 $v=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时不連續,所以,函数 $u=\operatorname{tg}(x^2+y^2)$ 的不連續点为 $x^2+y^2=k\pi+\frac{\pi}{2}$. 这些不連續点的图形是一列同心圓,圓心在原点,半徑分别为 $\frac{\pi}{2}$, $\pi+\frac{\pi}{2}$, $2\pi+\frac{\pi}{2}$, $\cdots$(图 1-2-22)。

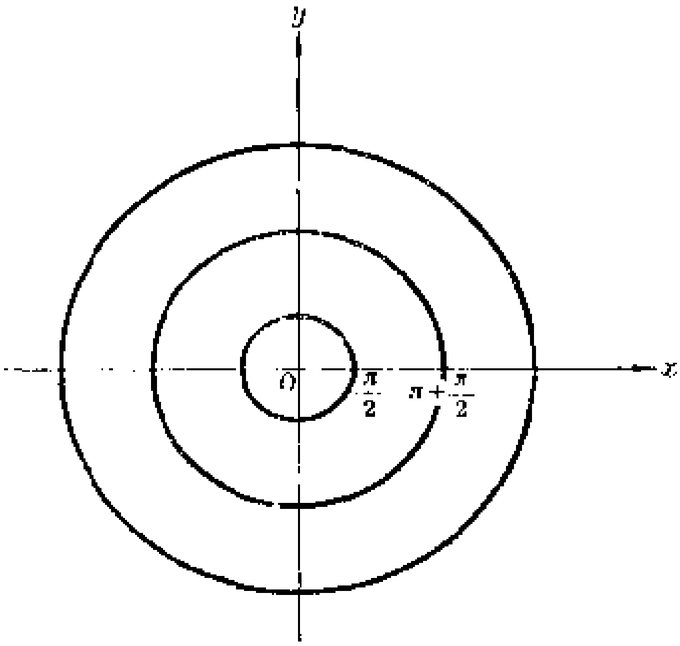


图 1-2-22

二、在有界閉域上連續的函数的性质

为了在平面上引进与直綫上开区間、閉区間相似的概念,我們給出下列定义:

考虑平面上的一个点集 E 和一点 $M_0\in E$,若存在 M_0 的一个邻域,使这邻域中的点都属于 E,那么称 M_0 为集合 E 的**内点**。例如設滿足不等式 $1<x^2+y^2<4$ 中的点的全体为 E,則 E 中每一点都是内点。

設有点集 E 和不属于 E 的一点 M_0，亦即 $M_0 \overline{\in} E$，如果存在 M_0 的一个邻域，使这邻域中的点都不属于 E，那么称 M_0 为 E 的外点。在上例中，满足 $x^2+y^2<1$ 和 $x^2+y^2>4$ 的点都是外点。

若点 M_0 的任意一个邻域中都有属于 E 的点，也有不属于 E 的点（M_0 本身可以属于 E，也可以不属于 E），則称 M_0 为 E 的境界点。境界点的全体，称为 E 的境界。在上例中，E 的境界是圓周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$。

若 M_0 的任一邻域内，都含有无穷个 E 的点，則称 M_0 为 E 的极限点。在上例中，閉环 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$ 上每一点都是 E 的极限点。又如平面上的点 $(1, 0)$，$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$，…，$\left(\frac{1}{n}, 0\right)$… 所成的集 E 的极限点为 $(0, 0)$。

若集合 E 的点都是内点，則称 E 为开集。例如开圓 $x^2+y^2<1$ 是一开集，环 $1<x^2+y^2<4$ 也是开集，两个开圓也构成开集。而 $1<x^2+y^2\leqslant 4$ 就不是开集。

若集合 E 包含所有它的极限点，亦即 E 的极限点也都属于 E，則称 E 为閉集。上面的开集加上它們的境界，也就是加上圓周，就成了閉集。又 $1<x^2+y^2\leqslant 4$ 不是閉集。

若一集合 D 的点都是内点，且 D 中任意二点，可以用完全落在 D 内的折綫 l 联結起来，則称 D 为一区域。換句話說，区域是連通的开集。例如 $x^2+y^2<1$ 和 $1<x^2+y^2<4$ 都是区域。但不相交的两个开圓构成一个开集，而不是区域。

区域的境界点、境界和閉区域的定义，完全和集合的情况相同，事实上区域本身就是一个开集。

若点集 E 可以包含在某一个矩形（或圓）之内，則称 E 为有界点集。例如 $1<x^2+y^2<4$ 是有界点集，而集合 $x^2+y^2>1$ 是无界的。区域有界的定义也完全相同。

为了証明有界閉区域上連續函数的性质，需要建立下列的和

直綫上的情形相类似的定理。

矩形套定理 設 $\{a_n\leqslant x\leqslant b_n,\ c_n\leqslant y\leqslant d_n\}$ 是由矩形 $a_n\leqslant x\leqslant b_n$, $c_n\leqslant y\leqslant d_n$ $(n=1, 2, \cdots)$ 所成的矩形序列，其中每一个矩形都含在前一个矩形中，并且 $b_n-a_n\to 0$, $d_n-c_n\to 0$，那么有唯一的一点 $M_0(x_0, y_0)$，它位于每一矩形之中，亦即

$$a_n\leqslant x_0\leqslant b_n,\quad c_n\leqslant y_0\leqslant d_n\quad (n=1, 2, 3, \cdots).$$

証明只要对区間套$\{[a_n, b_n]\}$和$\{[c_n, d_n]\}$用区間套定理即可。

魏尔斯脫拉斯定理 如果序列 $\{M_n(x_n, y_n)\}$ 有界，那么从其中必能选取收斂的子列。

【証明】 因为$\{M_n(x_n, y_n)\}$有界，不妨設 $a\leqslant x_n\leqslant b$, $c\leqslant y_n\leqslant d$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$，由前一式及直綫上的魏尔斯脫拉斯定理知道，$\{x_n\}$ 有收斂的子列 $x_{n_k}\to x_0\in[a, b]$，現考虑数列 $\{y_{n_k}\}$，由于 $c\leqslant y_{n_k}\leqslant d$，故 $\{y_{n_k}\}$ 也有收斂的子列，記它为 $\{y_{n_{k'}}\}$，亦即 $y_{n_{k'}}\to y_0\in[c, d]$，此处$\{n_{k'}\}$ 为 $\{n_k\}$ 的子列，因之 $x_{n_{k'}}\to x_0$，于是 $M_{n_{k'}}\to M_0(x_0, y_0)$.

掩盖定理 若一开矩形集合 $\{\varDelta\}=\{\alpha<x<\beta,\ \gamma<y<\delta\}$ 掩盖一有界閉区域，那么从 $\{\varDelta\}$ 里，必可选出有限个开矩形，它們也能掩盖这个区域。

【証明】 設这个有界閉区域为 $\bar{D}$，它含在矩形 $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$ 中，設 $\bar{D}$ 不能被$\{\varDelta\}$中有限个开矩形所掩盖，則用直綫 $x=\dfrac{a+b}{2}$, $y=\dfrac{c+d}{2}$ 分矩形 $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$ 为四个相等的閉矩形，那么，至少有一个閉矩形，它所含的 $\bar{D}$ 的部分不能被 $\{\varDelta\}$ 中有限个开矩形所掩盖，把这矩形(若有几个，則任选其一)再分为四个相等的閉矩形，同上討論，如此継續做下去，可得一閉矩形套 $\{a_n\leqslant x\leqslant b_n$, $c_n\leqslant y\leqslant d_n\}$，其中每一閉矩形所含的 $\bar{D}$ 的部分不能为 $\{\varDelta\}$ 中有限个开矩形所掩盖。由是每个閉矩形 $a_n\leqslant x\leqslant b_n$, $c_n\leqslant y\leqslant d_n$ 中都至

少含有 $\bar{D}$ 的一点，任記其中一点为 (x_n, y_n)，亦即 $(x_n, y_n)\in\bar{D}$，且 $a_n<x_n<b_n$，$c_n<y_n<d_n$，但由矩形套定理，存在一点 (x_0, y_0)，滿足 $a_n\to x_0, b_n\to x_0, c_n\to y_0, d_n\to y_0$，因之 $x_n\to x_0, y_n\to y_0$，由于 (x_n, y_n) 是有界閉域 $\bar{D}$ 上的点，因之 $(x_0, y_0)\in\bar{D}$，按定理条件，在 $\{\Delta\}$ 中必有一开矩形包含 (x_0, y_0) 于其内，設为 $\alpha<x<\beta$，$\gamma<y<\delta$，亦即

$$\alpha<x_0<\beta,\quad \gamma<y_0<\delta,$$

現由 $a_n\to x_0$，$b_n\to x_0$，$c_n\to y_0$，$d_n\to y_0$，故 n 相当大时，恒有

$$\alpha<a_n<b_n<\beta,\quad \gamma<c_n<d_n<\delta,$$

即矩形 $a_n\leqslant x\leqslant b_n, c_n\leqslant y\leqslant d_n$ 包含于矩形 $\alpha<x<\beta$，$\gamma<y<\delta$ 之中，但前面已得到：$\{a_n\leqslant x\leqslant b_n,\ c_n\leqslant y\leqslant d_n\}$ 中每一矩形所含的 $\bar{D}$ 的部分不能为 $\{\Delta\}$ 中有限个开矩形所掩盖，因而得到矛盾。

关于函数 $f(M)$ 在(开)区域、閉区域(或其他集合)上連續的意义，可以完全仿照单元函数的情形，統一地定义如下：

定义　若对某一区域(或开或閉)上的任意一点 M_0，当 M 取此区域上任意的点列而趋于 M_0 时，$f(M)$ 的极限恒为 $f(M_0)$，那么称 $f(M)$ 在此区域上連續。

按照函数极限和点列极限的关系，也就是說 $f(M)$ 在开区域内每点 M_0 連續，而对閉区域的境界点 M_0，只要求对任給的 $\varepsilon>0$，能找到 $\delta>0$，使 $0<|M-M_0|<\delta$ 且 M 为閉区域上的点时恒有 $|f(M)-f(M_0)|<\varepsilon$。

在有界閉区域上連續的函数也具有和单元函数的情形一样的一些性质，其証明也大体相同，下面只作簡单的叙述。

有界性定理　若 $f(x, y)$ 在有界閉区域 $\bar{D}$ 上連續，則它在 $\bar{D}$ 上有界；亦即存在正数 M，使在 $\bar{D}$ 上恒有 $|f(x, y)|\leqslant M$。

一致連續性定理　若 $f(x, y)$ 在有界閉区域 $\bar{D}$ 上連續，則它在 $\bar{D}$ 上也一致連續；亦即对任給的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使 $\bar{D}$ 上任意两点 $M'(x', y')$，$M''(x'', y'')$，当

$$|x'-x''|<\delta,\quad |y'-y''|<\delta$$

时,恒有
$$|f(x',y')-f(x'',y'')|<\varepsilon.$$

最大値最小値定理 若 $f(x,y)$ 在有界閉区域 $\overline{D}$ 上連續,則它在 $\overline{D}$ 上必有最大値和最小値;亦卽在 $\overline{D}$ 上存在点 $M_1(x_1,y_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2)$,使对 $\overline{D}$ 上任意的点 (x,y),恒有

$$f(x_2,y_2)\leq f(x,y)\leq f(x_1,y_1),$$

也就是說,$f(x_1,y_1)$,$f(x_2,y_2)$ 分别是 $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上的最大値和最小値。

零点存在性的定理 設 $f(x,y)$ 在区域 D(不一定要有界閉区域)内連續,且在 D 内两点 $M_1(a_1,b_1)$,$N_1(\alpha_1,\beta_1)$ 异号,亦卽 $f(a_1,b_1)f(\alpha_1,\beta_1)<0$,那么用完全位于 D 内的任意的折綫 l 联結 M_1 和 N_1 时,在 l 上必有一点 $\overline{M}(\bar{x},\bar{y})$ 适合 $f(\bar{x},\bar{y})=0$。

我們只証明最后这个定理,其他定理作为练习(参見习題97)。

首先若在折綫的各个頂点上,$f(x,y)$ 均不为 0,那么逐点加以考虑,可得相邻的两个頂点,使 $f(x,y)$ 在这两点上异号,亦卽能得到 D 内的一个綫段,在綫段的两个端点,$f(x,y)$ 异号,不妨設此綫段为 l,两端点为 M_1 和 N_1,并且 $f(M_1)<0$,$f(N_1)>0$,又不妨設 $a_1<\alpha_1$,$b_1<\beta_1$。取 M_1N_1 的中点 M,若在此点有 $f(M)=0$,則把此点作为 $\overline{M}(\bar{x},\bar{y})$ 卽可。若 $f(M)>0$,則記 M_1 为 M_2,記点 M 为 N_2;若 $f(M)<0$,則記 M 为 M_2,記 N_1 为 N_2;再考虑綫段 M_2N_2,如此继續下去,可得"点对"的序列:

$$[M_1,N_1],\ [M_2,N_2],\ \cdots,\ [M_n,N_n],\ \cdots,$$
$$f(M_n)<0,\ f(N_n)>0;$$

其对应的 x 坐标和 y 坐标构成区間套

$$[a_1,\alpha_1],\ [a_2,\alpha_2],\ \cdots,\ [a_n,\alpha_n],\ \cdots,$$
$$[b_1,\beta_1],\ [b_2,\beta_2],\ \cdots,\ [b_n,\beta_n],\ \cdots,$$

显然 $\alpha_n-a_n\to 0$,$\beta_n-b_n\to 0$,于是有一点 $\overline{M}(\bar{x},\bar{y})$,适合 $a_n\to\bar{x}$,

$a_n\to\bar{x}$, $b_n\to\bar{y}$, $\beta_n\to y$, 亦即 $M_n\to\bar{M}$, $N_n\to\bar{M}$, 由于 l 上的点构成一个閉集,故 $\bar{M}$ 为 l 上的一点。又由函数极限和点列极限的关系得到

$$f(\bar{M})=\lim_{n\to\infty}f(M_n)\leqslant 0 \quad 及 \quad f(\bar{M})=\lim_{n\to\infty}f(N_n)\geqslant 0.$$

故得
$$f(\bar{M})=0.$$

三、二重极限和二次极限

第一段中所考慮的 $f(x, y)$ 的极限，是当 x, y 同时趋向于各自的极限时所得到的,此外,我們还要討論 x,y 先后相継地趋于各自的极限时 $f(x, y)$ 的极限；前者称为二重极限,后者称为二次极限。

若对任一固定的 y, 当 $x\to a$ 时, $f(x, y)$ 的极限存在:

$$\lim_{x\to a}f(x, y)=\varphi(y),$$

而 $\varphi(y)$ 在 $y\to b$ 时的极限也存在并等于 A, 亦即 $\lim_{y\to b}\varphi(y)=A$,那么称 A 为 $f(x, y)$ 先对 x、后对 y 的二次极限,記为

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x, y)=A.$$

同样可定义先对 y、后对 x 的二次极限

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b}f(x, y).$$

必須注意以下几种情形:

1) 两个二次极限都不存在,而二重极限仍可能存在,例如

$$f(x, y)=x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, \quad 当\ x\neq 0, y\neq 0;$$
$$f(0,y)=f(x,0)=0.$$

由于 $\sin\frac{1}{y}$ 和 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $y=0$ 和 $x=0$ 的函数极限不存在，故在 $(0,0)$ 点的两个二次极限都不存在,但因为

$$|f(x,y)|\leqslant|x|+|y|,$$

故
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x, y)=0.$$

2) 两个二次极限存在而不相等(此时由下面的定理二重极限必不存在)。例如

$$f(x, y)=\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y},$$

由于 $y\neq 0$ 时恒有

$$\lim_{x\to 0} f(x, y)=y-1=\varphi(y),$$

故
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x, y)=-1,$$

同理
$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x, y)=+1.$$

3) 两个二次极限存在且相等,但二重极限仍可能不存在。例如

$$f(x, y)=\frac{xy}{x^2+y^2},$$

由前已知二重极限不存在,但两个二次极限都为零。

由此可知二次极限存在与否和二重极限存在与否,二者之間沒有什么关系。但下面的定理說明:若某个二次极限和二重极限都存在,則二者一定相等,因之若两个二次极限存在而不相等,則二重极限一定不存在。又若两个二次极限存在并且相等,亦即若

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x, y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x, y),$$

我們說二次极限可以交換求极限的順序。

定理 若 $f(x,y)$ 在点 (a, b) 的二重极限

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y)=A\ (\text{有限或无限})$$

且对任一邻近于 b (可以不等于 b) 的 y,当 $x\to a$ 时,$f(x,y)$ 存在有穷极限

$$\varphi(y)=\lim_{x\to a} f(x,y),$$

則二次极限
$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x, y)=\lim_{y\to b}\varphi(y)$$

存在且等于二重极限 A.

【証明】 只就 A 为有限时来証:

由于二重极限存在，故对任給的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当

$$|x-a|<\delta,\quad |y-b|<\delta,\quad (x-a)^2+(y-b)^2\neq 0$$

时，恒有
$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

現在固定 y，$y\neq b$，而在上式中令 $x\to a$，卽得

$$|\varphi(y)-A|\leq\varepsilon,$$

亦卽当 $0<|y-b|<\delta$ 时，上式成立，这就証明了 $\lim\limits_{y\to b}\varphi(y)=A$。

同理，若在定理中把 $\varphi(y)=\lim\limits_{x\to a}f(x,y)$ 存在改为

$$\psi(x)=\lim_{y\to b}f(x,y)$$

存在，则 $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b}f(x,y)$ 存在且等于 A（参見习题 91）。

§8 无穷小量、无穷大量的阶的比較

在近似計算中，常常要考虑誤差的大小、运算的繁簡等等，例如用两种方法計算同一問題的誤差各为 $3h^2$ 和 $5h^3$，那么当 h 适当小时 $\left(h<\dfrac{3}{5}\right)$，后者显然比前者好，又若两种方法的运算量各为 $5N^2$ 和 $3N^3$，此处 N 为某一正整数，那么，当 N 适当大时，后者的运算量显然比較大，由此可見，誤差和运算量与很小的数 h 和很大的数 N 的方次很有关系，这实际上是比較当 $h\to 0$ 时无穷小量 $3h^2$ 和 $5h^3$ 趋于零的快慢問題，以及 $N\to\infty$ 时无穷大量 $5N^2$ 和 $3N^3$ 趋于无穷大的快慢問題。在以后的一些課程中，也常会遇到这种情形；为了驗証一些性质或結論成立与否，并不需要把有关的一些量实际算出，而只要估計它們趋于零或趋于 ∞ 的速度，从而就大大地簡化了証明的过程。下面我們还将引进一些記号，能熟练地运用这些記号将得到很大的方便。对无穷小量 y 和 z 的比較，有下列定义：

1）若 $\dfrac{y}{z}\to 0$ 或 $\dfrac{z}{y}\to\infty$，称 y 关于 z 是高阶无穷小，記做 $y=o(z)$。

2) 若存在常数 $A>0$, $B>0$, 使从某值以后,恒有

$$A<\left|\frac{y}{z}\right|<B,$$

则称 y, z 为同阶无穷小。

特别当 $\frac{y}{z}\to a\neq 0$ 时,由于 $\left|\frac{y}{z}\right|\to|a|>0$, 由极限性质就知道 y, z 是同阶无穷小$\left(\text{例如可取 } A=\frac{1}{2}|a|,\ B=\frac{3}{2}|a|\right)$.

3) 当 $\frac{y}{z}\to 1$ 时,称 y, z 是等价无穷小量,記为 $y\sim z$.

特别当 $\frac{y}{z}\to a$ 时, y 和 az 是等价无穷小量。又当 y 和 z 是等价无穷小量时,

$$\frac{y-z}{z}=\frac{y}{z}-1\to 0,\ \text{同理}\ \frac{y-z}{y}\to 0.$$

因之 $y-z$ 关于 z 或 y 是高阶无穷小, 所以通常可把 z 作为 y (或 y 作为 z)的近似值。

4) 若以 x 作为基本无穷小量,则当 y 与 x^k(k 为某一正数)为同阶无穷小量时,称 y 为 k 阶无穷小量。特别当

$$\frac{y}{x^k}\to a\neq 0$$

时, y 为 k 阶无穷小量。此时 y 与 ax^k 等价, 称 ax^k 为无穷小量 y 的主要部分。

在求极限过程中, 往往可以把其中的无穷小量用等价的无穷小量或它的主要部分来代替, 例如从 $\sin\frac{1}{2}x\sim\frac{1}{2}x$ 可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4+x^3}{\left(\sin\frac{1}{2}x\right)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+x^3}{\left(\frac{1}{2}x\right)^3}=8.$$

但应注意,不是乘或除的情况,不一定能这样做;例如

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n^2}}=1,$$

显然不能把 $\frac{1}{n+1}$ 用 $\frac{1}{n}$ 代替。

关于无穷大量的比较，也有类似的定义。例如当 $y\to\infty$，$z\to\infty$，而 $\frac{y}{z}\to\infty$ 或 $\frac{z}{y}\to 0$ 时，称 y 关于 z 为高阶无穷大量。

除 $y\sim x$，$y=o(x)$ 外，以后还常用 $y=O(x)$ 表示 $\frac{y}{x}$ 为有界量；特别是可用 $y=O(1)$ 表示 y 有界，用 $y=o(1)$ 表示 y 为无穷小量。

习 题

1. 写出下列数列的前四项：

(1) $x_n=\frac{1}{3n}\sin n^3$； (2) $x_n=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$；

(3) $x_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$；

(4) $x_1=a>0$，$y_1=b>0$，$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$，$y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$；

(5) $x_{2n}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$；

$x_{2n+1}=\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, \cdots)$。

2. 按定义証明下列数列为无穷小量：

(1) $\frac{n+1}{n^2+1}$； (2) $\frac{\sin n}{n}$； (3) $\frac{n+(-1)^n}{n^2-1}$；

(4) $\frac{1}{n!}$； (5) $\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$；

(6) $(-1)^n(0.999)^n$； (7) $\frac{1}{n}+e^{-n}$； (8) $\frac{e^{-n}}{n}$；

(9) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$； (10) $\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}$。

3. 举例說明下列关于无穷小量的定义是錯誤的：

(1) 对任意 $\varepsilon>0$ 存在 N，当 $n>N$ 时，成立 $x_n<\varepsilon$；

(2) 对任意 $\varepsilon>0$ 存在无限个 x_n，使 $|x_n|<\varepsilon$。

4. 按定义証明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}=\dfrac{3}{2}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(0.\overbrace{99\cdots9}^{n})=1$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}=1$;

(4) $x_n=\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n}\to1\quad(n\to\infty)$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=1$, 此处 $r_n=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}, & \text{当 } n \text{ 为偶数},\\ \dfrac{n+1}{n}, & \text{当 } n \text{ 为奇数};\end{cases}$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=3$, 此处 $r_n=\begin{cases}3, & \text{当 } n=3k\quad(k=1,2,3,\cdots),\\ \dfrac{3n+1}{n}, & \text{当 } n=3k+1,\\ 2+\dfrac{1+n}{3-\sqrt{n}+n}, & \text{当 } n=3k+2.\end{cases}$

5．按定义証明下列数列为无穷大量：

(1) $\sqrt{n}$;　(2) $n!$;　(3) $\ln n$;

(4) $\dfrac{n^2+1}{2n+1}$;　(5) $\dfrac{n^2+1}{2n-1}$;　(6) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$;

(7) ne^n。

6．(1) 按定义証明，若 $a_n\to a\,(n\to\infty)$，則对任一自然数 k，$a_{n+k}\to a\,(n\to\infty)$；

(2) 按定义証明，若 $a_n\to a\,(n\to\infty)$，則 $|a_n|\to|a|$。又反之是否成立？

(3) 若 $|a_n|\to0$，試問 $a_n\to0$ 是否一定成立？

7．証明，若 $\{x_n\}$ 为无穷小量，$x_n\neq0\,(n=1,2,3,\cdots)$，則 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷大量。

8．按定义証明，若 $x_n\to a$，且 $a>b$，則存在 N，当 $n>N$ 时，成立着 $x_n>b$。

9．若 $\{x_ny_n\}$ 收斂，能否斷定 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 亦收斂？

10．若 $\{x_n\}$ 单调，它的某一子列 $x_{n_k}\to a\;(k\to\infty)$，試証 $x_n\to a\;(n\to\infty)$。

11．举出滿足下列要求的数列：

(1) 无界数列，但不是无穷大量；

(2) 有界数列，但发散；

(3) 发散数列，但含有若干收斂的子列。

12．証明，若 $\{x_n\}$ 为无穷大量，$\{y_n\}$ 为有界变量，則 $\{x_n\pm y_n\}$ 为无穷大量。

並由此計算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin n+\dfrac{n^3}{\sqrt{n^2+1}}\right)$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\operatorname{arc\,tg} n)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n+(-1)^n\left(\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)\right]$.

又: 两个无穷大量的和的极限怎样? 試討論种种可能情形。

13. 討論无穷大量和无穷小量的和、差、商的极限。

14. 舉例說明无穷大量和无穷小量的乘积可能发生的种种情形:收斂于0, ∞或一常数,有界且发散或无界。

15. 利用极限性质及运算計算:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$;

(3) 利用 $(1+h)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^k=1+nh+\dfrac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n$ 証明:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0\quad(a>1)$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^5}{e^n}=0\quad(e\approx 2.7)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+2n^2-n+1}{2n^3-3n^2+2}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{4^n}}$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(\sin n!)\left(\dfrac{n-1}{n^2+1}\right)^{10}-\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{(n+1)\cdot n}\right)\dfrac{2n^2+1}{n^2-1}\right]$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

16. 若 $x_n\to a>0$, 試証:

(1) $\sqrt{x_n}\to\sqrt{a}$;

(2) $\sqrt{a_0x_n^m+a_1x_n^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x_n+a_m}$

$\to\sqrt{a_0a^m+a_1a^{m-1}+\cdots+a_{m-1}a+a_m}$.

17. 对数列$\{x_n\}$，若$x_{2k}\to a\ (k\to\infty)$，$x_{2k+1}\to a\ (k\to\infty)$，証明：$x_n\to a\ (n\to\infty)$。

18. 若$x_n\to\infty\ (n\to\infty)$，$\{y_n\}$自某項以后都有$|y_n|\geqslant m>0$，則

$$x_ny_n\to\infty\quad(n\to\infty).$$

19. 証明单調减少而有下界的数列必有极限。

20. 利用单調有界必有极限的性质，証明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求出之：

(1) $x_1=\sqrt{2}$，…，$x_n=\sqrt{2x_{n-1}}$；

(2) $x_1=\sqrt{c}$，…，$x_n=\sqrt{c+x_{n-1}}$，其中c为一正数；

(3) $x_0=1$，$x_1=1+\dfrac{x_0}{1+x_0}$，…，$x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}$。

21. 若$x_1=a>0$，$y_1=b>0\ (a>b)$，

$$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n},\quad y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2},$$

証明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$　[提示：$x_n\leqslant y_n$]。

22. 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，試証：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$。

23. 利用单調有界必有极限的定理証明下列数列存在极限：

(1) $x_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$；　　(2) $x_n=\dfrac{1}{3+1}+\dfrac{1}{3^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{3^n+1}$；

(3) $x_n=\dfrac{n^k}{a^n}$　($a>1$，k为正整数)；

(4) $x_n=\sqrt[n]{a}$　($0<a<1$)。

24. 若x_n严格上升，y_n严格下降，而x_n-y_n为无穷小量，則x_n和y_n必有同一极限。

25. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{1}{n}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{-n}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}+\dfrac{x^2}{2n^2}\right)^{-n}$。

26. 从定义出发証明下确界的唯一性。

27. 設$\beta=\sup\{E\}$，$\beta\overline{\in}E$，試証自E中可选取数列$\{x_n\}$，其极限为β；又若$\beta\in E$，則情形如何？

28. 举例：

(1) 有上确界无下确界的数列；(2) 达到上确界的数列；

(3) 有下确界无上确界的数列;

(4) 达到下确界而达不到上确界的数列。

29. 試証收斂数列必有上确界和下确界，趋于 $+\infty$ 的数列必有下确界，趋于 $-\infty$ 的数列必有上确界。

30. 求数列 $\{x_n\}$ 的上、下确界:

(1) $x_n=1-\frac{1}{n}$; (2) $x_n=-n[2+(-2)^n]$;

(3) $x_{2k}=k$, $x_{2k+1}=1+\frac{1}{k}$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$.

31. 試分析区間套定理的条件：若将閉区間列改为开区間列，結果怎样？若将条件 $[a_1, b_1]\supset[a_2, b_2]\supset\cdots$ 去掉或将条件 $b_n-a_n\to 0$ 去掉，結果怎样？試举例說明。

32. 若 $x_n\to\infty$，証明它的任一子列 $x_{n_k}\to\infty$ $(k\to\infty)$.

33. 若 $\{x_n\}$ 无界，则必存在一个子列 $x_{n_k}\to\infty$ $(k\to\infty)$.

34. 若 $\{x_n\}$ 无界，且非无穷大量，則必存在两个子列 $x_{n_k}^{(1)}\to\infty$, $x_{n_k}^{(2)}\to a$ (a 为某有限数)。

35. 有界数列 $\{x_n\}$ 若不收斂，則必存在两个子列 $x_{n_k}^{(1)}\to a$, $x_{n_k}^{(2)}\to b$ $(a\neq b)$.

36. 若在区間 $[a, b]$ 内的两个数列 $\{x_n^{(1)}\}$ 及 $\{x_n^{(2)}\}$ 滿足 $x_n^{(1)}-x_n^{(2)}\to 0$ $(n\to\infty)$，則在此两数列中能找出具有相同足标 n_k 的子列，使

$$x_{n_k}^{(1)}\to x_0,\quad x_{n_k}^{(2)}\to x_0\quad (k\to\infty).$$

37. 利用柯西收斂原理討論下列数列的收斂性:

(1) $x_n=a_0+a_1q+a_2q^2+\cdots+a_nq^n$ $(|q|<1, |a_k|\leqslant M)$;

(2) $x_n=1+\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\frac{\sin 3}{2^3}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$;

(3) $x_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

38. 写出下列式子的分析定义:

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$;

(3) $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=A$; (4) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$;

(5) $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=A$; (6) $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=+\infty$.

39. 求下列函数在所示点的左右极限:

(1) $f(x)=\begin{cases}0, & x>1,\\ 1, & x=1,\\ x^2+2, & x<1,\end{cases}$ 在点 $x=1$；

(2) $f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 是 }[0,1]\text{ 中有理数},\\ 1, & x\text{ 是 }[0,1]\text{ 中无理数},\end{cases}$ 在点 $x=\frac{1}{2}$.

40. (1) 举出一个函数，使它定义在 $[0,2]$ 上，且除 $x=1$ 之外每点的极限都不存在；

(2) 作一函数，使它在 $x=1$ 的任何邻域内无界，但 $f(x)$ 在 $x=1$ 又不以 ∞ 为极限。

41. 用分析定义証明：

(1) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{1}{2}$；　(2) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{1}{6}$；

(3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2$；　(4) $\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-2)(x-1)}{x-3}=0$；

(5) $\lim\limits_{t\to1}\frac{t(t-1)}{t^2-1}=\frac{1}{2}$；　(6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-x^2}{1+x^2}=1$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+2}=1$；　(8) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x}{x^2-9}=\infty$；

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x+1}=\infty$；　(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+1}{2x+1}=\frac{3}{2}$.

42. 求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；　(2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；　(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$；

(5) $\lim\limits_{t\to1}\frac{t^2(t-1)}{t^2-1}$；　(6) $\lim\limits_{t\to1}\frac{t^2-\sqrt{t}}{\sqrt{t}-1}$；

(7) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$；　(8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$；

(9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$　(m, n 为自然数)；

(10) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$；　(11) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$；

(12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x}{x^2}$；　　(13) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x}{x^2-9}$；

(14) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+4}{\sqrt{x}}$；　　(15) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-7}{2x+\sqrt{x}}$。

43. 設 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，

式中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 为 x 的多項式，且 $P(a)=Q(a)=0$，問下式有哪些可能的值：$\lim\limits_{x\to a}R(x)$。

44. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x-\sin 3x}{x}$；

(3) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$；

(5) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$；　　(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$，

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$　(m, n 为整数)；

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$；　　(10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$；

(11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin 2x}$；　　(12) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$；

(13) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$。

45. 証明第二章§4 性质 1～6。

46. 若在点 a 的某邻域内有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，并且 $g(x)$ 和 $h(x)$ 在 a 的极限存在并且都等于 A，証明 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$。

47. 証明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ (A 为有限) 的充要条件为对每一个 x_n，$x_n\to+\infty$，恒有 $f(x_n)\to A$。

48. 証明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$ 的充要条件为对每一个 x_n，$x_n\to+\infty$，恒有

$$f(x_n)\to\infty。$$

49. 討論：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin x$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x \operatorname{arc\,tg} x$;　　　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty} x \operatorname{tg} x$;

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

50. 証明第二章 § 4 函数极限运算法則 1～3。

51. 按定义証明下列函数在定义范圍内連續：

(1) $y=\sqrt{x}$;　　　　(2) $y=\dfrac{1}{x}$;

(3) $y=|x|$;　　　　(4) $y=\sin\dfrac{1}{x}$.

52. 試求下列函数的連續范圍(利用連續函数的运算)：

(1) $y=\operatorname{tg} x$;　　　　(2) $y=\dfrac{1}{x^n}$;

(3) $y=\sec x+\csc x$;　　　　(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$.

53. 若 $f(u)$ 在 u_0 連續，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，試証 $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]=f(\lim\limits_{x\to x_0} g(x))$.

又若 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，$g(x)$ 在 x_0 連續，$g(x_0)=u_0$，上式是否亦成立?

54. 以例　$g(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant 1,\\ 2, & x>1,\end{cases}$　$f(u)=\begin{cases}u, & u\leqslant 1,\\ 3u-5, & u>1,\end{cases}$

說明：$g(x)$ 在 $x=x_0$ 点，$f(u)$ 在 $u=u_0=g(x_0)$ 点不連續，而 $f(g(x))$ 在 $x=x_0$ 点仍可能連續。

55. 以例　$g(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 1,\\ 5, & x>1,\end{cases}$　$f(u)=9$,

說明：若 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 点不連續，$f(u)$ 在 $u=u_0=g(x_0)$ 点連續，則 $f(g(x))$ 在 $x=x_0$ 点可能連續。

56. 以例　$g(x)=x^2$，$f(u)=\begin{cases}u, & u\leqslant 1,\\ 3u-5, & u>1,\end{cases}$

說明：$g(x)$ 在 $x=x_0$ 点連續，$f(u)$ 在 $u=u_0=g(x_0)$ 点不連續，$f(g(x))$ 在 $x=x_0$ 点可能不连续。

57. 研究下列函数的連續性，并繪出其图形：

(1) $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{若 } x\neq 2,\\ 4, & x=2;\end{cases}$

(2) $y=\begin{cases} \left|\dfrac{\sin x}{x}\right|, & x\neq 0; \\ 1, & x=0; \end{cases}$

(3) $y=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0, \\ 1, & x=0; \end{cases}$

(4) $y=[x]$;　　(5) $y=\operatorname{sgn} x$.

58．說明下列函数在所示点的左右极限情形：

(1) $y=\begin{cases} \dfrac{1}{2x}, & 0<x\leqslant 1, \\ x^2, & 1<x<2, \\ 2x, & 2<x<3, \end{cases}$　（在 $x=1.5, 2, 1$ 三点）；

(2) $y=x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$　（在 $x=0$ 点）；

(3) $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+1}{2^{\frac{1}{x}}-1}$　（在 $x=0$ 点）；

(4) $y=\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right]$　$\left(在 x=\dfrac{1}{n} 点\right)$；

(5) $D(x)=\begin{cases} 1, & x=有理数, \\ 0, & x=无理数, \end{cases}$　（在任一点）；

(6) $y=\dfrac{(x-1)(-1)^{[x]}}{x^2-1}$　（在 $x=-1$ 及 $x=1$）.

59．研究下列函数各个不連續点的性质（即为何种不連續点）：

(1) $y=\dfrac{x}{(1+x)^2}$;　　(2) $y=\dfrac{1+x}{1+x^3}$;

(3) $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$;　　(4) $y=\dfrac{x}{\sin x}$;

(5) $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$;　　(6) $y=[x]+[-x]$;

(7) $y=\dfrac{1}{\log|x|}$;　　(8) $y=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$;

(9) $y=\begin{cases} \dfrac{1}{p}, & x=\dfrac{q}{p}, \quad q, p>0 为互质的整数, \\ 0, & x=无理数; \end{cases}$

［注］这个函数称为黎曼（Riemann）函数.

它有一个重要性质：对任何$\varepsilon>0$，在任何有限区間上使得$y\geqslant\varepsilon$的那种x只有有限多个。利用这一性质可以証得：任何无理数x皆为黎曼函数的連續点，任何有理数x皆为間断点。

(10) $y=\begin{cases}x, & \text{当 } |x|\leqslant 1,\\ 1, & \text{当 } |x|>1;\end{cases}$

(11) $y=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2}, & \text{当 } |x|\leqslant 1,\\ |x-1|, & \text{当 } |x|>1;\end{cases}$

(12) $y=\begin{cases}\sin \pi x, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$

60. 若$f(x)$連續，$|f(x)|$和$f^2(x)$是否連續？又若$|f(x)|$或$f^2(x)$連續，$f(x)$是否連續？

61. 求下列极限(对于数列可以利用函数极限与数列极限关系)：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{5}{n^2}}{\operatorname{tg}\dfrac{1}{n^2}}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^2}}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+3x)}{x}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\log(x+1)-\log x]$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

62. 当$x=0$时下列函数$f(x)$无定义，試定义$f(0)$的数值，使$f(x)$在$x=0$連續：

(1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$；　　(2) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$；

(3) $f(x)=\sin x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$；　　(4) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

63. (1) 函数$f(x)$当$x=x_0$时是連續的，而函数$g(x)$当$x=x_0$时是不連續的，問此二函数的和在x_0点是否連續；

(2) 当$x=x_0$时函数$f(x)$和$g(x)$二者都是不連續的，則此二函数的和

$f(x)+g(x)$在已知点 x_0 是否必为不連續的？举出适当的例子。

64. (1) 函数 $f(x)$ 于 x_0 連續，而函数 $g(x)$ 于 x_0 不連續；(2) 当 $x=x_0$ 时函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都不連續，则此二函数的乘积 $f(x)$, $g(x)$ 在已知点 x_0 是否必不連續？举出适当的例子。

65. 若 $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 連續，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，証 $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 有界。

66. 若对任一 $\varepsilon>0$, $f(x)$ 在 $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ 連續，問：

(1) $f(x)$ 是否在 (a,b) 連續？

(2) $f(x)$ 是否在 $[a,b]$ 連續？

67. (1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 連續，設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值分别为 M 和 m, c 为任何一个实数，$m\leqslant c\leqslant M$，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=c$；

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 連續，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，则在 $[x_1,x_n]$ 中必有 ξ，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

68. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續，且无零点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 恒为正(或負)。

69. (1) 証明单調有界函数存在左、右极限；

(2) 証明单調有界函数的一切不連續点皆为第一类的不連續点。

70. 若单調有界函数 $f(x)$，可取到 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之間的一切值，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 連續。

71. 設 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$ 及 $\lim\limits_{x\to A}\psi(x)=B$，则由此是否可推出 $\lim\limits_{x\to a}\psi[\varphi(x)]=B$？研究这个例子：当 $x=\dfrac{p}{q}$ (其中 p 与 q 是互质的整数) 时，$\varphi(x)=\dfrac{1}{q}$；当 x 为无理数时，$\varphi(x)=0$，即黎曼函数 (参見习題 55(9))；当 $x\neq 0$ 时 $\psi(x)=1$；当 $x=0$ 时 $\psi(x)=0$，且 $x\to 0$.

72. 証明連續函数当有理点时为 0，则此函数恒为 0.

73. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有第一类不連續点 (可以有无穷个)，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界。

74. 証明 $f(x)$ 在 $x=a$ 点連續的充要条件：对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，当 $|x'-a|<\eta$ 和 $|x''-a|<\eta$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

75. 証明：函数 $f(x)$ 在 (a,b) 連續，并且 $f(a+0)$, $f(b-0)$ 存在，则 $f(x)$ 可取到 $f(a+0)$, $f(b-0)$ 之間，但可能不等于 $f(a+0)$, $f(b-0)$ 的一

切值。

76. 若 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 連續，証明 $\max(f(x), g(x))$ 在 $[a, b]$ 亦連續。

77. 若 $f(x)$ 是連續的，証明对任何 $c>0$，函数

$$f(x)=\begin{cases}-c, & \text{若 } f(x)<-c,\\ f(x), & \text{若 } |f(x)|\leqslant c,\\ c, & \text{若 } f(x)>c\end{cases}$$

是連續的。

78. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 連續，恒正，按定义証明 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $[a, b]$ 連續。

79. 若 $f(x)$ 在任何有限区間有界，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 为有限，則 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 为有界。

80. 用一致連續定义驗証：

(1) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在 $[0, 1]$ 上是一致連續的；

(2) $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是一致連續的；

(3) $f(x)=\sin x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致連續。

81. 証明 (a, b) 上的連續函数为一致連續的充分必要条件是：$f(a+0)$, $f(b-0)$ 存在且有限。

82. 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的任一有限閉区間上連續，則它在 $(-\infty, +\infty)$ 上的任一有限开区間上也一致連續。

83. 函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 及 $(-l, l)$ 上 $(l>0)$ 是否一致連續？

84. 若 $f(x)$ 在有限或无穷开区間 X 内連續，則它在这个区間内为内閉一致連續（即对任何閉区間 $Y\subset X$，$f(x)$ 在 Y 为一致連續）。

85. 証明 (a, b) 上的一致連續函数必有界。

86. 按定义証明，有限区間上的两个一致連續的函数的和、积仍一致連續。

87. 若 $f(x)$ 在 $[a, \infty)$ 上連續，而 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在且有限，試証 $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上一致連續。

88. 叙述并証明 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的柯西收斂原理。

89. 确定并繪出下列函数之定义域：

(1) $u=\sqrt{x}-y$；　　(2) $u=\sqrt{x-y+1}$；

(3) $u=\log(-x-y)$；　　(4) $u=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$；

(5) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}$　$(R>r)$。

90. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$;　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}$;　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$;

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\y\to +\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$;　　(6) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\y\to +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$;

(7) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\y\to 0}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$;　　(8) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

91. 証若 $\lim\limits_{\substack{y\to a\\x\to b}} f(x, y)=A$ 存在，而当 x 取任何与 a 邻近之值时，极限 $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)=\psi(x)$ 存在，则二次极限存在，且等于 A：

$$\lim_{x\to a}\lim_{x\to b} f(x, y)=\lim_{\substack{x\to a\\y\to b}} f(x, y)=A.$$

92. 試举出两个二次极限不等的例子：

(1) 試举出只有一个二次极限存在的例子；

(2) 試举出二重极限存在，但二次极限不全存在的例子。

93. 討論下列函数在点 (0, 0) 的二次极限和二重极限：

(1) $f(x, y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$;

(2) $f(x, y)=(x+y)\cdot\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{y}$.

94. 求下列函数的不連續点：

(1) $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$;　　(2) $u=\ln(1-x^2-y^2)$;

(3) $u=\frac{1}{\sin x\sin y}$;　　(4) $u=\log\frac{1}{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$.

95. 証明函数

$$f(x, y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

分别对于每一变数 x 和 y 是連續的，但非二変数总体的連續函数。

96. 若 $f(x, y)$ 在某一范圍 G 內对变数 x 为連續，对变数 y 滿足李普希茲 (Lipschitz) 条件，即对任何

$$(x, y')\in G,\ (x, y'')\in G$$

有 $$|f(x, y')-f(x, y'')|\leqslant L|y'-y''|,$$

其中 L 为常数，则此函数在 G 内是連續的。

97．証明有界閉域上二元連續函数的有界性定理，最大（小）値定理及一致連續性定理。

98．求下列无穷小量当 $x\to 0$ 时的阶和主要部分：

(1) x^3+x^6；　(2) $4x^2+6x^3-x^5$；

(3) $\sqrt{x}\cdot\sin x$；　(4) $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x}}$；

(5) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$；　(6) $\operatorname{tg} x-\sin x$；

(7) $\ln(1+x)$。

99．当 $x\to\infty$ 时，求下列变量的阶和主要部分：

(1) x^2+x^5；　(2) $4x^2+6x^4-x^5$；

(3) $\sqrt[3]{x^2\sin\frac{1}{x}}$；　(4) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$；

(5) $\frac{2x^5}{x^6-3x+1}$。

100．試証：当 $\Delta x\to 0$ 时

(1) $o(\Delta x^m)+o(\Delta x^n)=o(\Delta x^n)$　$(m>n>0)$；

(2) $o(\Delta x^m)\cdot o(\Delta x^n)=o(\Delta x^{m+n})$　$(m, n>0)$；

(3) $|f(x)|\leqslant M$，则 $f(x)o(\Delta x)=o(\Delta x)$；

(4) $\Delta x^m\cdot o(1)=o(\Delta x^m)$。

101．利用无穷小量阶的关系計算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$。

附录 实数的理論

在第二章中，我們还剩"确界存在定理"沒有証明，但这牽涉到有理数和实数的一个根本不同点。这个定理是对实数而言的，也就是說，对于一个有上(下)界的实数数列，一定存在一个满足上(下)确界定义的实数；假若仅仅就有理数来考虑，这个定理并不成立；也就是說：对一个有上(下)界的有理数数列，不一定存在一个满足上(下)确界定义的有理数。例如有理数

$$1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ \cdots$$

的上确界 $\sqrt{2}$ 是一个无理数，因此，若仅就有理数来考虑，这个数列的上确界是不存在的。同理，若仅就有理数来考虑，单調有界变量必有极限的定理、区間套定理、魏尔斯脫拉斯定理、柯西收斂原理这些数学分析中最基本的定理都不成立了。事实上，这些定理都說明了同一个事实，即实数的連續性(或完备性)；而对有理数而言是不具备这种性质的。

这种差异也可以这样直观地来看：就实数而言，我們认为它与一条直綫(数軸)上的点成一一对应的关系，但就有理数而言，虽然它在数軸上的分布是稠密的，亦即在任意两个有理数之間必有无穷个有理数，例如有理数 a 和 b 之間存在着有理数 $a+\frac{r}{n}(b-a)$ $(r=1,2,\cdots,n-1;\ n=1,2,\cdots)$，但数軸上还有許許多多的点不能用有理数来表示，例如直角边为单位长的直角三角形的斜边的长度 $\sqrt{2}$，就不是有理数，也就是不能用两整数 p,q 的商的形式 $\frac{p}{q}$ 来表示。因为若 $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ (p,q 是互质的整数)，那么由 $2q^2=p^2$，

p 必为一偶数，令 $p=2p_1$ 其中 p_1 是一整数，则 $2q^2=4p_1^2$，亦即 $q^2=2p_1^2$，而 q 也是偶数，这与 p，q 互质矛盾。

为了說明实数的連續性，就必須給实数一个确切的定义。正是由于上述的那些定理都說明了同一个問題，卽实数的連續性，从而由其中的任一定理出发能够推出其他的定理就毫不奇怪了。因此許多学者也从上面这些定理出发，由有理数来定义实数。例如用单調有界的有理数数列定义一个实数，用满足柯西收斂原理的条件的有理数数列来定义一个实数等等。这里我們只介紹戴德金(Dedekind)定义实数的有理数分划。当然我們假設有理数的概念、大小順序、四則运算及运算法則等已經建立好了，在这基础上来定义实数和相类似的一些概念。由于本章只供讀者参考，因此不拟詳細叙述。

一、有理数的分划，实数的定义及其运算，实数的分划

定义　将全体有理数分为 A，A' 两类，使

1) A，A' 中都有数(这里和下面所說的数都指有理数)。

2) A' 中的数恒大于 A 中的任一数。

有理数的这种划分称为一个有理数的分划，記做 $A|A'$。并且称 A' 为上部，A 为下部。

［例 1］　凡大于 2 的数(指有理数，下同)属于 A'，其他的数属于 A。

［例 2］　凡小于 2 的数属于 A，其他的数属于 A'。

［例 3］　凡平方大于 2 的正数属于 A'，其他的数属于 A。容易証明它們都满足上述的条件，因此每一个都构成一个有理数分划。由此可知，有理数分划有以下几种情况。

1) A 中有最大数，此时 A' 中必无最小数。如例 1。

2) A' 中有最小数，此时 A 中必无最大数。如例 2。

3) A 中无最大数，A' 中亦无最小数。例 3 就是这种情形；因

为若 x 为 A' 中任一数，我們一定能找到一个正有理数 a，使 $x-a$ 也属于 A'. 这只要

$$(x-a)^2>2 \text{ 亦即 } x^2-2>2ax-a^2$$

就行了，而要后式成立，只要 $2ax<x^2-2$，或

$$a<\frac{x^2-2}{2x}$$

即可。由于 $x\in A'$，故 $x^2>2$，因此这样的正数 a 总可以得到。同理可証 A 中无最大数。

1)，2) 两种分划称为第一类分划，而情形 3) 的分划称为第二类分划。但对每一个有理数，可以作出以它为 A' 中最小数的分划，也可以作出以它为 A 中最大数的分划，为确定起見，今后当 A 中有最大数时，我們把这数归到 A' 中，那么它就成为 A' 中的最小数。于是，只剩下 2)，3) 两种分划。我們称每一分划定义一个实数。特别对第一类分划，我們令这实数(分划 $A|A'$)与 A' 中的最小数相对应，由是得到由第一类分划所定义的实数与有理数之間的一个一一对应的关系。此外，我們称不对应于有理数的实数(即第二类分划)为一新数，称之为无理数。

实数的大小 設有两实数 $\alpha=A|A'$，$\beta=B|B'$:

1) 若 A 与 B 相合(此时 A' 与 B' 亦必相合)，称 α 与 β 相等，記为 $\alpha=\beta$.

2) 若 A 包含 B 且不与 B 相合(記为 $A\supset B$ 或 $B\subset A$，此时必有 $B'\supset A'$)，称 α 大于 β (記为 $\alpha>\beta$)或 β 小于 α (記为 $\beta<\alpha$).

由这个定义可以知道:

1) 对应于有理数的分划，其大小順序与它們所对应的有理数的大小順序完全相同。

2) 設 $\alpha=A|A'$，$\beta=B|B'$，那么三关系 $\alpha>\beta$，$\alpha=\beta$，$\alpha<\beta$ 必有一个成立，且只有一个成立。

3) 設$\alpha=A|A'$, $\beta=B|B'$, $\gamma=C|C'$而$\alpha>\beta$, $\beta>\gamma$則$\alpha>\gamma$.

4) 設$\alpha=A|A'$, 而与有理数r对应的分划为$\gamma=R|R'$, 則当$r\in A$时, $\alpha>\gamma$; 当$r\in A'$时, $\alpha\leqslant\gamma$.

【証明】 当α对应于有理数时，定理显然成立。若α不对应于任何有理数而$r\in A'$,則因为A'中无最小数，故有有理数a'适合$a'\in A'$而$a'<r$,亦即$a'\in R$,由定义即得$\alpha<\gamma$. 同理可証$r\in A$时, $\alpha>\gamma$.

5) 实数的稠密性：在任意两不相等的实数$\alpha=A|A'$, $\beta=B|B'$, 之間,必有无穷个对应于有理数的实数。

【証明】 設$\alpha<\beta$, 按定义亦即存在有理数r, 适合$r\in A'$但$r\in B$, 因为B中无最大数(若有最大数，已移到B'中了)，故有无穷个有理数,它們都属于B而又属于A', 由4)即知本定理的正确性。

以后,我們記对应于有理数零的分划为0, 并且称大于0的分划为正实数,小于0的分划为負实数。

下面介紹实数的运算。

【加法】 設$\alpha=A|A'$, $\beta=B|B'$, 把A'中任一数与B'中任一数相加,其結果归到集合C'中,其余的数放到集合C里,那么$C|C'$构成一个分划,称它为α, β的和,記做$\alpha+\beta$.

【α的負数】 設$\alpha=A|A'$, 将A'和A中的数变号放到C和C'中,則$C|C'$构成一个分划,称它为α的負数,記为$-\alpha$.

由是可以証明：若α为負实数,則$-\alpha$为正实数。当$\alpha\neq0$时,称α与$-\alpha$中的正实数为α的絕对值,記为$|\alpha|$, 又規定$|0|=0$.

有了負数的概念,就可以把α, β的差$\alpha-\beta$定义为$\alpha+(-\beta)$. 又从絕对值的概念,可以定义乘法。

【乘法】 若$\alpha>0$, $\beta>0$, 把A'中任一数与B'中任一数相乘,其結果放到C'中,其余的数放到C中,那么$C|C'$构成一个分划,

称为 α, β 的积，記为 $\alpha\beta$。

对一般情形，我們定义

$$\alpha\beta=\begin{cases}|\alpha||\beta|, & \text{当 } \alpha,\ \beta \text{ 同为正，或同为负时，}\\ -|\alpha||\beta|, & \text{当 } \alpha,\ \beta \text{ 中一为正、一为负时，}\\ 0, & \text{当 } \alpha,\ \beta \text{ 中至少有一等于 } 0 \text{ 时。}\end{cases}$$

【倒数】 設 $\alpha>0$，取負数、零及 A' 中所有数的倒数构成 C，其余的数为 C'，則 $C|C'$ 构成一个分划，称为 α 的倒数，記为 $\frac{1}{\alpha}$。又当 $\alpha<0$ 时，規定 $\frac{1}{\alpha}$ 为 $-\frac{1}{|\alpha|}$。

可以証明，上面定义的一些分划滿足分划的条件，因此它們的确定义一个实数。我們只以加法和乘法为例（負数和倒数的情形是很容易証明的）：設 a, a', b, b' 各为 A, A', B, B' 中任意的数，作和 $a+b$ 和 $a'+b'$，那么任意的和 $a+b$ 小于任意的和 $a'+b'$，因此一切的和 $a+b$ 都属于 C，一切的和 $a'+b'$ 都属于 C'，这就証明了分划定义中的条件 1)（对乘法来說，由 $a'b'\in C'$ 和零、負数属于 C 即得），現若 $r\geqslant a'+b'$，由于 $r=a'+(r-a')$ 而 $r-a'\geqslant b'$，故 $r-a'\in B'$，由此以及 $a'\in A'$ 即知 $r\in C'$，这就証明了凡不小于某一和 $a'+b'$ 的数一定属于 C'，亦即 C 中的数只能小于 C' 中的数，因此証明了 2)（对乘法来說，由 $r\geqslant a'b'$，改写 $r=a'\frac{r}{a'}$，$\frac{r}{a'}\geqslant b'$ 即得）。

由定义我們还可証明：若 $\gamma_1=R_1|R_1'$, $\gamma_2=R_2|R_2'$ 分别为对应于有理数 r_1, r_2 的实数，那么 $\gamma_1+\gamma_2=C|C'$ 是对应于有理数 r_1+r_2 的实数。

事实上由 r_1, r_2 分别是 R_1', R_2' 中的最小数，即得 r_1+r_2 是 C' 中的最小数。

同理可証明乘法、負数、倒数的情形，因之也得到减法和乘法的情形，也就是若 γ_1, γ_2 为对应于有理数 r_1, r_2 的实数，則 γ_1, γ_2

的和、差、积、商也对应于 r_1, r_2 的和、差、积、商。

最后，我們可以証明：所有关于有理数的运算法则，对实数也是成立的，这些运算法则是：

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha,\quad (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma),$$

$$\alpha+0=\alpha,\quad \alpha+(-\alpha)=0,$$

若 $\alpha>\beta$，則 $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$，

$$\alpha\beta=\beta\alpha,\quad (\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma),$$

$\alpha\cdot I=\alpha,\quad \alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=I$（此处 I 为对应于有理数 1 的实数），

$$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma,$$

若 $\alpha>\beta$，則当 $\gamma>0$ 时，$\alpha\gamma>\beta\gamma$，当 $\gamma<0$ 时 $\alpha\gamma<\beta\gamma$。

我們只証明其中几个，其他的运算法則亦可类似地証明。先叙述一个引理。

引理　对任意的分划 $A|A'$ 和任給的有理数 $\varepsilon<0$，可得有理数 $a\in A$ 和 $a'\in A'$，使 $a'-a=\varepsilon$。

【証明】　在 A 中任取一有理数 c，作 $c+n\varepsilon$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$，由于 n 充分大时，$c+n\varepsilon$ 可以大于任給的有理数，故恒有 n，使 $c+n\varepsilon\in A'$，因之可取到相邻的二数 $c+(N-1)\varepsilon$ 和 $c+N\varepsilon$，它們分别属于 A 和 A'。这样便証明了引理。

1)　$\alpha+\beta=\beta+\alpha$。

【証明】　設 $\alpha=A|A'$, $\beta=B|B'$, $\alpha+\beta=C|C'$, $\beta+\alpha=D|D'$，按定义 C' 为 $a'+b'$ 的全体，此处 $a'\in A'$，$b'\in B'$；但另一方面，D' 为 $b'+a'$ 的全体，而对有理数 a'，b'，恒有 $a'+b'=b'+a'$，故得到我們的結論。

2)　$\alpha+(-\alpha)=0$。

【証明】　設 $\alpha=A|A'$，$a\in A$，$a'\in A'$，$\alpha+(-\alpha)=C|C'$，按定义 C' 中为所有的数 $a'-a$，C 含所有的数 $a-a'=-(a'-a)$，但由引

理，$a'-a$ 可任意小且均为正数，故 C' 中为所有的正有理数，現若有理数 $0\in C'$，則它为 C' 的最小数；若 $0\in C$，則它为 C 的最大数，証毕。

3）若 $\alpha>\beta$，則 $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$.

【証明】 設 $\alpha=A|A'$，$\beta=B|B'$，$\gamma=C|C'$，由于 $\alpha>\beta$，故存在不相等的有理数 r_1，r_2，它們都属于 A，而又属于 B'，設 $r_2>r_1$，由引理可得 $r\in C$，$r'\in C'$ 使 $r'-r=r_2-r_1$，由是 $r'+r_1=r+r_2$. 但由 $r'\in C'$，$r_1\in B'$，故此数属于 $\beta+\gamma$ 的上部，而由 $r\in C$，$r_2\in A$，此数属于 $\alpha+\gamma$ 的下部，証毕。

4）$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$.

【証明】 当 α，β，γ 均为正数时，可与 1）相类似地証明；当三数至少有一为 0 时，由 $\alpha\cdot 0=0$ 和 $\alpha+0=0$ 卽得；現設 $\alpha>0$，$\beta>0$，$\gamma<0$，由

$$(\alpha+\beta)|\gamma|=\alpha|\gamma|+\beta|\gamma|$$

移項（这相当于两边加上 $(\alpha+\beta)|\gamma|$，$\alpha|\gamma|$，$\beta|\gamma|$ 的負数）得出

$$(-\alpha|\gamma|)+(-\beta|\gamma|)=-(\alpha+\beta)|\gamma|,$$

按乘法定义卽得。同理可証明其他情形。

綜上所述，对应于有理数的分划的大小順序、四則运算以及运算法則等完全和有理数的情况相同，因之沒有区别的必要，今后我們就称对应于有理数 r 的分划为有理数 r，不对应于有理数的分划为无理数，于是有理数和无理数全体构成实数系。

由有理数的分划产生了有理数以外的数，亦卽无理数或对应于第二类分划的数，那么，若类似地定义实数的分划能不能得出实数以外的数呢？下面将回答这一問題。

定义 将全体实数分为 A，A' 两部分，使

1）A，A' 中皆有数（这里和下面的"数"均指实数）。

2）A' 中任意一数大于 A 中任意的数。

实数的这种划分称为实数的分划，記为 $A|A'$。

定理　任一实数分划 $A|A'$，或是 A 中有最大数，A' 中无最小数；或是 A' 中有最小数，A 中无最大数。

【証明】　令 A 中所有的有理数属于 B，A' 中所有的有理数属于 B'，显然 $B|B'$ 为一有理数分划，故确定一实数 α，而 α 必属于 A 或 A'，設 $\alpha\in A$，現証 α 就是 A 中的最大数。事实上若有 $\alpha^*\in A$，而 $\alpha^*>\alpha$，从实数大小的定义知道必有有理数 r，满足 $\alpha<r<\alpha^*$。由于 $r>\alpha=B|B'$，故 $r\in B'$，因之 $r\in A'$。但由 $r<\alpha^*\in A$，故 $r\in A$，矛盾。同理，若 $\alpha\in A'$，可証 α 是 A' 中最小数。

由这个定理就知道实数分划不能产生新数，这也說明了实数的連續性，因之这个定理也称为实数的連續性定理。用这个定理就可以証明确界存在性定理，我們只証明有上界的集合必有上确界。

設集合 E 有上界，令大于 E 中一切数的实数属于 B'，其余的实数属于 B，易知 $B|B'$ 构成一实数分划，由上面的定理知道 $B|B'$ 确定实数 β，茲証 β 滿足上确界定义的两个条件，亦即

1）若 $x\in E$，則 $x\leqslant\beta$，事实上按 $B|B'$ 定义，E 中一切数均属于 B。

2）对任意的 $\varepsilon>0$，有 $x_0\in E$，适合 $x_0>\beta-\varepsilon$，事实上，若不存在这种点 x_0，亦即 E 中一切点 x 都滿足 $x\leqslant\beta-\varepsilon$，那么，由于 $\beta-\frac{\varepsilon}{2}$ 大于 $\beta-\varepsilon$ 从而大于一切的 x，按 $B|B'$ 的定义，$\beta-\frac{\varepsilon}{2}\in B'$，但因 $\beta-\frac{\varepsilon}{2}<\beta$ 故 $\beta-\frac{\varepsilon}{2}\in B$，矛盾。

二、指数函数的定义及其連續性

在第二章中，我們曾經利用指数函数的性质証明了指数函数的連續性，然而这些性质是怎样得来的呢？甚至我們还不知道，当 x 是无理数(例如 $\sqrt{2}$)时，a^x 究竟是怎样定义的，其实在上一段

中我們还只对 a 的正整数次方給予了严格的定义，例如 $a^n=aa\cdots a$ (n 个 a 相乘)，現在由此出发对一般 x 来严格定义 a^x，从而得出指数函数的一些性质。下面我們設 $a>0$。

首先，若 n 是正整数，我們令 n 次方后大于 a 的正有理数属于 A'，其余的有理数属于 A，那么 $A|A'$ 构成一有理数的分划，因之确定一个实数，称为 a 的 n 次方根，記为 $a^{\frac{1}{n}}$ 或 $\sqrt[n]{a}$。由乘法的定义可以証明 $a^{\frac{1}{n}}$ 是方程 $x^n=a$ 的唯一的正根，亦即 $(a^{\frac{1}{n}})^n=a$。

对正有理数 $r=\dfrac{p}{q}$，我們定义

$$a^r=(a^p)^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{a^p}.$$

当 $r<0$ 时，定义 $a^r=\dfrac{1}{a^{-r}}$，又規定 $a^0=1$。于是当 r 是任一有理数时，a^r 都有了定义。从这些定义出发，可以逐步証明指数律

$$a^{x_1}a^{x_2}=a^{x_1+x_2},\quad (a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1x_2},\quad a^{x_1}\beta^{x_1}=(a\beta)^{x_1},$$

对 x_1, x_2 是正整数和有理数时，都是成立的。对正整数的情形容易証明，要証明有理数的情形，首先注意

$$(a^p)^{\frac{1}{q}}=(a^{\frac{1}{q}})^p=a^{\frac{p}{q}}\quad (p,\ q\ 为正整数),$$

事实上，由

$$\left[(a^p)^{\frac{1}{q}}\right]^q=a^p \text{ 和 } \left[(a^{\frac{1}{q}})^p\right]^q=\left[(a^{\frac{1}{q}})^q\right]^p=a^p$$

及 $x^q=a^p$ 只有唯一的正根即得。

由証得的这个公式得到

$$\begin{aligned}\left(a^{\frac{p_1}{q_1}}a^{\frac{p_2}{q_2}}\right)^{q_1q_2}&=\left[(a^{p_1})^{\frac{1}{q_1}}\right]^{q_1q_2}\left[(a^{p_2})^{\frac{1}{q_2}}\right]^{q_1q_2}\\&=\left\{\left[(a^{p_1})^{\frac{1}{q_1}}\right]^{q_1}\right\}^{q_2}\left\{\left[(a^{p_2})^{\frac{1}{q_2}}\right]^{q_2}\right\}^{q_1}\\&=(a^{p_1})^{q_2}(a^{p_2})^{q_1}=a^{p_1q_2+p_2q_1},\end{aligned}$$

亦即

$$a^{\frac{p_1}{q_1}}a^{\frac{p_2}{q_2}}=a^{\frac{p_1q_2+p_2q_1}{q_1q_2}}=a^{\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}}.$$

对其他两个公式和負指数的情形亦可同样討論。

对于有理数指数的情形，我們可以导出下列性质。下面只討

論 $a>1$ 的情形，若 $0<a<1$，从 $a^r=\left(\frac{1}{a}\right)^{-r}$，而 $\frac{1}{a}>1$ 即可得出类似的結果。

1) 当 $r>0$ 时 $a^r>1$；又当 $r<0$ 时，$a^r<1$。

【証明】 首先由 $a>1$ 和乘法的定义可知，当 p 为正整数时 $a^p>1$，由此又可得出 $a^{\frac{1}{p}}>1$，因为若 $a^{\frac{1}{p}}\leqslant 1$，則 $a=(a^{\frac{1}{p}})^p\leqslant 1$，矛盾。由是当 $r=\frac{p}{q}$ 为正有理数时，

$$a^{\frac{p}{q}}=(a^p)^{\frac{1}{q}}>1.$$

当 $r<0$ 时，由 $a^r=\frac{1}{a^{-r}}$ 而 $a^{-r}>1$ 即得。

2) 若 $r_1>r_2$，則 $a^{r_1}>a^{r_2}$。即 a^r 随 r 的增加而增加。

【証明】 由

$$a^{r_1}-a^{r_2}=a^{r_2}(a^{r_1-r_2}-1)>0$$

即得。

3) 当 r 取有理数下降(上升)地趋于零时，$\lim\limits_{r\to 0}a^r=1$。

【証明】 先就 r 下降地趋于零的情形来討論，此时 a^r 随 r 的下降而为一单调减少的变量，但 $a^r>1$，故 a^r 是有下界的变量，因此 $\lim\limits_{r\to+0}a^r$（亦即 r 下降地趋于零时 a^r 的极限）存在，設极限值为 A，在等式

$$a^{2r}=(a^r)^2$$

两边取极限 $r\to+0$，得到 $A=A^2$，因此 $A=0,\ +1$，但由于 $a^r>1>0$，故 $A\neq 0$，因此 $\lim\limits_{r\to+0}a^r=1$。

对 $\lim\limits_{r\to-0}a^r$，命 $r=-r'$，則当 $r\to-0$ 时，$r'\to+0$，而

$$\lim_{r\to-0}a^r=\lim_{r'\to+0}a^{-r'}=\lim_{r'\to+0}\frac{1}{a^{r'}}=1.$$

4) 当 r 取有理数下降(上升)地趋于有理数 r_0 时，$\lim\limits_{r\to r_0}a^r=a^{r_0}$。事实上，

$$a^r-a^{r_0}=a^{r_0}(a^{r-r_0}-1)\to 0\quad(\text{当 } r\to r_0 \text{ 时}).$$

現在对无理数β来定义α^{β}. 設r', r''各为取有理数上升和下降地趋于β的变量，由单調有界性知道$\lim\limits_{r'\to\beta}\alpha^{r'}$和$\lim\limits_{r''\to\beta}\alpha^{r''}$都存在，又由

$$\alpha^{r''}-\alpha^{r'}=\alpha^{r'}(\alpha^{r''-r'}-1)$$

当$r''-r'$充分小时，可小于任意給定的値，因此

$$\lim_{r'\to\beta}\alpha^{r'}=\lim_{r''\to\beta}\alpha^{r''}.$$

定义 当β为无理数时，定义上述极限值为α^{β}.

由这个定义可以看出我們正是这样定义α^{β}，使α^{x}在$x=\beta$是連續的，但定义中还只說明当r取有理数而趋于β时，α^{r}趋于α^{β}。为了說明連續性，还应說明当x取任何値而趋于β时，α^{x}的极限是α^{β}。为此，先証明α^{x}的单調性，亦卽对任意的β_1，β_2，当$\beta_1>\beta_2$时，恒有

$$\alpha^{\beta_1}>\alpha^{\beta_2}.$$

首先由实数大小的定义，我們可找到两个有理数r_1，r_2，适合$\beta_1>r_1>r_2>\beta_2$，于是当$r'>r_1$和$r''<r_2$时，

$$\alpha^{r'}>\alpha^{r_1},\quad \alpha^{r_2}>\alpha^{r''},$$

令$r'\to\beta_1$，$r''\to\beta_2$，按α^{β}的定义和极限的性质，卽得

$$\alpha^{\beta_1}\geqslant\alpha^{r_1},\quad \alpha^{r_2}\geqslant\alpha^{\beta_2},$$

但对有理数，我們已証明了当$r_1>r_2$时，$\alpha^{r_1}>\alpha^{r_2}$，故得到要証明的結果。

从α^{x}的单調性立卽可以得到它的連續性（也可用第二章中的証明方法），事实上，按α^{β}的定义，当r取有理数上升地趋于β时，α^{r}上升地趋于α^{β}，因之对任給的$\varepsilon>0$，可得有理数R，当$R\leqslant r<\beta$时，

$$0<\alpha^{\beta}-\alpha^{r}<\varepsilon,$$

而按α^{x}的上升性，卽得$R\leqslant x<\beta$时

$$0<\alpha^{\beta}-\alpha^{x}<\varepsilon\ \text{亦卽}\ |\alpha^{x}-\alpha^{\beta}|<\varepsilon.$$

这就証明了 $\lim\limits_{x\to\beta-0}\alpha^x=\alpha^\beta$，同理可証 $\lim\limits_{x\to\beta+0}\alpha^x=\alpha^\beta$。

最后，可以证明指数律当指数是任意实数时也是成立的。我們只証明

$$(\alpha^{\beta_1})^{\beta_2}=\alpha^{\beta_1\beta_2}.$$

按定义 $$(\alpha^{\beta_1})^{\beta_2}=\lim_{r''\to\beta_2}(\lim_{r'\to\beta_1}\alpha^{r'})^{r''},$$

由幂函数的連續性，此式右端等于

$$\lim_{r''\to\beta_2}\lim_{r'\to\beta_1}(\alpha^{r'})^{r''}=\lim_{r''\to\beta_2}\lim_{r'\to\beta_1}\alpha^{r'r''}=\lim_{r''\to\beta_2}\alpha^{r''\beta_1},$$

再由 $r''\to\beta_2$ 时，$r''\beta_1\to\beta_2\beta_1$ 及指数函数的連續性即得。

第二篇　微　分　学

緒論中曾述及物体运动的速度問題，如物体从时刻 t 开始运动，在 Δt 时間内所經路程为 Δs，則

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

就是这段时間内的平均速度。按照緒論中所作的分析以及上篇所述的极限理論，使我們有理由以极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

来定义物体在时刻 t 的瞬时速度(如果这个极限存在的話)。正是由于实踐的需要，对于与速度問題相类似的一些問題进行长期探索的結果，产生了微分学。

与所有的科学理論一样，由实踐提升而来的微分学理論，也在各方面有着广泛的应用。例如在緒論中提到的最大容积問題，輪船以怎样的速度行駛才是最經济的問題，以及如何用图象来表示函数的問題，都是与微分学直接相关的。从本篇所将叙述的內容中可以看出，作为数学分析的重要組成部分的微分学，在物理、力学以及其他实用科学和数学的其他分支中有着何等广泛而重要的作用。

因此，讀者不仅应該掌握微分学的基本概念与基本理論，而且必須熟练地利用微分法則来进行微分运算，以便能够把微分学的理論更好地用之于实踐。

第一章　导数与微分

§1　导数的引进与定义

一、导数的引进

我們先来引述几个問題：

速度問題：若有一质点M自O点开始作直綫运动(图2-1-1)，那末，經过时間t以后，质点M与O的距离s是时間t的函数

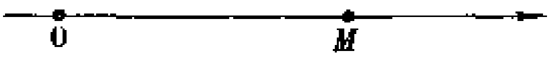


图　2-1-1

$$s=f(t),$$

为了求得质点在时刻t的瞬时速度v_t（卽距离对时間的变化率），我們考慮在时刻t以后經过Δt这段时間内的平均速度

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

的极限
$$v_t=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

例如，自由落体的运动方程为

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

因此有
$$v_t=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt^2\right]$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2gt\Delta t+g\Delta t^2}{2\Delta t}$$
$$=gt.$$

切綫問題：設曲綫L是函数$y=f(x)$的图象。P是曲綫L上的一个定点，它的横坐标是x_0，为了寻求在P点的切綫，在曲綫L

上另取一点 Q，它的横坐标是 $x_0+\Delta x$（Δx 可正可負），作割綫 PQ，以 φ 表示 PQ 与 x 軸的夹角，則 PQ 的斜率 $\mathrm{tg}\,\varphi$ 为（图 2-1-2）

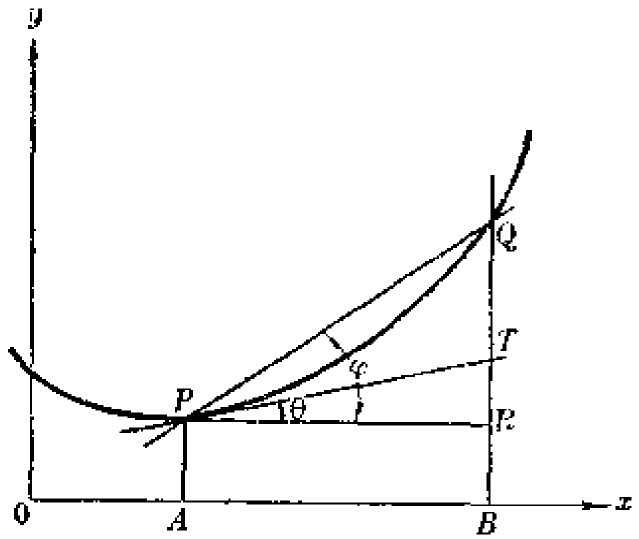


图 2-1-2

$$\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{QR}{PR},$$

此时， $AP=f(x_0)$， $BQ=f(x_0+\Delta x)$， $AB=PR=\Delta x$，

$$QR=BQ-BR=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

于是有
$$\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{QR}{PR}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

現在让点 Q 沿曲綫 L 移动，而逐漸移近于 P，則割綫 PQ 的位置也随着变动，当 Q 趋向于 P 时，割綫 PQ 的极限位置为 PT。我們把这一条作为割綫 PQ 的极限位置的直綫 PT 称作曲綫 L 在 P 点的切綫。这时，φ 也趋向于 PT 与 x 軸的夹角 θ，因而切綫 PT 的斜率为

$$\mathrm{tg}\,\theta=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

电流問題： 設有电流通过一导綫，那末在某一时刻 t 通过該导綫横截面的电量 Q 是时間 t 的函数

$$Q=f(t),$$

若給 t 一个改变量 Δt,对应的电量 Q 也就有一个改变量 ΔQ,它就是在 Δt 这一段时間内流过該导綫的电量。下面的比值

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

就是在 Δt 这一段时間内通过导綫的平均电流强度。显然,如果 Δt 愈小,則 $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ 与瞬时 t 的电流强度愈接近。因此我們认为,如果极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

存在,那末这个极限值就是时刻 t 的瞬时电流强度。

二、导数的定义及几何意义

上面我們考虑了三个問題,类似的問題讀者不难从物理、化学等学科中找到,例如比热問題,密度問題等等。它們虽然分属于不同的科学領域,但是都引导出和上面三个問題所指出的同样的数学运算,即必須求出函数的改变量和相应的自变量的改变量之比,当自变量的改变量趋于零时的极限。我們把这种具有独特意义的极限称作函数的导数,也叫做函数的变化率。

它的定义可叙述如下:

定义 設函数 $y=f(x)$,对应于自变量的任一改变量 Δx,函数的改变量为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,此时,如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在,此极限值就称作函数 $f(x)$ 在点 x_0 的导数(也叫微商),記为 $f'(x_0)$ $\left(\text{或 } y',\text{ 或 }\frac{dy}{dx},\text{ 或 }\frac{df}{dx}\right)$,此时我們說 $f(x)$ 在点 x_0 导数存在,或者說 $f(x)$ 在点 x_0 可导。

从定义可知,导数 $f'(x_0)$ 显然由值 x_0 所决定,如果用 $\mathscr{D}$ 表示所有使 $f(x)$ 可导的点所构成的点集,則对于 $\mathscr{D}$ 的每一个值 $x_0\in\mathscr{D}$,

都唯一地确定一个值 $f'(x_0)$，因此函数 $f(x)$ 的导数仍可看成自变量 x 的一个函数，記为 $f'(x)$，有时也簡記为 y'，即

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\quad (x\in\mathscr{D})$$

叫做 $f(x)$ 的导函数，不过，通常我們統称为导数 $f'(x)$。

有时，我們記 $X=x+\Delta x$，于是 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 也可改写为

$$f'(x)=\lim_{X\to x}\frac{f(X)-f(x)}{X-x}.$$

从定义，立即可以看出，按照极限存在的意义，如果 $f(x)$ 在点 x 可导，必須而且仅須极限

$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

和

$$\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

同时存在而且相等。它們分别称为 $f(x)$ 在点 x 的右导数和左导数，記为 $f'_+(x)$ 和 $f'_-(x)$。一般地，它們可能不相等。

同时，从导数的定义也可以看出，若 $f(x+\Delta x)-f(x)$ 在 $\Delta x\to 0$ 时不趋近于零，那末 $f(x)$ 在点 x 一定不可导，这就是說，不連續一定不可导；或者說，可导一定連續。但这并不意味着連續函数都是可导的。例如函数 $y=|x|$ 就是这样的例子，它在 $x=0$ 这一点連續，然而在这一点的导数却不存在，請讀者自行証明（参見 §4）。

若 $f(x)$ 在区間 (a,b) 的每一点都可导，則称 $f(x)$ 在区間 (a,b) 可导。

若 $f(x)$ 在开区間 (a,b) 可导，且 $f'_+(a)$ 及 $f'_-(b)$ 都存在，則称 $f(x)$ 在閉区間 $[a,b]$ 可导。

我們再来看一看导数的几何意义。从上面引述的切綫問題中，可以看出，当点 Q 沿着曲綫趋向于点 P 时，割綫 PQ 的位置也繞着点 P 变动，它与 x 軸的夹角 φ 也随之而变动。因此，当割綫 PQ

趋于极限位置 PT 时，角 φ 也趋于极限位置 θ，从而割綫的斜率也趋于切綫的斜率，即

$$\operatorname{tg}\theta=\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

因此，导数的几何意义就是曲綫 $y=f(x)$ 在点 x 的切綫斜率。

§2　簡单函数的导数

在这一节中，我們将从导数的定义出发求出基本初等函数的导数。

一、$y=c$　（c 为常数）

这时有
$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}=0.$$

所以常数的导数为 0.

二、$y=x^\alpha$　（α 为任意不为零的实数）

当 $x\neq 0$ 时，

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^\alpha-x^\alpha}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}x^{\alpha-1}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha-1}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}x^{\alpha-1}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha-1}{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha}\cdot\alpha\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}},$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\Delta x}{x}\to 0$，同时，由冪函数的連續性可知

$$\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha-1\to 0,$$

应用一个已知的极限

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{\ln(1+\beta)}{\beta}=1,$$

显然有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}=1$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}}=1$,

于是得 $$y'=(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}\quad (当\ x\neq 0).$$

当 $x=0$ 时,

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^{\alpha}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^{\alpha-1},$$

因此,当 $\alpha>1$ 时,

$$f'(0)=0,$$

上述公式 $y'=\alpha x^{\alpha-1}$ 仍旧适用。

当 $\alpha=1$ 时, $(\Delta x)^{\alpha-1}=1$,所以

$$f'(0)=1,$$

上述公式也适用。

而当 $\alpha<1$ 时,极限为 ∞, 因此当 $\alpha<1$ 时函数在 $x=0$ 这一点不可导。

特别地,若 $y=x^n$ (n 为自然数), 则 $y'=nx^{n-1}$;

若 $y=\sqrt{x}$, 则 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x>0)$;

若 $y=\dfrac{1}{x}$, 则 $y'=-\dfrac{1}{x^2}$ $(x\neq 0)$.

三、$y=\sin x$

此时有

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\dfrac{2x+\Delta x}{2}\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}=\cos x.$$

即得 $$(\sin x)'=\cos x.$$

此处，我們利用了极限 $\frac{\sin h}{h}\to 1\ (h\to 0)$ 及 $\cos x$ 的連續性。

完全类似地，可以求得

$$(\cos x)'=-\sin x.$$

四、$y=\log_a x\quad(a>0)$

此时有

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}\cdot\frac{1}{x},$$

因为在 $\Delta x\to 0$ 时也有 $\frac{\Delta x}{x}\to 0$，所以利用已知的极限

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\to e\ (\alpha\to 0)$$

及对数函数的連續性，可知

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}=\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\log_a e,$$

即得
$$y'=(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}.$$

特别地，若 $y=\ln x$，則 $y'=\frac{1}{x}$.

§3 求导法則

上节中，我們从定义出发导出几个最簡单函数的导数，用完全类似的办法，还可导出如 a^x，$\operatorname{tg} x$ 等初等函数的导数公式，但是这种方法是很繁复的，我們无意去一一列举它們，而将利用更为簡便和巧妙的方法来得到，这种方法，就是本节将要介紹的求导法則。

現在，就来介紹几个基本的求导法則。

一、导数的运算法則

1．若 $f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在，則有

$$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x).$$

就是說两个可导函数之和(差)的导数等于它們导数之和(差)。利用导数定义立刻可以証明，我們把它留給讀者。

2．若 $f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在，則有

$$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

【証明】 由导数定义，有

$$\begin{aligned}[f(x)g(x)]' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}[f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)\\ &\quad -f(x)g(x+\Delta x)+f(x)g(x+\Delta x)\\ &\quad -f(x)g(x)]\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left[g(x+\Delta x)\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)\right.\\ &\quad \left.+f(x)\left(\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)\right]\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ &\quad +f(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\ &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x),\end{aligned}$$

其中 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x)=g(x)$ 是由于假設 $g'(x)$ 存在，从而 $g(x)$ 在 x 点連續。

特别地，如果两个函数中有一个是常数，例如 $g(x)\equiv c$，c 为常数，則由上式可得

$$[cf(x)]'=cf'(x).$$

就是說在求导数时，常数因子可以提出来。

3．若 $f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在，且 $g(x)\neq 0$，則有

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

【証明】 按定义有

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x)g(x+\Delta x)\Delta x},$$

将上式右端分式中的分子写成

$$g(x)[f(x+\Delta x)-f(x)]-f(x)[g(x+\Delta x)-g(x)],$$

再利用极限运算，立即可得所要証明的公式。

[例 1] $(\operatorname{tg} x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'$

$$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

[例 2]

$$\left(\frac{2\sqrt{x}\operatorname{tg} x}{1+x^2}\right)'$$

$$=2\frac{(\sqrt{x}\operatorname{tg} x)'(1+x^2)-\sqrt{x}\operatorname{tg} x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}$$

$$=2\frac{[(\sqrt{x})'\operatorname{tg} x+\sqrt{x}(\operatorname{tg} x)'](1+x^2)-\sqrt{x}\operatorname{tg} x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$=2\frac{\left[\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{tg} x+\sqrt{x}\sec^2 x\right](1+x^2)-2x\sqrt{x}\operatorname{tg} x}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{2x(1+x^2)\sec^2 x+(1-3x^2)\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}(1+x^2)^2}.$$

二、复合函数的导数

若 $y=f(u)$ 在点 u 可导，$u=g(x)$ 在点 x 可导，则复合函数

$y=f(g(x))$在点 x 可导，且有关系式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

【証明】 因为 $y=f(u)$在点 u 可导，因之有

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)$$

或

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)+\alpha,$$

其中

$$\lim_{\Delta u\to 0}\alpha=0.$$

当 $\Delta u\neq 0$ 时，用 Δu 乘等式两边，得

$$\Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha\cdot\Delta u.$$

但当 $\Delta u=0$ 时，$\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u)=0$，故上式还是成立的，因为 $\Delta x\neq 0$，用 Δx 除等式两边，且求 $\Delta x\to 0$ 时的极限，得

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(u)\Delta u+\alpha\cdot\Delta u}{\Delta x}\\&=f'(u)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}.\end{aligned}$$

由于 $g(x)$在 x 点連續(因为它可导)，故当 $\Delta x\to 0$ 时，有

$$\Delta u=g(x+\Delta x)-g(x)\to 0,$$

所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=\lim_{\Delta u\to 0}\alpha=0.$$

于是由上式，即得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

这就是説，复合函数的导数等于它对中間变量的导数与中間变量对自变量的导数的乘积。

[例 3] $y=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$,

若令 $u=x+\frac{\pi}{2}$，则

$$(\cos x)'=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\cos u\cdot 1$$

$$=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x.$$

[例 4] $y=\ln\sin x$

可看作复合函数 $y=\ln u$，$u=\sin x$；于是有

$$(\ln\sin x)'=\frac{1}{u}\ (\sin x)'=\frac{\cos x}{\sin x}=\operatorname{ctg} x.$$

在导数的运算法則以及复合函数的求导法則中，如果其中有一个函数不可导，或者两个函数皆不可导，那么它們的和、差、积、商以及复合函数是否仍不可导呢？請讀者考虑(参見习題 20，21，23)。

三、反函数的导数

若 (i) $y=f(x)$在点 x_0 导数存在且不等于 0，

(ii) $f(x)$在 x_0 的某一邻域内連續，且严格单調，则其反函数$x=\varphi(y)$在点 y_0 可导，这里 $y_0=f(x_0)$ 且有

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

【証明】 若記 $\Delta x=\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)$，

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，

現在考虑极限：
$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}.$$

由于 $\Delta y\neq 0$，可知 $\Delta x\neq 0$；因而可以用 Δx 除上面极限号内之分子分母。同时，由于条件(ii)，函数 $f(x)$ 滿足反函数存在定理，所以，反函数 $\varphi(y)$存在且連續。于是，当 $\Delta y\to 0$ 时，$\Delta x\to 0$，因而可以用 $\Delta x\to 0$ 来代替 $\Delta y\to 0$，即得

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

而左端，按定义就是 $\varphi'(y_0)$。

[例 5] 設 $y=a^x$ $(a>0)$，它的反函数是

$$x=\varphi(y)=\log_a y,$$

由于
$$\varphi'(y)=\frac{1}{y\ln a},$$

所以
$$(a^x)'=\frac{1}{\varphi'(y)}=y\ln a=a^x\ln a.$$

特別地，有
$$(e^x)'=e^x.$$

[例 6] 設

$$y=\text{arc}\sin x\quad\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2},\ -1<x<1\right),$$

則有
$$(\text{arc}\sin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

这里因为 $\cos y$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 內恒为正值，故根式前不取負号。

同理可得
$$(\text{arc}\cos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

[例 7] 若 $y=\text{sh}\,x$，則有

$$(\text{sh}\,x)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\text{ch}\,x.$$

四、隐函数的导数

这里，我們总是假定隐函数是存在的，也就是說由方程

$$F(x,y)=0$$

确实能够定义出唯一的单値函数 $y=f(x)$，并且它可以求导。在这个前提下，我們給出求隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$ 的一种方法，而不須要

在隐函数中求出 y 的明确表达式。事实上，某些隐函数也不一定可以或不容易解出 y 的明显表达式，例如 $e^y=xy$ 就是这样，至于这种做法的理論依据，将在本篇第五章的隐函数理論中再来詳細讲述。

最簡单的如 $x^2+y^2=1$，假如它确定一个函数 $y=f(x)$，即有恒等式 $x^2+f^2(x)-1=0$，然后把 $f^2(x)$ 看作复合函数，对恒等式两边关于 x 求导数，得

$$2x+2f(x)f'(x)=0,$$

即
$$y'=f'(x)=-\frac{x}{f(x)}=-\frac{x}{y}.$$

这就是說，若 y 确定为 x 的隐函数，要求它的导数只需对等式两边关于 x 求导，而在此过程中，把 y 視为 x 的函数。

五、参数方程的求导法則

在解析几何上，我們遇到过曲綫的参数表示法，若 t 为参数，那末

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$$

就代表平面上的一条曲綫，設 $x=\varphi(t)$ 的反函数为 $t=\varphi^{-1}(x)$，并設它满足反函数求导的条件，于是把 y 看为复合函数

$$y=\psi(t),\quad t=\varphi^{-1}(x)$$

并利用反函数的求导法則，就有

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\\&=\psi'(t)\varphi^{-1\prime}(x)=\psi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}\\&=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.\end{aligned}$$

这就是参数方程的求导法則。

[例 8] 椭圆的参数方程是 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$; 于是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t.$$

特别地，当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{dy}{dx}=0$，即在 $(0, b)$ 点具有水平切綫。

到现在为止，我們利用上面导得的簡单函数的导数公式及求导法則就可以求出任何初等函数的导数，下面列出常用的导数公式表。表中未予导出的公式，讀者不妨自行导出之。

1. $(c)'=0$，c 是常数.
2. $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$，$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$，$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
3. $(a^x)'=a^x\ln a$，$(e^x)'=e^x$.
4. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$，$(\ln x)'=\frac{1}{x}$.
5. $(\sin x)'=\cos x$.
6. $(\cos x)'=-\sin x$.
7. $(\operatorname{tg} x)'=\sec^2 x$.
8. $(\operatorname{ctg} x)'=-\csc^2 x$.
9. $(\sec x)'=\operatorname{tg} x\sec x$.
10. $(\csc x)'=-\operatorname{ctg} x\csc x$.
11. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
12. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
13. $(\operatorname{arc\,tg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$.
14. $(\operatorname{arc\,ctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.
15. $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$.
16. $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$.

17　$(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

18.　$(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

下面再举几个利用上述公式和法则求导的例子。

[例 9]　若 $y = e^{\sin^2 \frac{1}{x}}$，则有

$$y' = e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot 2\sin\frac{1}{x} \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x} \cdot e^{\sin^2 \frac{1}{x}}.$$

[例 10]　若 $y = [u(x)]^{v(x)}$，

先求此函数的对数，有

$$\ln y = v(x) \ln u(x),$$

两边对 x 求导，即得

$$\frac{1}{y} y' = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)},$$

所以　$$y' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \ln u(x) + \frac{v(x) u'(x)}{u(x)} \right].$$

例如　$y = x^{\operatorname{tg} x}$，则有

$$y' = x^{\operatorname{tg} x} \left[\sec^2 x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \operatorname{tg} x \right].$$

本例中所用的方法称为对数求导法。讀者应該掌握这个方法的基本精神，而不是背誦公式（参見习題 14）。

[例 11]　若 $y = \ln|x-1|$，

则当 $x>1$ 时，$y' = \dfrac{1}{x-1}$；

当 $x<1$ 时，$y' = -\dfrac{-1}{x-1} = \dfrac{1}{x-1}$.

[例 12]　若 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$，则有

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

§4 不可导的函数举例

在本章§1中，我們曾經指出，一个函数可导的充分且必要条件是它的左导数和右导数都存在而且相等。因此，卽使左导数和右导数均存在，但是不相等，那末函数仍然是不可导的；就其几何意义来說，当点 Q 由点 P 的左方或右方沿曲綫趋于 P 点时，割綫 PQ 分别趋于不同的极限位置 PT 及 PT'，而不在同一直綫上，我們分别称它們为曲綫在 P 点的左侧切綫和右侧切綫（图2-1-3）。

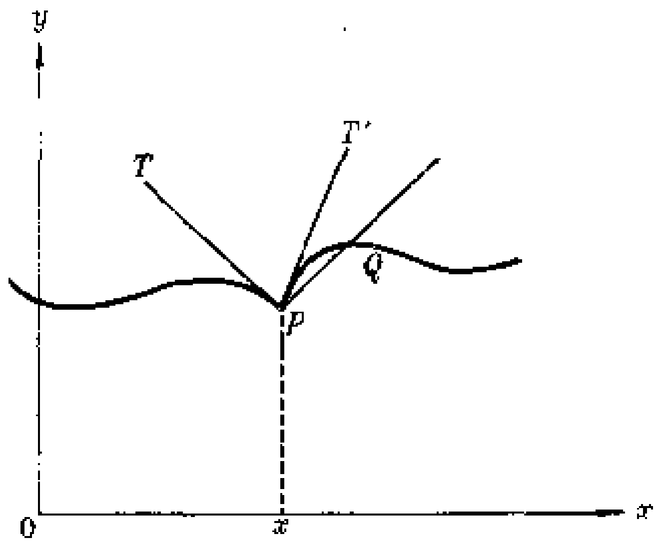


图 2-1-3

現在，我們举例来說明函数不可导的种种可能情况。

[例1] 設 $f(x)=|x|\quad(-\infty<x<+\infty)$.

在§1的最后，我們曾提到这个函数在 $x=0$ 点連續，但是不可导。現在我們来加以詳細的証明。

此时有
$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$
$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1,$$

因之，$f'_+(0)\neq f'_-(0)$，卽 $f'(0)$ 不存在；但是显然

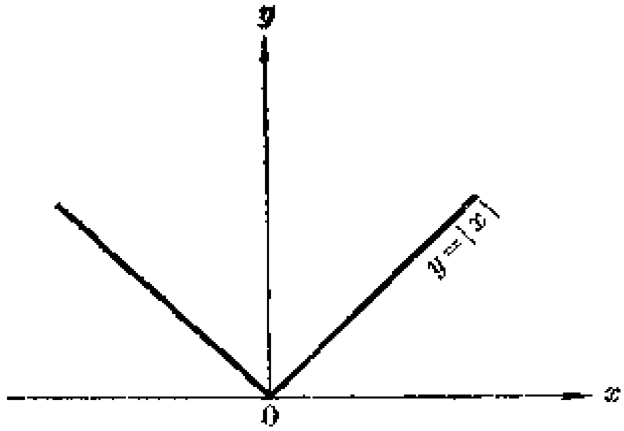


图　2-1-4

$$\lim_{x\to 0}|x|=0=f(0),$$

即 $|x|$ 在 $x=0$ 点連續。这个例子說明了 §1 中所說的"可导一定連續"这一結論的反面是不一定成立的，也就是說函数在一点連續不一定可导(图 2-1-4)。

［例 2］考慮函数

$$f(x)=x^{\frac{2}{3}}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

显然，
$$\lim_{x\to 0}x^{\frac{2}{3}}=0=f(0),$$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 点連續。

但是，
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(0+\Delta x)^{\frac{2}{3}}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}=\infty,$$

所以 $f'(0)$ 不存在，事实上，此时有

$$f'_+(0)=+\infty,$$

$$f'_-(0)=-\infty,$$

就其几何意义来說，当 Q 点沿着曲綫趋向于 P 点时，割綫 Q 的斜率 $\operatorname{tg}\varphi\to\infty$，因而 $\varphi\to\pm\frac{\pi}{2}$，也就是曲綫在 $(0,0)$ 点的切綫就是 y 軸(如图 2-1-5)。

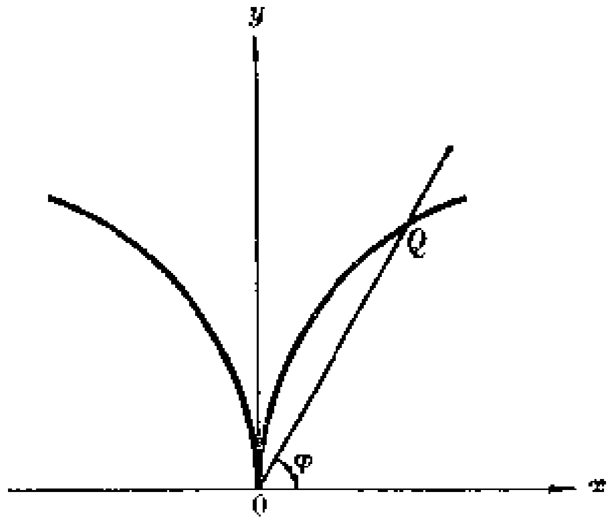


图　2-1-5

［例 3］考慮函数

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

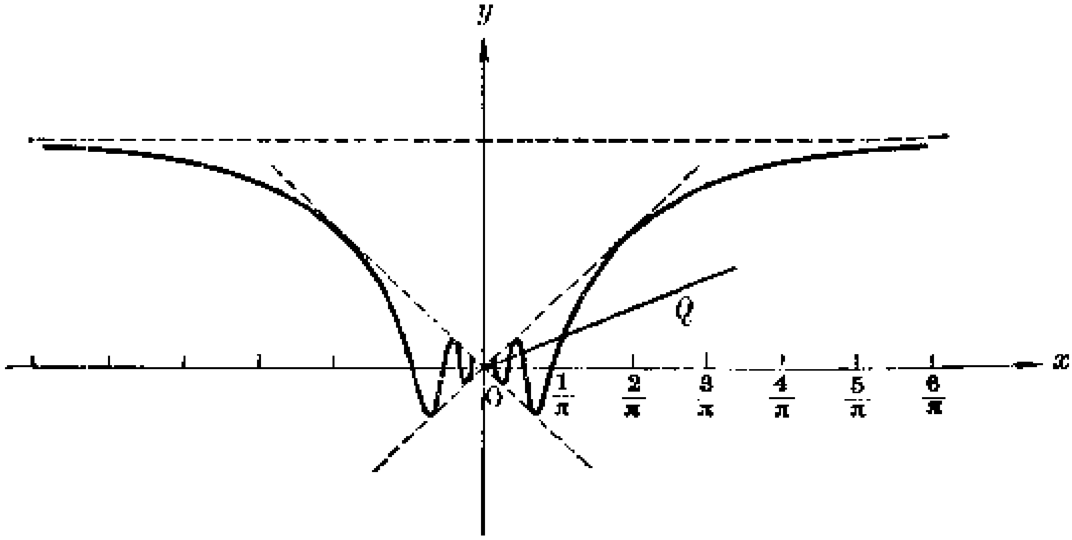


图 2-1-6

由于无穷小量与有界变量之积仍为无穷小量,故知

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0=f(0),$$

所以,$f(x)$ 在 $x=0$ 点連續。但是,此时

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x},$$

而当 $\Delta x\to 0$ 时 (不論是 $\Delta x\to +0$ 或是 $\Delta x\to -0$), $\sin\frac{1}{\Delta x}$ 沒有极限,因之 $f'(0)$ 不存在。

就其几何意义来說,当 Q 点沿曲綫趋于原点时,割綫 OQ 始終在直綫 $y=x$ 与 $y=-x$ 之間摆动,而不趋于任何极限位置,亦即切綫不存在。但不要认为凡割綫无限摆动必无切綫 (參見习题 12 (4))。

还曾有人举出过在每一点都不可导的連續函数的例子,在历史上很长一段时期内,人們曾认为一个連續函数除了几个个别点之外,应該在每点都可导,直到上一世紀后半期,才給出在每一点都不可导的連續函数的例子,第一个提出这种例子的被认为是德国数学家魏尔斯脫拉斯(1871 年),事实上,在 1830 年捷克数学家

波尔查諾(Bolzano)就已建立了这种例子,而早在1834年,罗巴切夫斯基就已区别了函数的連續性和可导性。

§5 微 分

一、微分的定义

我們先考察一个具体問題。用 S 表示边长为 x 的正方形面积,那末,S 显然是 x 的函数 $S=x^2$,如果給边长一个改变量 Δx,

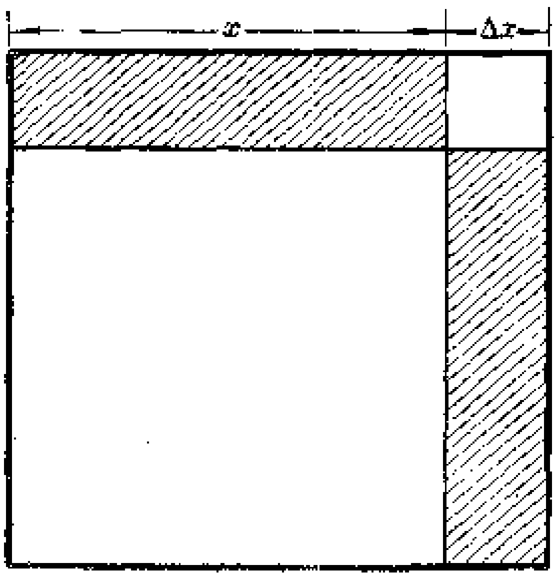


图 2-1-7

则 S 相应地有改变量 ΔS,为

$$\Delta S=(x+\Delta x)^2-x^2$$
$$=2x\Delta x+\Delta x^2.$$

从此式中可見 ΔS 被分成两部分,第一部分 $2x\Delta x$ 是 Δx 的綫性函数,即图 2-1-7 中带有斜綫的那两个矩形的面积之和,而第二部分是較 Δx 为高阶的无穷小,即 $\Delta x^2=o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0)$. 由此可見,当給边长以一微小改变量 Δx 时,由此所引起的面积改变量 ΔS 可近似地用第一部分 $2x\Delta x$ 来代替,相差仅是一个以 Δx 为边长的正方形面积,当 $|\Delta x|$ 愈小时相差也愈小,它是一个較 Δx 为高阶的无穷小。

推及一般情形,若 $y=f(x)$ 是定义在某一区間上的函数,当給自变量以一个改变量 Δx 时,相应地函数有改变量

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x),$$

我們考察它是否也可以分成如下两部分

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0).$$

其中 A 是 x 的函数,而与 Δx 无关;如果这种表达是可能的,那末我們就称 $f(x)$ 在 x 点是可微的,且把其第一部分,即其綫性主要

部分 $A\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在 x 点的微分，記为 dy 或 $df(x)$，即

$$dy=A\Delta x.$$

現在，我們来考察一下函数的可微性与可导之間的关系。

若 $f(x)$ 在 x 点可微，即有

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),$$

于是
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

在等式两边取极限 $\Delta x\to 0$，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A,$$

这就是說极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在且等于 A，而由导数定义，此极限就是 $f'(x)$，因之，此时有关系式

$$A=f'(x),$$

从而有
$$df(x)=f'(x)\Delta x.$$

反之，若 $f(x)$ 在 x 点可导，那末有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x),$$

即
$$\Delta y=f'(x)\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0),$$

而由微分定义知道，这就是說函数 $f(x)$ 在 x 点可微，且

$$dy=f'(x)\Delta x.$$

綜上所述，可見对一元函数而言，函数的可微性与可导性是等价的。且有关系式

$$dy=f'(x)\Delta x.$$

从定义可知，它与函数的改变量 Δy 之差是較 Δx 为高阶的无穷小，即
$$\Delta y-dy=o(\Delta x).$$

这就是說，函数的微分 dy 是函数的改变量 Δy 的主要部分。我們常利用这一点来作近似計算，即以函数的微分来近似地代替函数

的改变量，或写作

$$f(x+\Delta x)\doteq f(x)+f'(x)\Delta x.$$

我們举一个实例来說明。例如我們要求得$\sqrt[3]{1.02}$的近似值，我們可考虑函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$，令 $x_0=1$, $\Delta x=0.02$，于是利用上述近似式，有

$$\sqrt[3]{1.02}=f(x_0+\Delta x)\doteq f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

$$=1+\left(\frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}}\right)\Delta x=1.006.$$

上面已經証明了关系式

$$dy=f'(x)\Delta x.$$

对任意可导函数 $f(x)$ 总成立，特别地，当 $f(x)=x$ 时也成立，而此时 $f'(x)=1$，因而上式就成为 $dx=\Delta x$. 所以对自变量而言，作为与 x 无关的任意給定的量 Δx 恒等于 dx，这就是說，自变量的微分就是自变量的改变量。因之，我們可以把 dx 作为一个符号来代替 Δx，于是有

$$dy=f'(x)dx.$$

从而可得 $\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$，

这就是說，函数的导数等于函数的微分与自变量的微分之商。我們注意，微分之值既与 x 有关，也与 dx 有关。

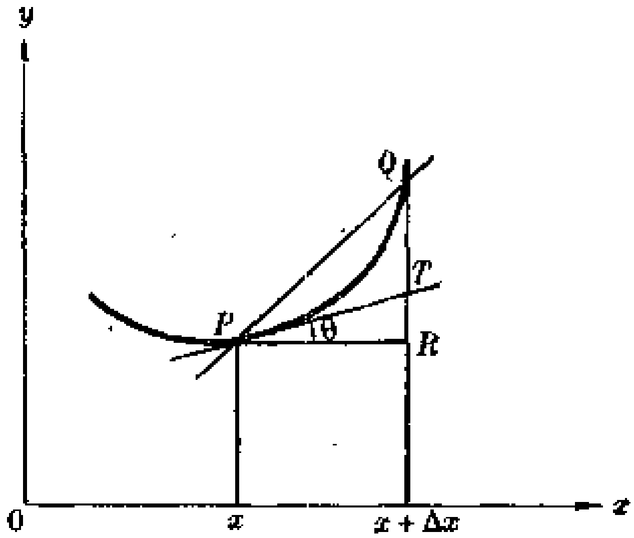


图 2-1-8

函数的微分有如下的几何解释。因为 $f'(x)=\operatorname{tg}\theta$（图2-1-8），而 $\Delta x=dx=\overline{PR}$，

所以 $$dy=f'(x)dx=\overline{PR}\operatorname{tg}\theta=\overline{RT}.$$

亦即图上的線段 $\overline{RT}$ 之长就是微分 dy 之值。

前面曾經指出过，$\overline{RQ}$ 这一綫段表示改变量

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

之值，故 $\overline{TQ}$ 这一綫段就表示出定义中的 $o(\Delta x)$ 部分，它是較 Δx 为高阶的无穷小。

利用 $dy=f'(x)dx$ 这一关系式，很容易求出初等函数的微分，如 $d(x^{\alpha})=\alpha x^{\alpha-1}dx$, $d\sin x=\cos x\,dx$，等等。我們就不去一一列举了。

二、微分的运算法則

从微分的定义，容易証得下面的微分法則：

1. $d[f(x)\pm g(x)]=df(x)\pm dg(x)$.

2. $d[f(x)\cdot g(x)]=g(x)df(x)+f(x)dg(x)$.

3. $d\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{g(x)df(x)-f(x)dg(x)}{g^2(x)}$.

4. 复合函数的微分：

設有复合函数 $y=f(u)$, $u=g(x)$. 于是，按复合函数的求导法則，此时

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(g(x))g'(x),$$

所以按微分定义，有

$$dy=f'(g(x))g'(x)dx.$$

实际上，式中 $f'(g(x))=f'(u)$, $g'(x)dx=du$，所以又可写成

$$dy=f'(u)du.$$

把 $dy=f'(u)du$ 与 $dy=f'(x)dx$ 相比較，可見两者在形式上是一样的。通常把这一性质称作一阶微分的形式不变性。

下面我們再举一些利用微分运算法則来求函数的微分的例。

[例1] 設 $y=\dfrac{\sin 2x}{x^2}$，則有

$$dy=d\left(\frac{\sin 2x}{x^2}\right)=\frac{x^2\,d\sin 2x-\sin 2x\,dx^2}{x^4},$$

然后在 $\sin 2x$ 中視 $2x$ 为 u，即有

$$d\sin u=\cos u du=\cos 2x\,d(2x)=2\cos 2x\,dx,$$

最后得到 $$d\left(\frac{\sin 2x}{x^2}\right)=\frac{2(x\cos 2x-\sin 2x)}{x^3}dx.$$

[例 2] 若 $y=e^{-\frac{u^2}{2}}$，則有

$$d\left(e^{-\frac{u^2}{2}}\right)=e^{-\frac{u^2}{2}}d\left(-\frac{u^2}{2}\right)=-ue^{-\frac{u^2}{2}}du,$$

此式不論 u 是否为自变量总是成立的。

[例 3] 設 $x^2y+xy^2=1$，試求 dy.

对等式两边求微分，有

$$d(x^2y+xy^2)=d(1)=0,$$

即 $$\begin{aligned}d(x^2y+xy^2)&=[x^2dy+2xy\,dx]+[2xy\,dy+y^2dx]\\&=(x^2+2xy)dy+(2xy+y^2)dx=0.\end{aligned}$$

故得 $$dy=-\frac{2xy+y^2}{x^2+2xy}dx.$$

§6 高阶导数与高阶微分

一、高阶导数及其运算法則

前面已經看到，当 x 变动时，$f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 仍是 x 的函数，因之可将 $f'(x)$ 再对 x 求导数，所得出的結果 $(f'(x))'$（如果存在）就称为 $f(x)$ 的二阶导数。同理，二阶导数的导数称为 $f(x)$ 的三阶导数。一般地，我們定义 n 阶导数为 $(n-1)$ 阶导数的导数，即

$$[y^{(n-1)}]'=y^{(n)}\quad(n=2,3,4,\cdots).$$

記为 $y^{(n)}$ 或 $y^{(n)}(x)$ 或 $\frac{d^ny}{dx^n}$.

前已指出，速度是路程对时間的变化率，亦即路程对时間的导数，而加速度又是速度对时間的导数，亦即路程对时間的二阶导数，这就是二阶导数的力学意义。例如自由落体有 $s=\frac{1}{2}gt^2$，从而

速度 $s'=gt$，加速度 $s''=g$。

[例 1] $y=e^{-x}$,

$y'=-e^{-x}$,

$y''=e^{-x}$,

$\cdots\cdots\cdots$,

$y^{(n)}=(-1)^n e^{-x}$.

[例 2] $y=\sin x$,

$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$,

$y''=-\sin x=\sin(x+\pi)$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$,

$y^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

对于高阶导数，可以証明下面的运算法则是成立的。

1. $[f(x)\pm g(x)]^{(n)}=f^{(n)}(x)\pm g^{(n)}(x)$.

2. $[f(x)\cdot g(x)]^{(n)}=f^{(0)}g^{(n)}+c_n^1 f' g^{(n-1)}+\cdots$
$+c_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}+\cdots+f^{(n)}g^{(0)}$,

其中 $f^{(0)}=f$, $g^{(0)}=g$, c_n^k 表示从 n 个中取 k 个的組合数，即

$$c_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

这一公式通常叫做莱伯尼兹（Leibniz）公式。将这个公式与二項式展开

$$(f+g)^n=f^0g^n+c_n^1 f^1 g^{n-1}+c_n^2 f^2 g^{n-2}+\cdots+f^n g^0$$

作一比較，它們在形式上是有某些相仿之处。只要在二項式展开中，将函数的 k 次冪改为 k 阶导数，左端的加号改为乘积，就成了莱伯尼兹公式。这样对比便于我們記忆。

这两个公式都可以用数学归納法加以証明，前者比較簡单，所以这里只写出后一个的証明。

首先，当 $n=1$ 时，它成为

$$(f\cdot g)'=f'g+fg'.$$

而这一公式在前面早已証明过是成立的，亦即 $n=1$ 时公式成立，我們設 $n=m$ 时成立，再来推証 $n=m+1$ 时也成立。既假定 $n=m$ 时成立，就有

$$(f\cdot g)^{(m)}=\sum_{k=0}^{m}c_m^k f^{(m-k)}g^{(k)}$$

$$=f^{(m)}g+mf^{(m-1)}g'+\frac{m(m-1)}{2}f^{(m-2)}g''+\cdots$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}f^{(m-k)}g^{(k)}+\cdots+fg^{(m)}.$$

对上式再求导一次，就得到

$$(f\cdot g)^{(m+1)}=\sum_{k=0}^{m}[c_m^k f^{(m-k)}g^{(k)}]'$$

$$=\sum_{k=0}^{m}c_m^k[f^{(m-k+1)}g^{(k)}+f^{(m-k)}g^{(k+1)}]$$

$$=\sum_{k=0}^{m}c_m^k f^{(m-k+1)}g^{(k)}+\sum_{k=0}^{m}c_m^k f^{(m-k)}g^{(k+1)},$$

在最后的两个和式中含有許多同类項，为了合并它們而表示成一个和式，我們在第二个和式中以 $k-1$ 代替 k，于是 k 就从 1 取到 $m+1$，而第二个和式也就变成

$$\sum_{k=1}^{m+1}c_m^{k-1}f^{(m-k+1)}g^{(k)},$$

从而

$$(f\cdot g)^{(m+1)}=\sum_{k=0}^{m}c_m^k f^{(m-k+1)}g^{(k)}+\sum_{k=1}^{m+1}c_m^{k-1}f^{(m-k+1)}g^{(k)}$$

$$=f^{(m+1)}g^{(0)}+\sum_{k=1}^{m}(c_m^k+c_m^{k-1})f^{(m-k+1)}g^{(k)}+f^{(0)}g^{(m+1)},$$

这里利用了 $c_m^0=c_m^m=1$，且为了形式上的統一而記 $f\equiv f^{(0)}$，$g\equiv g^{(0)}$。因为

$$c_m^k+c_m^{k-1}=\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}+\frac{m(m-1)\cdots(m-k+2)}{(k-1)!}$$

$$=\frac{(m+1)m(m-1)\cdots[(m+1)-k+1]}{k!}=c_{m+1}^k,$$

所以最后得到

$$(f\cdot g)^{(m+1)}=f^{(m+1)}g^{(0)}+\sum_{k=1}^{m}c_{m+1}^k f^{(m-k+1)}g^{(k)}+f^{(0)}g^{(m+1)}$$

$$=\sum_{k=0}^{m+1}c_{m+1}^k f^{[(m+1)-k]}g^{(k)}.$$

这就是說当 $n=m+1$ 时公式也成立。于是根据数学归納法，我們就証明了莱伯尼兹公式对任意的自然数 n 成立。

[例 3] 設 $y=x^2\sin x$，求 $y^{(80)}$.

由例 2 知道

$$(\sin x)^{(80)}=\sin\left(x+\frac{80}{2}\pi\right)=\sin x,$$

$$(\sin x)^{(79)}=\sin\left(x+\frac{79}{2}\pi\right)=-\cos x,$$

$$(\sin x)^{(78)}=\sin\left(x+\frac{78}{2}\pi\right)=-\sin x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

但因

$$(x^2)'=2x,$$

$$(x^2)''=2,$$

$$(x^2)'''=\cdots=x^{(n)}=0\quad(n\geqslant 3).$$

所以由莱伯尼兹公式，可得

$$y^{(80)}=(x^2\sin x)^{(80)}$$

$$=x^2\sin x+80(2x)(-\cos x)+\frac{80\cdot 79}{2}\cdot 2(-\sin x)$$

$$=x^2\sin x-160x\cos x-6320\sin x.$$

从高阶导数定义出发，重复应用一阶导数的法则，容易建立复合函数、参数方程及隐函数等求高阶导数的公式。但这些形式上

显得繁瑣的公式，对于具体寻求高阶导数并不带来多大方便，因此，我們不在这里一一贅述了。

作为例子，我們指出参数方程 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 求两阶导数的方法：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

[例 4] 設 $y=\ln\sin x$，則

$$y'=\operatorname{ctg}x,$$

$$y''=(y')'=(\operatorname{ctg}x)'=-\csc^2 x.$$

[例 5] 設 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$，則有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\left(-\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg}t\right)'}{(a\cos t)'}=-\frac{b}{a^2}\csc^3 t.$$

显然，这样計算比代公式要簡明得多。

[例 6] 設 $x^2+xy+y^2=4$.

两边求一次导数，有

$$2x+y+xy'+2yy'=0, \qquad (*)$$

即
$$y'=-\frac{2x+y}{x+2y}.$$

現在来求二阶导数，将方程(*)两边再对 x 求导，即得

$$2+y'+y'+xy''+2y'^2+2yy''=0,$$

于是
$$y''=-\frac{2+2y'+2y'^2}{x+2y},$$

再把 y' 的表达式代入，即得

$$y''=-\frac{6(x^2+xy+y^2)}{(x+2y)^3}.$$

二、高阶微分

对于函数 $y=f(x)$，类似于高阶导数，我們可以定义高阶微分，这时，假定自变量的改变量仍为 dx，例如二阶微分定义为

$$d^2y=d(dy)=d[f'(x)dx]=d[f'(x)]dx=f''(x)dx^2,$$

三阶微分定义为

$$d^3y=d(d^2y)=f'''(x)dx^3,$$

一般地，定义 n 阶微分为

$$d^ny=f^{(n)}(x)dx^n.$$

由此可見
$$\frac{d^ny}{dx^n}=f^{(n)}(x),$$

这也就是我們之所以記 n 阶导数为 $\frac{d^ny}{dx^n}$ 的原因。

但是，对于复合函数我們就不能得出这一公式了。因为在 $y=f(u)$，而 u 又是自变量 x 的函数 $u=g(x)$ 时，由一阶微分的形式不变性可得

$$dy=f'(u)du.$$

但是，现在由于 u 已不是自变量，故 du 也不再是固定了，它依赖于自变量 x，事实上

$$du=g'(x)dx,$$

因此有
$$\begin{aligned}d^2y&=d[f'(u)du]=[df'(u)]du+f'(u)d(du)\\&=f''(u)du^2+f'(u)d^2u.\end{aligned}$$

当 u 是自变量 x 时，$d^2x=0$，上式又回到前面导出的公式

$$d^2y=f''(x)dx^2.$$

这一事实說明对高阶微分而言已不再有形式上的不变性。这是高阶微分与一阶微分之間的一个重要差别。

[例 7] 設 $y=x^2$.

那末，当 x 是自变量时，由定义立即可求得

$$dy=2x\,dx,$$

$$d^2y=2dx^2.$$

但是当 x 不是自变量，而是另一变量 t 的函数时，例如有 $x=t^2$，于是 $y=t^4$，因而

$$dy=4t^3\,dt,$$

$$d^2y=12t^2\,dt^2.$$

由此可看出 dy 的新表达式，可以把 $x=t^2$ 代入 $dy=2xdx$ 而得出，对于 d^2y 如果从 $d^2y=2dx^2$ 出发仍然以 $x=t^2$ 代入，则得

$$d^2y=2dx^2=2(2t\,dt)^2=8t^2\,dt^2,$$

而不是 $12t^2\,dt^2$，这是什么原因呢？因为 x 不是自变量，dx 也不再是常量，它是 t 的函数，此时应为

$$d^2y=2dx^2+2x\,d^2x,$$

而 $d^2x=d(2t\,dt)=2dt^2$，代入上式，得

$$d^2y=2(2t\,dt)^2+2t^2(2dt^2)=12t^2\,dt^2.$$

这才重又得到上面已求出的正确答案。

习　　题

1. 若 $S=vt-\frac{1}{2}gt^2$，求

   (1) 在 $t=1$，$t=1+\Delta t$ 之間的平均速度（$\Delta t=1,\ 0.1,\ 0.01$）；

   (2) 在 $t=1$ 的瞬时速度。

2. 若 $y=f(x)=x^3$，求

   (1) 过曲綫上二点 x_0，$x_0+\Delta x$ 之割綫的斜率（$x_0=2,\ \Delta x=0.1,\ 0.01,\ 0.001$）；

   (2) 在 $x=x_0$ 曲綫切綫的斜率。

3. 求下列函数在所示点的 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$：

   (1) $y=\sqrt{x}$　（$x=2,\ \Delta x=0.01$）；

(2) $y=\frac{1}{x}$　$(x=4,\ \Delta x=0.04)$.

4．証明：

(1) $\Delta[f(x)\pm g(x)]=\Delta f(x)\pm\Delta g(x)$;

(2) $\Delta[f(x)\cdot g(x)]=g(x+\Delta x)\cdot\Delta f(x)+f(x)\Delta g(x)$.

5．由导数的定义出发，求下列函数的导数：

(1) $y=\cos x$;

(2) $y=\sqrt[3]{x}$.

6．求下列函数在点 $x=x_0$ 的导数值：

(1) $y=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$,　求 $y'(0)$, $y'(1)$;

(2) $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$,　求 $y'(0)$, $y'(1)$, $y'(2)$, $y'(3)$;

(3) $y=x^2\sin(x-2)$,　求 $y'(1)$, $y'(2)$;

(4) $y=\sin x+\cos x$,　求 $y'(0)$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

7．求下列函数的导数：

(1) $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$;　(2) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$;

(3) $y=\frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$;　(4) $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

(5) $y=\sin^n x\cos nx$;　(6) $y=\operatorname{sh}^n x\operatorname{ch} nx$;

(7) $y=8\cot x+\sin x$;　(8) $y=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x$;

(9) $y=\sin^2 x$;　(10) $y=\frac{\sin x}{x^2}$;

(11) $y=2e^x+\ln x$;　(12) $y=e^{-x}+c$;

(13) $y=2^x\cdot e^x$;　(14) $y=(\sin x+\cos x)^n$;

(15) $y=e^x(x^2-2x+2)$;　(16) $y=e^{\sin x}$;

(17) $y=e^{-x^2+2x}$;　(18) $y=\arccos\frac{1}{x}$;

(19) $y=x\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}$;　(20) $y=\frac{x+e^x}{\operatorname{tg}3x}$.

8．求下列隐函数的导数：

(1) $x^2+y^2=R^2$;　(2) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$;

(3) $y-\cos(x+y)=0$;　(4) $y=x+\varepsilon\sin y$ ($0<\varepsilon<1$, ε 为常数);

(5) $y^2=2px$；　(6) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；

(7) $y=x+\operatorname{arc\,tg} y$；　(8) $y=1+xe^y$；

(9) $y=1-\ln(x+y)+e^y$；　(10) $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

9．求下列函数的导数：

(1) $y=\sec e^x$；　(2) $y=(\log_a x)^2 \quad (a\neq e)$；

(3) $y=\ln^3(x^2)$；　(4) $y=\ln[\ln(\ln x)]$；

(5) $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$；　(6) $y=\arccos(\cos^2 x)$；

(7) $y=\arcsin(\sin x\cdot\cos x)$；　(8) $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x}$；

(9) $y=\sec\cot x$；　(10) $y=\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x\right)}$；

(11) $y=(\sin x)^x$；　(12) $y=2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$；

(13) $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$；　(14) $y=\arcsin(x\ln x)$；

(15) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；　(16) $y=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$；

(17) $y=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2}$；　(18) $y=\operatorname{tg}^3x\cdot\sec x+\operatorname{ctg}x\cdot\csc\frac{1}{x}$；

(19) $y=e^x+e^{e^x}$；　(20) $y=e^x+e^{x^2}+e^{e^{x^2}}$；

(21) $y=a^x+x^a+x^x$；　(22) $y=\sqrt[a]{x}+\sqrt[x]{a}+\sqrt[x]{x}$.

10．求下列参数方程在点 $t=t_0$ 的导数值：

(1) $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t,\end{cases}$ $t_0=\frac{\pi}{2},\ \pi$；　(2) $\begin{cases}x=1-t^2,\\ y=t-t^3,\end{cases}$ $t_0=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{3}$；

(3) $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$ $t_0=0,\ \frac{\pi}{2}$；　(4) $\begin{cases}x=\cos^4 t,\\ y=\sin^4 t,\end{cases}$ $t_0=0,\ \frac{\pi}{2}$.

11．求下列参数方程的导数：

(1) $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x=a\operatorname{ch} t,\\ y=b\operatorname{sh} t;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=\sin^2 t,\\ y=\cos^2 t;\end{cases}$　(4) $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t;\end{cases}$

(5) $x=e^{2t}\cos^2 t,\ y=e^{2t}\sin^2 t$.

12．求下列函数在 $x=x_0$ 点的左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$：

(1) $y=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 0, \\ xe^x, & x>0, \end{cases}$ $x_0=0$；　　(2) $y=\begin{cases} e^{x^2}, & x\leqslant 1, \\ xe^x, & x>1, \end{cases}$ $x_0=1$；

(3) $y=\begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ $x_0=0$；　(4) $y=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ $x_0=0$。

13．求下列函数在导数不存在的点的左、右导数：

(1) $y=\big|\ln|x|\big|$；　　(2) $y=|\operatorname{tg} x|$；

(3) $y=\sqrt{1-\cos x}$；　　(4) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$。

14．利用取对数而求导的方法，求下列函数的导数：

(1) $y=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$；　　(2) $y=\dfrac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$；

(3) $y=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}$；

(4) $y=(x+\sqrt{1+x^2})^n$。

15．設 $f(x)$ 是对 x 可求导的函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$：

(1) $y=f(x^2)$；　　(2) $y=f(e^x)\cdot e^{f(x)}$；

(3) $y=f(f(f(x)))$。

16．設 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 为对 x 可求导的函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$：

(1) $y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$；　　(2) $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$　$(\psi(x)\neq 0)$；

(3) $y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$　$(\varphi(x)\neq 0,\ \psi(x)>0)$；

(4) $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)$　$(\varphi(x)>0,\ \psi(x)>0)$。

17．按定义証明：可导的偶函数其导函数是奇函数，而可导的奇函数其导函数是偶函数。

18．按定义証明可导的周期函数，其导函数为周期函数。

19．利用 $\dfrac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kn}(x) \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$，

求 $F'(x)$，而

(1) $F(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & 3 & x-1 \end{vmatrix}$；　(2) $F(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$。

20. 若 (1) $f(x)$ 在 x_0 点有导数，$g(x)$ 在 x_0 点沒有导数，証明 $F(x)=f(x)+g(x)$ 在 x_0 点沒有导数；

(2) $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 点均沒有导数，能否断定它們的和 $F(x)=f(x)+g(x)$ 在 x_0 点沒有导数？

以例子 $f(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -1, & x<0, \end{cases}$　　$g(x)=\begin{cases} -1, & x\geqslant 0, \\ x, & x<0 \end{cases}$ 說明之。

21. 在上題的情况下能否断定它們的积 $G(x)=f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 点沒有导数？

以下面例子說明：

(1) $f(x)=x$, $g(x)=|x|$；　　(2) $f(x)=|x|$, $g(x)=|x|$.

22. 若函数 $f(x)$ 在有穷区間 (a, b) 中有导数，且 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，是否必有 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=\infty$？以例子 $f(x)=\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}$ 說明之。

反之，如 $f(x)$ 在有穷区間 (a, b) 中有导数，且 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=\infty$，是否必有 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$？以例子 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 說明之。

23. 若 (1) $f(x)$ 在 $x=g(x_0)$ 有导数，而 $g(x)$ 在 x_0 点沒有导数；

(2) $f(x)$ 在 $x=g(x_0)$ 沒有导数，而 $g(x)$ 在 x_0 点有导数；

(3) $f(x)$ 在 $x=g(x_0)$ 沒有导数，而 $g(x)$ 在 x_0 点沒有导数；

則复合函数 $F(x)=f(g(x))$ 在 x_0 点是否可导？

以下面例子說明：

(1) $f(x)=x^3$,　　$g(x)=|x|$；

(2) $f(x)=|x|$,　　$g(x)=x^4$；

(3) $f(x)=2x+|x|$,　$g(x)=\dfrac{2}{3}x-|x|$.

24. 利用微分求近似值：

(1) $\sqrt[3]{1.01}$；　　　(2) $\sin 29^\circ$.

25. 求下列函数在 $x=x_0$ 的微分：

(1) $y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$, 求 $dy(0)$, $dy(1)$；

(2) $y=\sec x+\operatorname{tg} x$,　　求 $dy(0)$, $dy\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $dy(x)$；

(3) $y=\dfrac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{a}$,　　求 $dy(0)$, $dy(a)$；

(4) $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$,　　求 $dy(0.1)$, $dy(0.01)$.

26．求下列函数 $y=y(x)$ 的微分：

(1) $y=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4$； (2) $y=x^2\sin x$；

(3) $y=\frac{x}{1-x^2}$； (4) $y=x\ln x-x$；

(5) $y=(1-x^2)^n$； (6) $y=\sqrt{x}+\ln x-\frac{1}{\sqrt{x}}$；

(7) $y=\ln \operatorname{tg} x$； (8) $y=\sin ax\cos bx$；

(9) $y=e^{ax}\cos bx$； (10) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$．

27．求下列函数 y 的微分：

(1) $y=\sin^2 t,\ t=\ln(3x+1)$； (2) $y=\ln(3t+1),\ t=\sin^2 x$；

(3) $y=e^{3u},\ u=\frac{1}{2}\ln t,\ t=x^3-2x+5$；

(4) $y=\operatorname{arc\,tg} u,\ u=(\log t)^2,\ t=1+x^2-\operatorname{ctg} x$．

28．若 u,v,w 为 x 的可微分函数，求函数 y 的一阶微分 dy：

(1) $y=u\cdot v\cdot w$； (2) $y=\frac{u\cdot w}{v^2}$；

(3) $y=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$； (4) $y=\ln\sqrt{u^2+v^2}$；

(5) $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{v}$．

29．求下列函数的高阶导数：

(1) $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$，求 y''； (2) $y=x\ln x$， 求 y''；

(3) $y=e^{-x^2}$， 求 y''； (4) $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$，求 y''；

(5) $y=x^2\cdot e^{2x}$， 求 y'''； (6) $y=a^{3x}$， 求 y'''；

(7) $y=x^3\operatorname{sh} x$， 求 $y^{(50)}$； (8) $y=x^3\cos x$， 求 $y^{(50)}$．

30．設 $f(x)$ 的各阶导数存在，求 y'' 及 y'''：

(1) $y=f(x^2)$； (2) $y=f\left(\frac{1}{x}\right)$；

(3) $y=f(e^{-x})$； (4) $y=f(\ln x)$．

31．設 $y=e^x\sin x,\ z=e^x\cos x$，証明它們滿足方程 $y''=2z,\ z''=-2y$．

32．設 $y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$，其中 $c_1,c_2,\lambda_1,\lambda_2$ 是常数，証明它滿足方程

$$y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y=0.$$

33．設 $y=c_1\sin x+c_2\cos x$，証明滿足方程 $y''+y=0$．

34．求下列参数方程的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$：

(1) $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=3t-t^3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t); \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t; \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x=f'(t), \\ y=tf'(t)-f(t). \end{cases}$

35．求由隐函数所确定的二阶导数：

(1) $e^{x+y}-xy=0$； (2) $x^3+y^3-3axy=0$；

(3) $y^2+2\ln y-x^4=0$.

36．利用数学归納法証明下面公式：

(1) $(e^x)^{(n)}=e^x$； (2) $(a^x)^{(n)}=a^x\cdot(\log a)^n \quad (a>0)$；

(3) $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$； (4) $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$；

(5) $(x^m)^{(n)}=m\cdot(m-1)\cdots(m-n+1)\cdot x^{m-n}$，$m=n$ 时 $(x^n)^{(n)}=n!$；

(6) $(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{x^n}$.

37．求 n 阶导数：

(1) $y=\frac{1}{x(1-x)}$； (2) $y=\frac{1}{x^2-2x-8}$；

(3) $y=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_0$； (4) $y=\cos^2 bx$；

(5) $y=\frac{e^x}{x}$； (6) $y=e^{ax}\sin bx$；

(7) $y=2^x\cdot\ln x$；

(8) $y=e^{ax}p_n(x)$， 其中 $p_n(x)$ 为 n 次多项式。

38．求高阶微分：

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$，求 d^2y； (2) $y=x^n$， 求 d^2y；

(3) $y=x\cos 2x$，求 d^3y； (4) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$，求 d^ny；

(5) $y=x^n\cdot e^x$， 求 d^ny； (6) $y=\frac{\ln x}{x}$，求 d^ny.

39．对 $y=e^x$ 求 d^2y，考虑下面两种情形：

(1) 当 x 是独立变量时； (2) 当 x 是中間变量时。

40．若 u, v 为 x 的函数，且可微分足够次数，求高阶微分：

(1) $y=u(x)\cdot v(x)$，求 d^3y；　(2) $y=\frac{u(x)}{v(x)}$，　求 d^2y；

(3) $y=u^m(x)v^n(x)$ (m、n 为常数)，求 d^2y；

(4) $y=a^{u(x)}(a>0)$，求 d^2y；　(5) $y=\ln u(x)$，　求 d^3y；

(6) $y=\sin(u(x))$，　求 d^3y。

41. 試以变量 x 和 y 的逐次微分 (x 不作为自变量，即 $d^2x\neq0$) 来表示函数 $y=y(x)$ 的导数 y', y'', y'''。

42. 若 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 証明 $f^{(n)}(0)=0$。

第二章　微分学的基本定理

§1 中 值 定 理

在上一章中，引进了导数的概念及求导法则，为了能够进一步应用导数来研究函数本身的一些性质，首先须要建立几个重要的定理和公式。

一、費尔馬(Férmat)定理

若(i)函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域 $O(x_0, \delta)$ 内有定义，并且在此邻域内恒有

$$f(x) \leqslant f(x_0)$$

或者

$$f(x) \geqslant f(x_0);$$

(ii)函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导；

则有

$$f'(x_0) = 0.$$

【証明】 由于假設 $f'(x_0)$ 存在，按定义，也就是 $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$。另一方面，由于 $f(x) \leqslant f(x_0)$，所以对 $(x_0, x_0+\delta)$ 上的各点 x 有：

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0,$$

而对 $(x_0-\delta, x_0)$ 上的各点 x 有：

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0.$$

再由极限性质得：

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0,$$

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0.$$

而 $f'(x_0)$ 是一个定数，因之它必須等于零，即 $f'(x_0)=0$。

对于 $f(x)\geqslant f(x_0)$ 的情形，也可相仿証明。

这个定理的几何意义是：如果曲綫 $y=f(x)$ 在 x_0 点具有极大值（也就是函数 $f(x)$ 在 x_0 点的值不小于 $f(x)$ 在 x_0 点近旁的其他点上的值）或者曲綫 $y=f(x)$ 在 x_0 点具有极小值（也就是函数 $f(x)$ 在 x_0 点的值不大于 $f(x)$ 在 x_0 点近旁的其他点上的值），并且曲綫 $y=f(x)$ 在 x_0 点具有切綫 P（图 2-2-1），那末，费尔馬定理就表明了切綫 P 必为水平的。

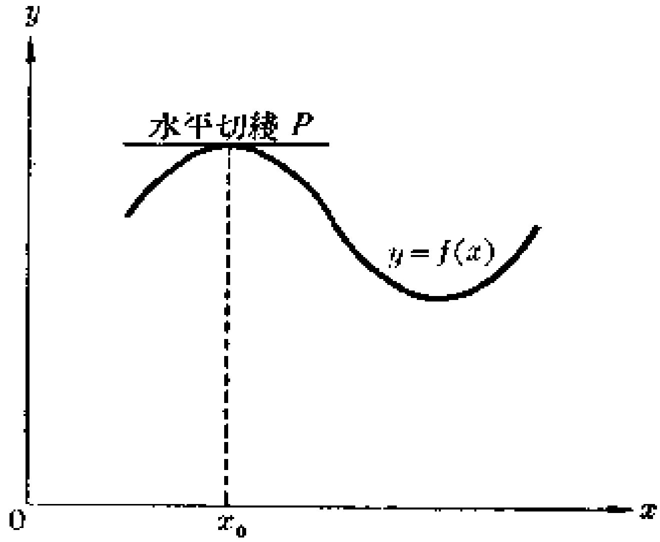


图 2-2-1

二、洛尔(Rolle)定理

若函数 $f(x)$ 滿足：

（i） 在閉区間$[a, b]$連續；

（ii） 在开区間(a, b)可导；

（iii） $f(a)=f(b)$；

則在(a, b)內至少存在一点 x_0，使

$$f'(x_0)=0。$$

【証明】 因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 連續，故在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 必达到其最大值 M 和最小值 m，分二种情形来証明：

1．若 $M=m$，則 $f(x)$ 在$[a, b]$上恒为一常数 M，所以$f'(x)$ 在 (a, b) 上恒为零，于是 (a, b) 內的每一点都符合定理結論的要求。

2．若 $M>m$，即 $f(x)$ 在 (a, b) 上不恒为常数，那末由于

$f(a)=f(b)$，所以 M 及 m 中至少有一个不等于 $f(a)$ $(=f(b))$，即在 (a, b) 内至少有一点 x_0，使得 $f(x_0)=M$（或 $f(x_0)=m$），又按最大值（或最小值）的意义，对 (a, b) 内任何一点 x，恒有

$$f(x)\leqslant f(x_0)\quad（或\ f(x)\geqslant f(x_0)），$$

又已知 $f(x)$ 在 x_0 点可导，于是由费尔馬定理，得

$$f'(x_0)=0.$$

定理証毕。

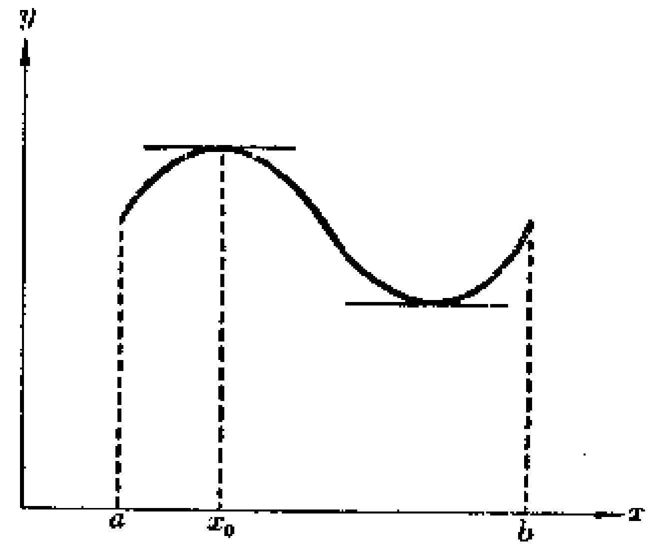


图　2-2-2

定理的几何意义：在定理的条件下，(a, b) 内一定存在一点 x_0，使在这点曲綫具有水平切綫（图 2-2-2）。要注意的是，这种点可能不止一个，但无論如何，总是至少有一个这样的点存在。

現在，我們来分析一下定理的条件，下面的三个例題表明，如果定理的条件缺少其一，結論可能不成立：

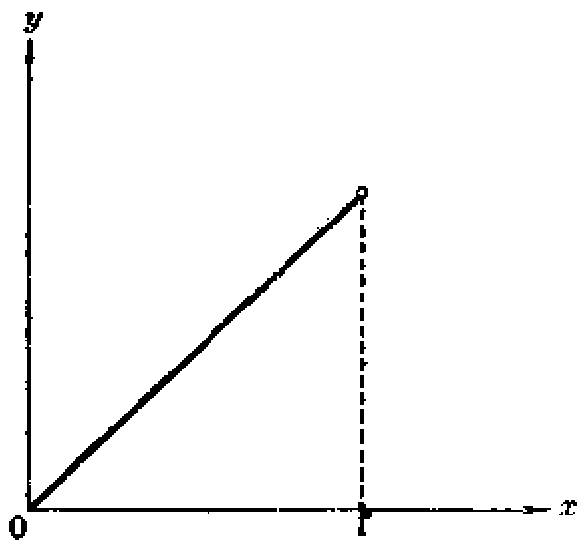


图　2-2-3

［例 1］　$y=x-[x]$,

$$0\leqslant x\leqslant 1.$$

这个函数也就是（图 2-2-3）：

$$y=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<1, \\ 0, & x=1. \end{cases}$$

它不滿足条件 (i)，但滿足条件 (ii) 和 (iii)，容易看出，定理的結論是不成立的。事实上在 $(0, 1)$ 内 $y'=1$，故不存在如此的

x_0，使 $y'=f'(x_0)=0$。

[例 2] $y=|x|$，$-1\leqslant x\leqslant 1$。

这个函数满足条件(i)和(iii)，但不满足条件(ii)，它的导数：

$$y'=\begin{cases}-1, & -1\leqslant x<0,\\ 1, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

而在 $x=0$ 点不可导，由此可知，也不存在如此的 x_0，使 $y'=f'(x_0)=0$。

[例 3] $y=x$，$[0, 1]$。

满足条件(i)和(ii)，但不满足条件(iii)，也容易知道，此时定理的結論不成立，因为这时 $y'=1$。

然而不能认为，如果定理的条件不全成立，那末一定沒有适合定理結論的点 x_0 存在。事实上，可以很容易地举出例子来說明，即使定理的条件不全成立，但有可能存在这样的点 x_0，使 $f'(x_0)=0$，所以說，定理的条件是充分的，但非必要的。

三、拉格朗日(Lagrange)定理

这个定理也称为微分学的中值定理，或者称为拉格朗日公式。它是微分学中的一个很重要的定理。

定理 若函数 $f(x)$ 满足：

(i) 在$[a, b]$連續；

(ii) 在(a, b)可导；

則在(a, b)内至少存在一点 x_0，使

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

在未証明以前，先叙述一下这个定理的几何意义。

因为 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 是連續曲綫 $y=f(x)$ 上$[a, f(a)]$与$[b, f(b)]$两点的弦的斜率(見图 2-2-4)，所以本定理的几何意义是：在每一点都有切綫的連續曲綫上，任意一个弦的两端点之間至少能找到

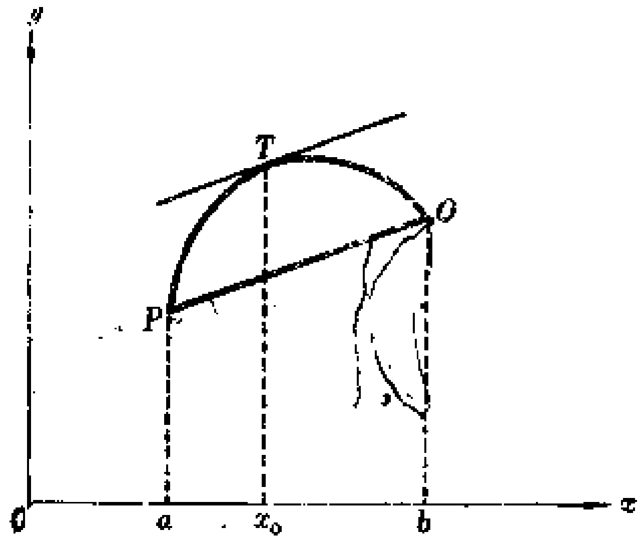


图　2-2-4

曲綫上的一点，在这点曲綫的切綫与弦平行。显然洛尔定理是拉格朗日定理的一个特殊情形；在洛尔定理中，弦平行于 x 軸。

現在来証明定理。

【証明】　作輔助函数

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x.$$

由連續函数性质及导数运算法則，可知 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 連續，在 (a, b) 可导，且

$$\varphi(b)=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}=\varphi(a).$$

即函数 $\varphi(x)$ 滿足洛尔定理的三个条件，故在 (a, b) 内至少有一点 x_0，使

$$\varphi'(x_0)=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

即

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

这正是所要証明的。

（注）　在証明中也可作其他的輔助函数，參見习題 12 中的 $\Phi(x)$，它并有明显的几何意义。

定理的結論也經常用另一种形式表示。由于 x_0 是 (a, b) 中的一个点，故可表示成 $a+\theta(b-a)$ $(0<\theta<1)$ 的形式，于是定理的結論就可改写为在 $(0, 1)$ 中至少存在一个 θ 值，使

$$f'[a+\theta(b-a)]=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

或
$$f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)](b-a).$$

从本定理立刻可以得到下面三个重要的推論。

推論 1 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内，$f'(x)=0$，則在 (a, b) 內 $f(x)$ 为一常数。

【証明】 对于 (a, b) 內任意两点 x_1 和 x_2，設 $x_1<x_2$，在 $[x_1, x_2]$ 上应用拉格朗日定理有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(x_0)(x_2-x_1), \quad x_0\in(x_1, x_2).$$

注意到 $f'(x_0)=0$，即得

$$f(x_2)=f(x_1).$$

而这个等式对 (a, b) 内任意两点成立，这就証明了 $f(x)$ 在 (a, b) 为一常数。

推論 2 若两函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 (a, b) 内成立

$$f'(x)=g'(x),$$

則在 (a, b) 內 $f(x)=g(x)+c$ （c 为一常数）。

証明不难由推論 1 得到。

为了叙述推論 3，先引进下面的一个概念。

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义，且存在常数 L，使对 $[a, b]$ 上任意两点 x', x'' 成立

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant L|x'-x''|.$$

則說 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上滿足李普希兹(Lipschitz)条件。

推論 3 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在有界导数，則 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 滿足李普希兹条件。

【証明】 由于 $f'(x)$ 有界，即在 $[a, b]$ 上成立

$$|f'(x)| \leqslant L \quad (L\text{ 为一常数}).$$

利用拉格朗日公式，对 $[a, b]$ 内任意两点 x' 及 x''，

$$|f(x')-f(x'')| = |f'(x_0)(x'-x'')| \leqslant L|x'-x''|.$$

这就是李普希兹条件，于是推論 3 得証。

推論 3 对于 $[0, +\infty)$ 或 $(-\infty, +\infty)$ 的情形亦成立（参見习題 18）。

作为拉格朗日定理的一个推广，还可以得到下面的定理。

四、柯西定理

若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在閉区間 $[a, b]$ 上連續，在开区間 (a, b) 内可导，并且 $g'(x)\neq 0$，則在 (a, b) 内至少存在一点 x_0，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

【証明】 首先可以肯定 $g(a)\neq g(b)$，否則若 $g(a)=g(b)$，那末由洛尔定理知道，$g'(x)$ 在 (a, b) 内存在零点，此与假設矛盾。

再作輔助函数

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x),$$

再运用洛尔定理，本定理立即得証。

若取 $g(x)=x$，則从本定理的結論立即得到拉格朗日定理。故拉格朗日定理实为本定理之一特例。

§2 洛必达 (L'Hospital) 法則

在极限論里，要求出下面的极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x},\quad \lim_{x\to 0}x\ln x$$

是相当复杂的，其原因在于我們不能利用极限的运算法則来求这些极限。例如第一个极限，当 $x\to 0$ 时，它的分子和分母分别趋于

0，于是是一个 $\frac{0}{0}$ 的型式。至于极限是否存在以及是何值，就必須进一步討論，而不能利用运算来求得了。同样，第二个极限是一个 $\frac{\infty}{\infty}$ 的型式。第三个极限是一个 $0\cdot\infty$ 的型式。这些型式統称为待定型。

本节所給出的洛必达法則，在相当大的場合下，能够比較簡单和有效地求出这些待定型的极限。通常我們遇到的待定型，主要有以下两种：

$$\frac{0}{0}\text{ 型和 }\frac{\infty}{\infty}\text{ 型(这只是記号!)}$$

还有其他的一些待定型，如 $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞，这些型式可化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型。下面我們先給出求 $\frac{0}{0}$ 及 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限的洛必达法則。这个法則建立在函数的可导性上。

一、$\frac{0}{0}$ 及 $\frac{\infty}{\infty}$ 待定型

定理 1 $\left(\frac{0}{0}\text{ 型}, x\to a+0\right)$

若(i) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(a, a+\delta)$ 上有定义 $(\delta>0)$，并且

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=0,\quad \lim_{x\to a+0} g(x)=0;$$

(ii) $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 在 $(a, a+\delta)$ 上存在，$g'(x)\neq 0$，并且

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\quad\text{(包括 }\infty\text{ 的情形)};$$

則

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

【証明】 作輔助函数：

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当 } x\in(a, a+\delta),\\ 0, & \text{当 } x=a;\end{cases}$$

$$G(x)=\begin{cases} g(x), & \text{当 } x\in(a, a+\delta),\\ 0, & \text{当 } x=a.\end{cases}$$

于是函数 $F(x)$ 及 $G(x)$ 在 $[a, a+\delta]$ 連續，在 $(a, a+\delta)$ 可微，并且 $G'(x)\neq 0$。今对 $(a, a+\delta)$ 内任意一点 x，利用柯西定理得

$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F'(x_0)}{G'(x_0)}\quad [\text{这里 } x_0\in(a, x)].$$

由 $F(x)$ 及 $G(x)$ 的定义，上式亦即

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

所以当 $x\to a+0$ 时（这时，显然有 $x_0\to a+0$），对上式两端取极限，即得定理的結果。

[例 1]　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$，它是 $\dfrac{0}{0}$ 待定型。

用洛必达法則

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim_{x\to 0}\frac{m}{n}\cdot\frac{\cos mx}{\cos nx}=\frac{m}{n}.$$

[例 2]　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$，也是 $\dfrac{0}{0}$ 待定型。

用洛必达法則得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$，仍是 $\dfrac{0}{0}$ 待定型。

再用洛必达法則得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

所以
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

定理 2　$\left(\dfrac{0}{0}\text{ 型}, x\to+\infty\right)$

若 (i) 函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上有定义，

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}g(x)=0;$$

(ii) $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 皆可导，$g'(x)\neq 0$，并且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\quad (\text{包括 }\infty\text{ 的情形});$$

則
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

【証明】 令 $y=\frac{1}{x}$，于是当 $x\to+\infty$ 时，$y\to 0$，且
$$\lim_{y\to 0}f\left(\frac{1}{y}\right)=\lim_{y\to 0}g\left(\frac{1}{y}\right)=0.$$

对 $f\left(\frac{1}{y}\right)$，$g\left(\frac{1}{y}\right)$ 应用定理1的結果，并利用复合函数求导法則，得
$$\lim_{y\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)}=A.$$

再代回变量 x，即得
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

[例3] 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}x\right)}{\frac{1}{x}}$.

本題满足定理2条件，所以
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}x\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1.$$

对 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限的求法，有相仿的定理。

定理3 $\left(\frac{\infty}{\infty}\text{型}，x\to a+0\right)$

若(i)函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(a, a+\delta)$ 有定义 $(\delta>0)$，
$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to a+0}g(x)=\infty;$$

(ii) $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(a, a+\delta)$ 皆可导，$g'(x)\neq 0$，并且
$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\quad(\text{包括}\ \infty\ \text{的情形});$$

则
$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

这里将証明的思路叙述如下：若 $a<x<y<a+\delta$，由柯西定理：

$$\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(x)\left(1-\dfrac{f(y)}{f(x)}\right)}{g(x)\left(1-\dfrac{g(y)}{g(x)}\right)}\quad(x<\xi<y).$$

由于 $f(x)\to\infty$，$g(x)\to\infty$（当 $x\to a+0$ 时），故总可以令 $x\to a+0$ 較 $y\to a+0$ 快些，以使得

$$\frac{f(y)}{f(x)}\to 0,\quad \frac{g(y)}{g(x)}\to 0\quad(x\to a+0,\ y\to a+0).$$

于是命題得証。

定理 4　$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型},\ x\to+\infty\right)$

若(i)函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 有定义，

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\infty;$$

(ii) $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 皆可导，$g'(x)\neq 0$，并且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\quad(\text{包括 }\infty\text{ 的情形});$$

则
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

[例 4]　求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log\sin mx}{\log\sin nx}$.

由 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\log\sin mx=\lim_{x\to 0}\log\sin nx=-\infty$，所以以上极限是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 待定型，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\sin mx}{\log\sin nx}=\lim_{x\to 0}\frac{m}{n}\cdot\frac{\cos mx\sin nx}{\cos nx\sin mx}$$
$$=\frac{m}{n}\lim_{x\to 0}\frac{\sin nx}{\sin mx}=1.$$

[例 5] 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{x}}$ （α 为任意正实数）。

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}}{e^{x}},$$

若 α 为整数，则求导 α 次后，即变成

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\alpha+1)}{e^{x}}=0;$$

若 α 不是整数，则必存在 k，使 $\alpha-k<0$，于是求导 k 次后得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{x^{k-\alpha}e^{x}}=0.$$

总之，不論 α 是否为整数，总有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{x}}=0$。

二、其他的待定型

除了上述两种待定型外，还有 $0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，0^0，1^∞，∞^0 等待定型。由于它們都可化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，因此，也常可用洛必达法則求出其值。

将这些待定型化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的步驟如下，"$\to$"表示可化为：

（i） $0\cdot\infty$ 型 $\to\frac{1}{\infty}\cdot\infty$ 型或者 $0\cdot\infty$ 型 $\to 0\cdot\frac{1}{0}$ 型；

（ii） $\infty-\infty$ 型 $\to\frac{1}{0}-\frac{1}{0}$ 型，再經过通分 $\to\frac{0-0}{0\cdot 0}$ 型(只是記号!)；

（iii） 对于 0^0 型，1^∞ 型及 ∞^0 型，取对数 $\to 0\cdot\ln 0$ 型，$\infty\cdot\ln 1$ 型及 $0\cdot\ln\infty$ 型(只是記号!) $\to 0\cdot\infty$ 型，$\infty\cdot 0$ 型及 $0\cdot\infty$ 型。以下各举一例說明之。

[例 6] 求 $\lim\limits_{x\to+0}x^{\alpha}\ln x$ （α 为任一正实数）。它是 $0\cdot\infty$ 型，但

$$\lim_{x\to+0}x^{\alpha}\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^{\alpha}}}$$

就是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型了。所以可用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to+0} x^{\alpha}\ln x = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^{\alpha}}} = \lim_{x\to+0} -\frac{x^{\alpha}}{\alpha} = 0.$$

[例 7]　求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$，它是 $\infty-\infty$ 型，而

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}$$ 是 $\frac{0}{0}$ 型，所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0.$$

[例 8]　求 $\lim\limits_{x\to+0} x^{x}$，为 0^0 型。

由于
$$x^{x}=e^{x\ln x},$$

所以
$$\lim_{x\to+0} x^{x}=e^{\lim\limits_{x\to+0} x\ln x}.$$

而
$$\lim_{x\to+0} x\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=0,$$

得
$$\lim_{x\to+0} x^{x}=e^{0}=1.$$

[例 9]　求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$，它是 1^{∞} 型。

設
$$A=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}},$$

于是
$$\ln A=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2},$$

就化为 $\frac{0}{0}$ 型了，且

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{x}{\sin x}\left[\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}\right]}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}\quad\left(\text{仍为 }\frac{0}{0}\text{ 型}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{2(2\sin x+x\cos x)}\quad\left(\text{仍为 }\frac{0}{0}\text{ 型}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\cos x}{2(3\cos x-x\sin x)}=-\frac{1}{6}.$$

即

$$\ln A=-\frac{1}{6},$$

所以

$$A=e^{-\frac{1}{6}}.$$

[例 10] 求 $A=\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$，它是 ∞^0 型。

此时

$$\ln A=\lim_{x\to+0}\frac{\ln\operatorname{ctg}x}{\ln x}=\lim_{x\to+0}\frac{-\dfrac{1}{\operatorname{ctg}x\sin^2x}}{\dfrac{1}{x}}=-1.$$

所以

$$A=\frac{1}{e}.$$

最后，我們指出在使用洛必达法則求极限时的两点注意(参見习題 20)。

1. 洛必达法則只能对 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型时才可直接应用，对其他的待定型必須先化到这两种类型之一，然后再应用洛必达法則。

2. 洛必达法則只說明当 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，等于 A 时，那末 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也存在且就是 A (有限或无限)。也就是說在遇到 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在的时候，并不能断定 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也不存在，只是在这时不能利用洛必达法則，而須用其他方法去討論 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

[例 11] 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$.

此时，若对分子分母分别求导，得到

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}=\lim_{x\to\infty}(1+\cos x),$$

右边的极限不存在。但是另一方面却有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1.$$

§3 泰勒(Taylor)公式

一元函数的泰勒公式

不論在近似計算或理論分析中，我們希望能用一个簡单的函数来近似地表示一个比較复杂的函数，这样做将会带来很大的方便。一般說来，最簡单的是多項式。但是怎样从一个函数的本身得出我們所需要的多項式呢？

先让我們考虑一个特殊的問題：給出一个多項式

$$y=f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n.$$

容易知道，它具有任意阶連續导数，而当 $k>n$ 时，$y^{(k)}=0$，現在我們要問，这个多項式的系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 和它的导数有什么关系呢？經过計算立刻得出

$$a_0=f(0),\quad a_1=f'(0),\quad a_2=\frac{f''(0)}{2!},$$

$$a_3=\frac{f'''(0)}{3!},\quad \cdots,\quad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

如果把这个多項式按照 $(x-x_0)$ 的冪重新写出来，也就是說把 $y=f(x)$ 写为

$$y=f(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+\cdots+b_n(x-x_0)^n,$$

那末这些系数 $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 又和 $f(x)$ 的导数有什么关系呢？

經过計算容易得到

$$b_0=f(x_0), \quad b_1=f'(x_0), \quad b_2=\frac{f''(x_0)}{2!},$$

$$b_3=\frac{f'''(x_0)}{3!}, \quad \cdots, \quad b_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

一般地任意給出一个函数 $y=f(x)$（不一定是多項式），設它在 x_0 点具有直到 n 阶的連續导数，我們总可以作出如下的多項式

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

如果这个函数 $y=f(x)$ 就是一个 n 阶多項式，那末由剛才的討論就有

$$f(x)\equiv P_n(x).$$

但对于一般的函数 $f(x)$ 而言，它就不等于 $P_n(x)$ 了。我們要問：这时 $f(x)$ 和 $P_n(x)$ 相差多少呢？

定理 若 $f(x)$ 在 x_0 点具有直到 $n+1$ 阶的連續导数，那末

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x).$$

这里余項 $R_n(x)$（它被称为拉格朗日余項）为

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 在 x 与 x_0 之間。

【証明】 作輔助函数

$$\varphi(t)=f(x)-f(t)-f'(t)(x-t)-\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2-\cdots-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n,$$

在区間$[x_0, x]$或$[x, x_0]$上$\varphi(t)$是連續的,并且

$$\varphi(x_0)=R_n(x), \quad \varphi(x)=0,$$

$$\begin{aligned}\varphi'(t)&=-f'(t)-[f''(t)(x-t)-f'(t)]\\&-\left[\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2-f''(t)(x-t)\right]-\cdots\\&-\left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\right],\end{aligned}$$

化簡后有

$$\varphi'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

再引进一个輔助函数

$$\psi(t)=(x-t)^{n+1},$$

对函数$\varphi(t)$和$\psi(t)$利用§1中的柯西定理,得到

$$\frac{\varphi(x_0)-\varphi(x)}{\psi(x_0)-\psi(x)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)},$$

其中ξ在x与x_0之間。将$\varphi(x_0)$, $\varphi(x)$, $\varphi'(\xi)$以及$\psi(x_0)$, $\psi(x)$, $\psi'(\xi)$的表示式代入,得

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

这就是我們所要証明的結論。

(注) 拉格朗日余項还可以写成以下形式:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中$0<\theta<1$. 公式

$$\begin{aligned}f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots\\+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\end{aligned}$$

称为带有拉格朗日余項的泰勒(Taylor)公式。余項$R_n(x)$尚有其他形式,将在第四篇冪級数中給出。

当 $x_0=0$ 时，得到

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),$$

其中余项 $$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1).$$

这个公式又称为麦克劳林（Maclaurin）公式，它在近似計算和一些数学問題中是非常有用的。

[例 1] e^x 在 0 点的展开式。

我們有

$$f(x)=e^x,\quad f'(x)=e^x,\quad \cdots,\quad f^{(k)}(x)=e^x,\quad \cdots;$$
$$f(0)=1,\quad f'(0)=1,\quad \cdots,\quad f^{(k)}(0)=1,\quad \cdots.$$

所以

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\quad(0<\theta<1).$$

特别当 $x=1$ 时，得

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}e^{\theta}.$$

[例 2] $\sin x$ 在 0 点的展开式。

我們有 $$f(x)=\sin x,\quad f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\cdots,$$

$$f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right),\quad \cdots,$$

所以

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=-1,\quad \cdots,$$
$$f^{(2n)}(0)=0,\quad f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n,\quad \cdots.$$

由此得展开式

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$+\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\sin\left(\theta x+\left(n+\frac{3}{2}\right)\pi\right).$$

习　题

1. 在費尔馬定理中，若 x_0 为区間的端点，試举例說明結論不成立。

2. 对于 $x_0\in(a,b)$，若 $f'(x_0)>0$ 则存在它的左、右邻域 $O_-(x_0,\delta)$，$O_+(x_0,\delta)$ 使当 $x\in O_-(x_0,\delta)$ 时 $f(x_0)>f(x)$，当 $x\in O_+(x_0,\delta)$ 时 $f(x_0)<f(x)$。

3. 証明若 $f'_+(x_0)>0$，$f'_-(x_0)<0$，则 $f(x)\geqslant f(x_0)$。$(x\in O(x_0,\delta))$

4. 驗証洛尔定理对下列函数是否成立：

(1) $y=\dfrac{3}{2x^2+1}$，$[-1,1]$；

(2) $y=1-\sqrt[3]{x^2}$，$[-1,1]$；

(3) $y=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $\left[-\dfrac{2}{\pi},\dfrac{2}{\pi}\right]$。

5. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 連續，$f(a)=f(b)=0$，$f'(a)\cdot f'(b)>0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 內至少有一零点。

6. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續，在 (a,b) 可导，且除在个别点上 $f'(x)=0$ 外，都有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 严格单調上升。

7. 若 $f'(x)=k$，試証 $f(x)=kx+b$。

8. 証明方程 $x^3-3x+c=0$ 在 $[0,1]$ 內不会有两个不同的根。

9. 設 $f(x)$ 有 n 阶导数，且 $f(x)$ 在 $n+1$ 个点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ $(x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n)$ 相等，試証在 (x_0,x_n) 中至少有一点 ξ，使 $f^{n}(\xi)=0$。

10. 利用洛尔定理驗証函数 $Q_{2n}(x)=(x^2-1)^n$，来証明勒让得多項式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

的一切根皆为实数，且包含在区間 $(-1,1)$ 中。

11. 由 $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x \quad (0<\theta<1)$

求函数 $\theta=\theta(x,\Delta x)$，設

(1) $f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$；

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$；

(3) $f(x)=e^x$。

12. 設 $f(x)$ 在区間 $[a,b]$ 內連續，在 (a,b) 可导，利用函数

$$\Phi(x)=\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix}$$

證明拉格朗日公式，并叙述函数 $\Phi(x)$ 的几何意义。

13. 試对下列函数写出拉格朗日公式 $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$，并求 c。

(1) $f(x)=x^3$, $[0, 1]$;

(2) $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$, $[0, 1]$.

14. 試对下列函数写出柯西公式 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$，并求 c。

(1) $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$, $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$;

(2) $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$, $[1, 4]$.

15. 試作函数 $y=|x-1|$ 在区間 $[0, 3]$ 上的图形，这里为什么沒有平行于弦的切綫，拉格朗日定理中哪个条件不成立？

16. 利用拉格朗日公式証明不等式：

(1) $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$;

(2) $n\cdot y^{n-1}(x-y)<x^n-y^n<n\cdot x^{n-1}(x-y)$ $\quad(n>1,\ x>y>0)$;

(3) $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ $\quad(x>0)$;

(4) 若 $x\neq 0$, $e^x>1+x$ （分 $x>0$, $x<0$ 两种情形証明）。

17. 若在 $[a, b]$ 上 $|f'(x)|\geqslant|\varphi'(x)|$, $f'(x)\neq 0$, 則 $|\Delta f(x)|\geqslant|\Delta\varphi(x)|$，并証在 $\left[\dfrac{1}{2}, x\right]$ 上 $\Delta\operatorname{arc\,tg} x\leqslant\Delta\ln(1+x^2)$，由此証明在 $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ 上以下的不等式成立：

$$\operatorname{arc\,tg} x-\ln(1+x^2)\geqslant\frac{\pi}{4}-\ln 2.$$

18. 若 $f(x)$ 在区間 X（有穷或无穷）中具有有界的导数，即 $|f'(x)|\leqslant M$，則 $f(x)$ 在 X 中一致連續。

19. 利用洛必达法則求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} ax}{\sin bx}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x\cos x}{x-\sin x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$； (8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{\cos 2x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}\quad(a>0)$； (10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$；

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^b}\quad(b>0)$； (12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}$；

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg}x}$； (14) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}3x}$；

(15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^b}{e^{ax}}\quad(a,\ b>0)$； (16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^c x}{x^b}\quad(b,\ c>0)$；

(17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^c x}{e^{ax}}\quad(a,\ c>0)$； (18) $\lim\limits_{x\to 0}x^b\ln^c x\quad(b,\ c>0)$；

(19) $\lim\limits_{x\to+0}x^{\sin x}$； (20) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$；

(21) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$； (22) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$；

(23) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$； (24) $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$；

(25) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$； (26) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

20. 試說明下列函数不能用洛必达法則求極限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\sin 2x}{(2x+\sin x)e^{\sin x}}$； (4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)\sin x}{\ln\left(1+\sin\dfrac{\pi}{2}x\right)}$.

21. 求下列函数的泰勒展开式：

(1) $f(x)=(1+x)^m$ （m 为正实数）；

(2) $f(x)=\ln(1+x)$；

(3) $f(x)=\operatorname{arc}\operatorname{tg}x$；

(4) $f(x)=\cos x$.

22. 求下列函数的麦克劳林展开式：

(1) $f(x)=e^{\sin x}$ 展开直到含有 x^3 的項；

(2) $f(x)=\log\cos x$ 展开直到含有 x^6 的項；

(3) $f(x)=\sqrt[m]{a^m+x}\ (a>0)$ 到含 x^2 的项。

23. 求函数 $P_3(x)=x^3+4x^2+1$ 在 $x_0=1$ 的泰勒展开式。

24. 将多项式 $P_3(x)=1+3x+5x^2-2x^3$ 表成二项 $x+1$ 的正整数乘幂多项式。

25. 求函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 按差 $x-1$ 的正整数乘幂展开式的前三项。

26. 利用泰勒公式，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$；　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2\right)\quad(a>0)$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$。

第三章　导数的应用，函数作图

§1 函数的上升、下降与极值

一、函数的上升、下降与极值

1. 函数的上升与下降：在本篇第一章中已經知道，导数就是函数关于自变量的变化率。因此，如果知道了导数，就可以直接估計这个函数在某范圍内的变化情况。

前面曾經提到过函数的上升与下降，不过沒有說明判断方法，这里我們将利用导数来确定上升与下降。

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 为单調增加（或单調减少）函数，而且可导，則由单調增加（或单調减少）定义，就有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0 \quad \left(\text{或 } \frac{\Delta y}{\Delta x} \leqslant 0\right).$$

于是由极限性质，得

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0 \quad (\text{或 } f'(x) \leqslant 0).$$

反之，对可导函数成立下面的定理。

定理　若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 連續，$f'(x)$ 在 (a, b) 存在且不变号。則当 $f'(x)>0$ 时，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 严格上升，当 $f'(x)<0$ 时，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 严格下降。

【証明】　任取 $[a, b]$ 上两点 x' 及 x''，$a \leqslant x'' < x' \leqslant b$，由拉格朗日定理，即得

$$f(x') - f(x'') = f'(\xi)(x' - x''), \quad x'' < \xi < x',$$

于是从此式立刻可以看出，$f'(x)>0$ 时，函数上升；$f'(x)<0$ 时函数下降。定理由是得証。

如在(a, b)内有限个点或无穷多个点只要不充满(a, b)的部分区間使$f'(x)=0$，那末定理的結論仍成立（見上一章习題6）。

[例1]　討論$y=3x-x^3$的上升与下降情况。

此时

$$y'=3-3x^2=3(1-x^2)$$
$$=3(1+x)(1-x),$$

于是在

$-1<x<1$时，$y'>0$，

从而函数是上升的；

$x<-1, x>1$时，$y'<0$，

从而函数是下降的。

这就是説，函数在$[1, +\infty)$及$(-\infty, -1]$中为下降的，而在$(-1, 1)$中函数是上升的（見图2-3-1）。

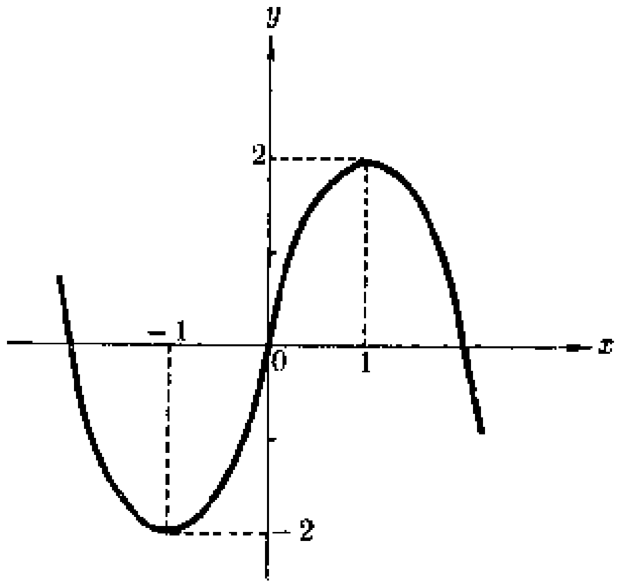


图　2-3-1

我們还可以利用函数的升降性与它的导数之間的关系来証明不等式。下面举一例以說明。

[例2]　証明$x>0$时$\sin x>x-\dfrac{x^3}{3!}$.

即須証明$\sin x-x+\dfrac{x^3}{3!}>0\ (x>0)$，为此，我們考慮函数

$$f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{3!}.$$

此时
$$f'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2},$$
$$f''(x)=-\sin x+x.$$

但已知道，当$x>0$时$\sin x<x$，亦即在$(0, +\infty)$内$f''(x)>0$，因此$f'(x)$在$[0, +\infty)$上升，而$f'(0)=0$，所以在$(0, +\infty)$内有

$$f'(x)>f'(0)=0,$$

这就是説，$f(x)$在$[0, +\infty)$内上升，因而当$x>0$时

$$f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{3!}>f(0)=0,$$

这就是我們所要証明的不等式。

2. 函数的极值：現在我們来討論函数的极值，且总假定 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是連續的。若对于一点 x_0，存在 x_0 的某一邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ $(\delta>0)$，使对于此邻域中的任意点 x，都有

$$f(x)\leqslant f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 有一极大值 $f(x_0)$，x_0 称为极大点，如图 2-3-2 中所示，$f(x)$ 在 x_1，x_2 等点均有极大值；同样，如果在 x_0 的某一邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 中总有

$$f(x)\geqslant f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 有一极小值 $f(x_0)$，x_0 称为极小点，图 2-3-2 中 $f(x)$ 在 x_1'，x_2' 等点均有极小值。极大值与极小值統称为极值。极大点与极小点統称为极值点。如果在上面的两个不等式中等号不成立，则称为严格意义下的极值。

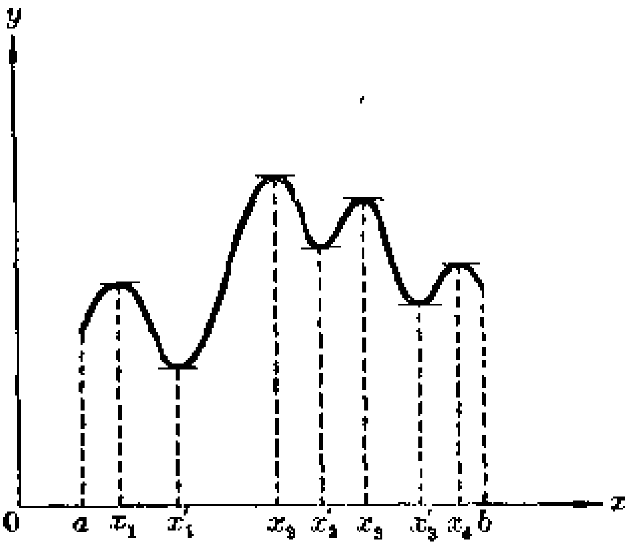


图 2-3-2

由定义可知，函数的极值只是在一点的近旁这样一个小范圍内的最大值或最小值，是局部性的，因此一个定义在 $[a,b]$ 上的函数在 $[a, b]$ 上可以有許多个极大值或极小值，且其中的极大值不一定都大于每一个极小值，从图 2-3-2 中也可以看出在 x_1 及 x_4 点的极大值却小于在 x_2' 点的极小值。

下面，我們来討論如何确定一个函数的极值。首先，由費尔馬定理立刻可以得到下面的定理。

定理 1 若 $f(x)$ 在 x_0 点有极值（极大或极小），且 $f'(x_0)$ 存在，则必有 $f'(x_0)=0$。

事实上，由于 $f(x_0)$ 是极值，因之存在 x_0 的邻域，使在此邻域总有 $f(x)\geqslant f(x_0)$，（或 $f(x)\leqslant f(x_0)$），于是由費尔馬定理即知必有 $f'(x_0)=0$。

由此可見，对于可导函数而言，$f'(x_0)=0$ 是函数在 x_0 点有极值的必要条件。但須注意，它并非充分条件。例如函数 $f(x)=x^3$，显然有 $f'(0)=0$，但函数却是严格单調增加的，它不可能有极值点（图 2-3-3）。

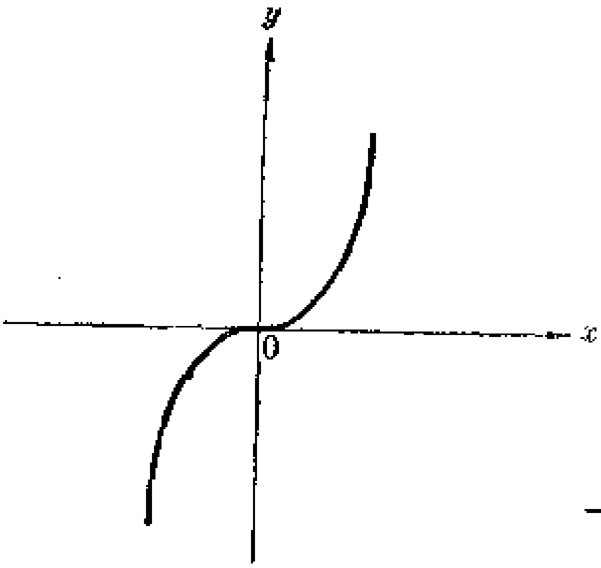


图 2-3-3

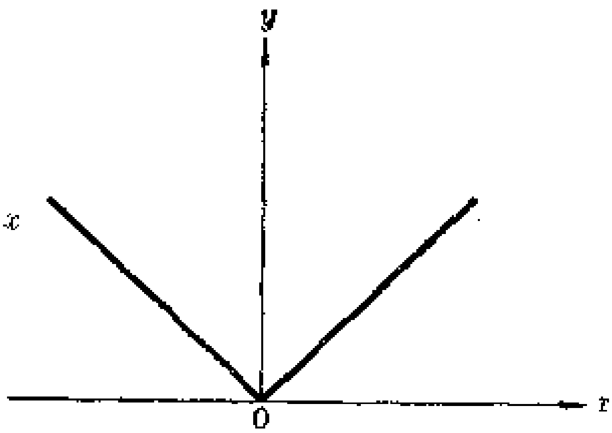


图 2-3-4

此外，对于导数不存在的点，函数也可能达到极值，例如 $f(x)=|x|$，前已指出 $f'(0)$ 不存在，但显然在 $x=0$ 处有极小值 0（图 2-3-4）。

但是，对函数

$$f(x)=\begin{cases}2x, & x\geqslant 0;\\ x, & x<0\end{cases}$$

而言，$f'(0)$ 也不存在，由于函数永远是严格单調增加的，因之在 $x=0$ 点没有极值（图 2-3-5）。

综合以上所述的各种情况,可知,函数的极值点只可能是导数为零的点(对可导函数而言),或导数不存在的点。这些点究竟是否是极值点,还要进一步考察。下面,我們就来給出判断函数极值的方法。

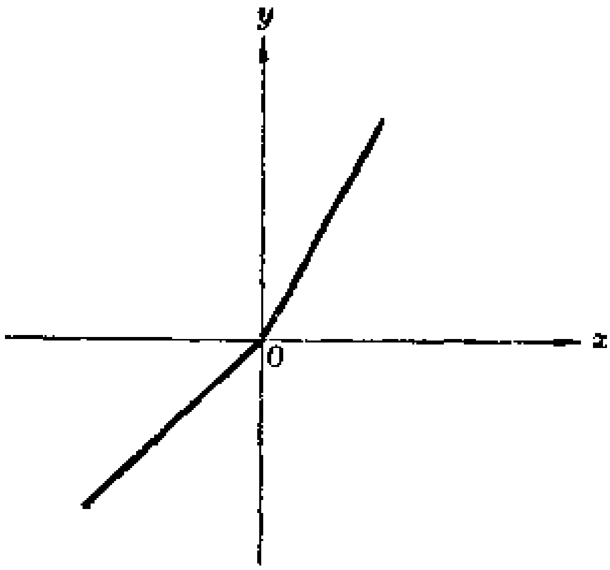


图 2-3-5

定理 2 若 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域 $(x_0-\eta, x_0+\eta)$ 内可导,则

(i) 当 $x\in(x_0, x_0+\eta)$ 时 $f'(x)<0$,而当 $x\in(x_0-\eta, x_0)$ 时,$f'(x)>0$,那末 $f(x)$ 在 x_0 点有极大值 $f(x_0)$.

(ii) 当 $x\in(x_0, x_0+\eta)$ 时 $f'(x)>0$,而当 $x\in(x_0-\eta, x_0)$ 时,$f'(x)<0$,那末 $f(x)$ 在 x_0 点有极小值 $f(x_0)$.

【証明】 在(i)的假定下,按照上段判断函数升降性的定理可知,此时 $f(x)$ 在 $[x_0, x_0+\eta)$ 内严格下降,而在 $(x_0-\eta, x_0]$ 内严格上升,故对于 $(x_0-\eta, x_0+\eta)$ 中的一切 x, $(x\neq x_0)$ 总有

$$f(x)<f(x_0),$$

这就是說 $f(x)$ 在 x_0 点有极大值 $f(x_0)$,并且是严格意义下的极大值。

同理可証(ii)。

这个定理給出了可导函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极值的一个充分条件,它使我們在求出可能达到极值的点以后,能够利用导数的符号来进一步判定函数在这些点是否有极值。

[例 3] 討論 $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值。

我們有

$$y' = x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}(x-1)x^{-\frac{1}{3}} = \frac{5x-2}{3x^{\frac{1}{3}}},$$

当 $x=\frac{2}{5}$ 时，$y'=0$；$x=0$ 时 y' 不存在，因之函数只可能在这两点有极值。現列表討論如下，表中 ↗ 表示上升，↘ 表示下降(图 2-3-6)。

x	$(-\infty, 0)$	0	$\left(0, \frac{2}{5}\right)$	$\frac{2}{5}$	$\left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$
y'	$+$	不存在	$-$	0	$+$
y	↗	极大值 0	↘	极小值 $-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$	↗

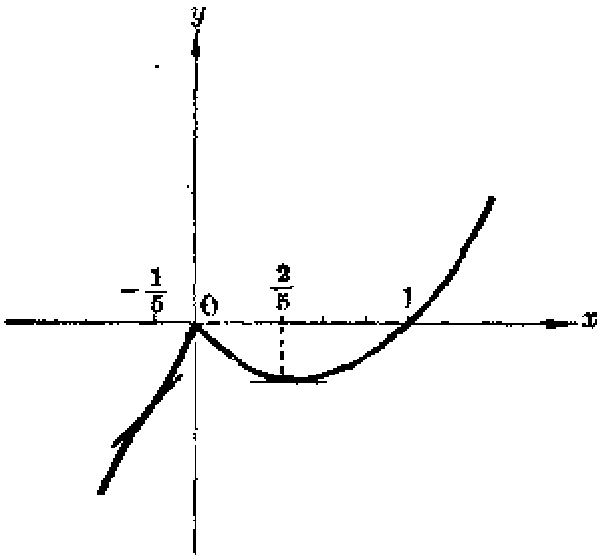


图 2-3-6

对于 $f'(x_0)=0$ 的点，若 $f''(x_0)$ 存在，我們还可以根据 $f''(x_0)$ 的符号来判定 $f(x_0)$ 是不是极值。这就是下面的命题。

定理 3 設 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)$ 存在：

(i) 若 $f''(x_0)>0$，則 $f(x)$ 在点 x_0 有极小值 $f(x_0)$；

(ii) 若 $f''(x_0)<0$，則 $f(x)$ 在点 x_0 有极大值 $f(x_0)$。

【証明】 在 (i) 的假定下，按照二阶导数的定义，且注意到 $f'(x_0)=0$，我們有

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}>0,$$

于是，由极限性质知道，必存在 $\eta>0$，使当 $|x-x_0|<\eta$ 时

$$\frac{f'(x)}{x-x_0}>0,$$

这就是説，当 $x\in(x_0-\eta, x_0)$ 时 $f'(x)<0$，当 $x\in(x_0, x_0+\eta)$ 时，$f'(x)>0$，于是由定理 2 即知 $f(x_0)$ 是极小值。

同理可証(ii)。

我們利用这一結果，再看例 3 中 $x=\frac{2}{5}$ 这一点，可求得

$$y''=\frac{10x+2}{9x^{\frac{4}{3}}},$$

当 $x=\frac{2}{5}$ 时，$y''=\frac{5}{3}\sqrt[3]{\frac{5}{2}}>0$，于是即可判定 $f(x)$ 在 $x=\frac{2}{5}$ 时有极小值。

（注）　虽然，在实用上定理 3 較定理 2 簡便，但此时要求也更强了。它不仅要求 $f'(x)$ 存在，还需要 $f''(x_0)$ 存在。例如在例 3 中，在点 $x=0$，y' 不存在，因而不能用本定理来判断。此外，当 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=0$ 时仍然不能判定 $f(x_0)$ 是否是极值。例如，对 $f(x)=x^3$ 而言，有 $f'(0)=0$，$f''(0)=0$，但前已看到 $f(0)$ 并非极值；但对 $f(x)=x^4$ 而言，也有 $f'(0)=f''(0)=0$，而这时显然 $f(0)=0$ 是极小值。因此在 $f''(x_0)=0$ 时，須另行判断，这时可以用定理 2 来判断，也可用更高阶导数的性态来判断（参見习題 7）。

二、函数的最大值与最小值

我們知道，对 $[a, b]$ 上的連續函数 $f(x)$ 来説，它一定有最大值和最小值，但如何来求得它們呢？前面我們看到，函数的极大值（或极小值）是在一点附近的小范圍內的最大值（或最小值），由此可見，若 $f(x)$ 在 (a, b) 內某点 x_0 达到最大值（或最小值），則点 x_0 必为 $f(x)$ 的一个极大点（或极小点）。此外，$f(x)$ 的最大值（或最

小值）还可能在 $[a, b]$ 的端点达到，亦即可能是 $f(a)$ 或 $f(b)$。因此，要求函数的最大值（或最小值），只要求出 (a, b) 中所有 $f(x)$ 的极大值（或极小值），然后与 $f(a)$ 及 $f(b)$ 比較，取其最大者（或最小者），就是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的最大值（或最小值）了。

[例 4] 求 $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 在 $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ 上的最大值及最小值。

由例 3 已知 $f(x)$ 在 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ 中有极大值 0，极小值 $-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$，因为它在区間的端点有 $f(-1)=-2$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}\sqrt[3]{2}$，所以函数的最大值是 0，最小值是 -2。

下面我們举一些应用問題的例子，这些問題往往都归結为求函数的最大值或最小值問題。

先来考察緒論中例 2 所提出的問題。

[例 5] 設有一块边长为 a 的正方形鉄皮，从其各角截去同样的小方块，作成一个无蓋的方匣，問截去多少，方能使作成的匣子之容积最大？

如图 2-3-7 所示，設截去的小方块边长为 x，則所作成的方匣之容积为

$$y=(a-2x)^2x$$

$$\left(0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2}\right),$$

于是問題就归結为求函数

$$y=(a-2x)^2x$$

在 $\left[0, \frac{a}{2}\right]$ 中的最大值問題了。

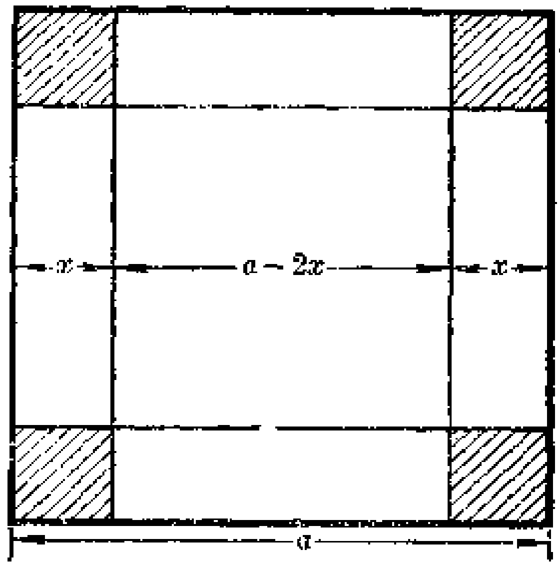


图 2-3-7

因为 $y'=(a-2x)(a-6x)$，当 $x=\frac{a}{6}$ 时 $y'=0$；而在端点时，

$y=0$，所以截去以 $x=\frac{a}{6}$ 为边长的小方块时，所作匣子的容积为最大。

[例 6] 在直徑为 d 的圓形木中，截取一具有最大抗弯强度的矩形梁（图 2-3-8）。

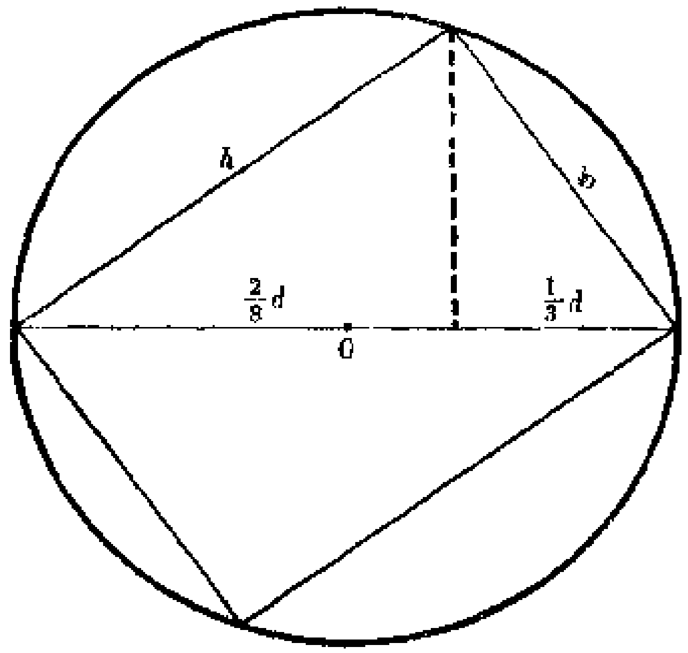


图 2-3-8

由材料力学知道，具有矩形截面的梁的强度与 bh^2 成比例，其中 b 为底，h 是高。

因为 $h^2=d^2-b^2$，所以問題就是要求函数

$$y=bh^2=b(d^2-b^2)$$

$$(0<b<d)$$

的最大值。

此时

$$y'=d^2-3b^2,$$

当 $b=\frac{d}{\sqrt{3}}$ 时 $y'=0$，此时 $y''=-6b<0$，所以它就是最大值了。

由于 $b=\frac{d}{\sqrt{3}}$ 时，$h=d\sqrt{\frac{2}{3}}$，所以有

$$d:h:b=\sqrt{3}:\sqrt{2}:1.$$

这就是說，只要把直徑三等分，在等分点作垂綫交圓于一点，作这点与直徑两端的連綫，即为所求。

[例 7] 宇宙火箭繞地球运轉的軌道是个橢圓，而地球就是这橢圓的一个焦点，我們需要知道它在什么时候轉到离地球最近，什么时候最远。其最近点称为近地点，最远点称为远地点（图 2-3-9）。解决这个問題无疑是非常重要的，現在簡单介紹一下。

宇宙火箭的运动方程，可用极坐标表示为

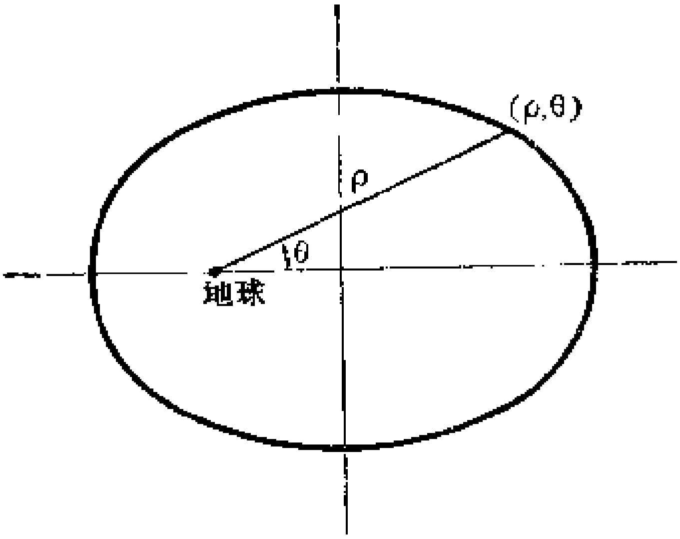


图 2-3-9

$$\rho=\frac{p}{1-e\cos\theta}\quad(e<1),$$

所以
$$\rho'=-\frac{pe\sin\theta}{(1-e\cos\theta)^2},$$

当 $\rho'=0$ 时，$\sin\theta=0$，从而 $\theta=n\pi$，取 $\theta=0,\ \pi$。由于

$$\rho''=\frac{-pe\cos\theta}{(1-e\cos\theta)^2}+\frac{2pe^2\sin^2\theta}{(1-e\cos\theta)^3},$$

当 $\theta=0$ 时，

$$\rho''=-\frac{pe}{(1-e)^2}<0,$$

故 $\theta=0$ 为极大点；而当 $\theta=\pi$ 时，

$$\rho''=\frac{pe}{(1+e)^2}>0,$$

故 $\theta=\pi$ 为极小点。

当 $\theta=0$ 时，极大值是 $\rho_1=\frac{p}{1-e}$ （远地点）。

当 $\theta=\pi$ 时，极小值是 $\rho_2=\frac{p}{1+e}$ （近地点）。

$$\rho_1+\rho_2=\frac{2p}{1-e^2}.$$

§2 一元函数作图法

上面討論了函数的上升、下降与极值，对于函数的作图无疑是有很大作用的。但仅是这些还不能比較准确地描繪出函数的图形。例如前面已經看到 $y=x^3$ 及 $y=x^{\frac{1}{2}}$，它們在 $[0,1]$ 上虽然都是上升的，但图形却有显著的不同（图 2-3-10）。

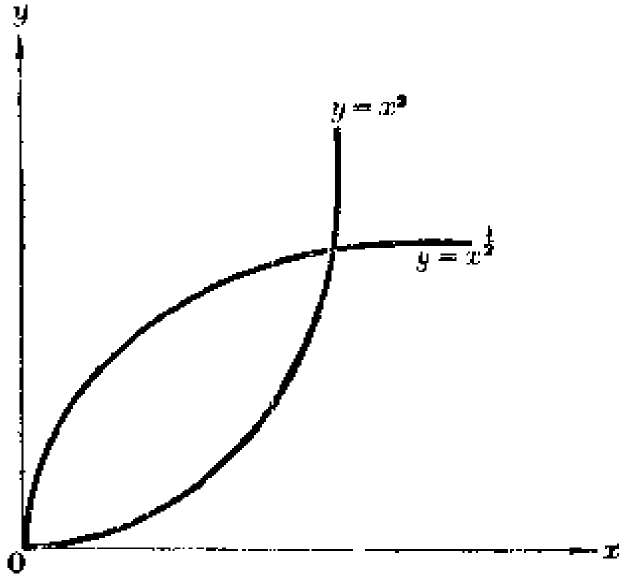


图 2-3-10

$y=x^3$ 是（向上）凹的，而 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 是（向上）凸的，有时曲綫凹凸变化很大（如图 2-3-11），我們如何才能判定曲綫的凹凸呢？本节就要介紹如何利用函数的导数来判断凹凸，从而有助于比較准确地画出图形。

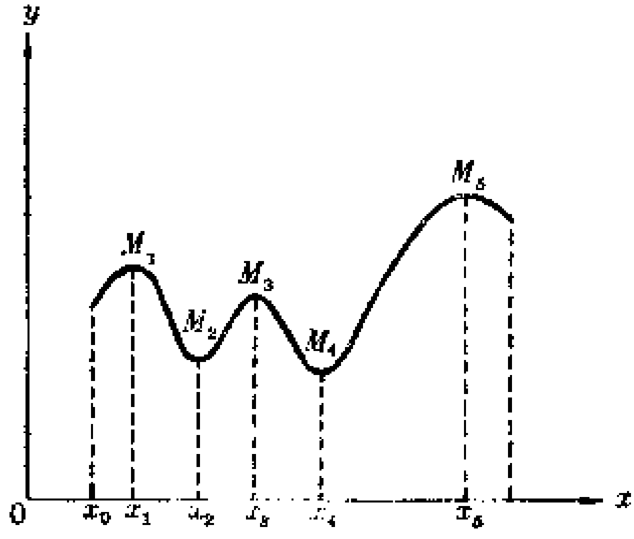


图 2-3-11

一、曲綫的凹、凸与拐点

我們首先給出如下的定义。

定义 設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續，若对 (a, b) 中任意两点 x_1，x_2，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

則称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是凸的，或者說是凸向上的；若恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

則称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是凹的，或者說是凸向下的。

从几何上看，若 $f(x)$ 在閉区間上是凸的，那末联接曲綫上任意两点 $(x_1, f(x_1))$，$(x_2, f(x_2))$ 間的弦之中点位于曲綫上相应点（具有相同横坐标的点）的下面，或者曲綫在弦之上，而在切綫之下（見图 2-3-12）。

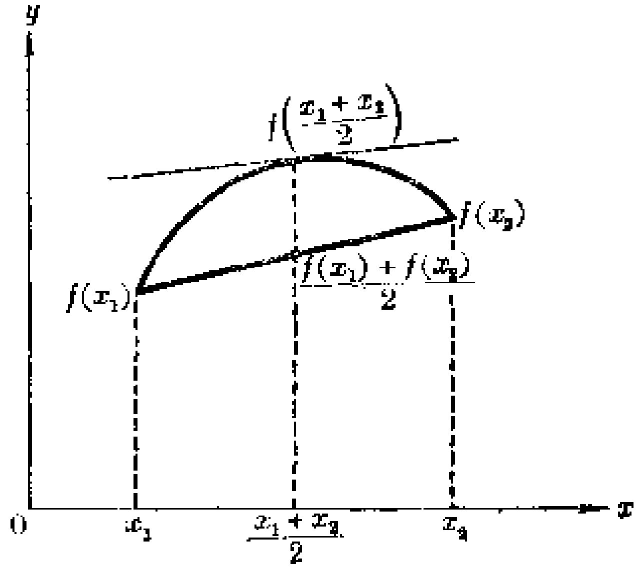


图 2-3-12

若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 具有二阶导数，則我們有如下的定理，它使我們可能利用函数的二阶导数来判定函数的凹凸情况。

定理 若在 (a, b) 内 $f''(x)<0$，則 $f(x)$ 在 (a, b) 为凸的；若在 (a, b) 内 $f''(x)>0$，則 $f(x)$ 在 (a, b) 为凹的。

【証明】 今証 $f''(x)<0$ 的情形。設 x_1 和 x_2 为 (a, b) 内任意两点，且 $x_1<x_2$，記 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，并改記 x_1 为 x_0-h，x_2 为 x_0+h，利用拉格朗日公式，得到

$$\begin{aligned}&f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0-h)-f(x_0)\\&=[f'(x_0+\theta_1 h)-f'(x_0-\theta_2 h)]h,\end{aligned}$$

再利用拉格朗日公式，得

$$[f'(x_0+\theta_1 h)-f'(x_0-\theta_2 h)]h=f''(\xi)(\theta_1+\theta_2)h^2,$$

其中 $0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1,\ x_0-\theta_2 h<\xi<x_0+\theta_1 h$，由于 $f''(\xi)<0$，故有 $f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0-h)-f(x_0)<0$，也就是

$$\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)}{2}=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f(x_0)$$

$$=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

而 x_1 与 x_2 是 $(a,\ b)$ 内任意两点，这就証明了此时 $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 为凸的。

类似地，可証明 $f''(x)>0$ 的情形。

若在 x_0 的某一邻域内，曲綫在 x_0 的一边为凸，另一边为凹，则 $(x_0,\ f(x_0))$ 称为曲綫 $y=f(x)$ 的拐点（或称扭轉点）。

从拐点的定义和上面由二阶导数的符号来判断函数凹凸的定理，可以推出，若函数 $f(x)$ 具有二阶导数，则 x_0 点有拐点的必要条件是 $f''(x_0)=0$. 因此，要求 $f(x)$ 的拐点，只要討論 $f''(x)$ 的零点，当然，$f''(x)$ 不存在的点也可能有拐点，这些点究竟是不是拐点，还需討論 $f''(x)$ 在这些点近旁的符号才能断定。

[例 1] 討論 $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的凹、凸及拐点。

此时有 $$y'=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}},$$

$$y''=\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}=\frac{2(5x+1)}{9x^{\frac{4}{3}}},$$

于是当 $x=-\frac{1}{5}$ 时，$y''=0$，当 $x=0$ 时，y'' 不存在。显然 $x<-\frac{1}{5}$ 时 $y''<0$，$x>-\frac{1}{5}$ 时 $y''>0$. 所以曲綫在 $x=-\frac{1}{5}$ 处有一个拐点，且曲綫在 $x=-\frac{1}{5}$ 左边为凸，在右边为凹。拐点为 $\left(-\frac{1}{5},\ -\frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{1}{25}}\right)$.

又有 $x<0$ 及 $x>0$ 时恒有 $y''>0$，故 $(0,\ 0)$ 点不是拐点（图

2-3-6)。

二、漸近綫

若曲綫上的点沿曲綫趋于无穷远时，此点与直綫 $ax+by+c=0$ 的距离趋于零，則称此直綫为曲綫的一条漸近(直)綫。

現在，我們給出如何由曲綫方程定出它的漸近綫方程。

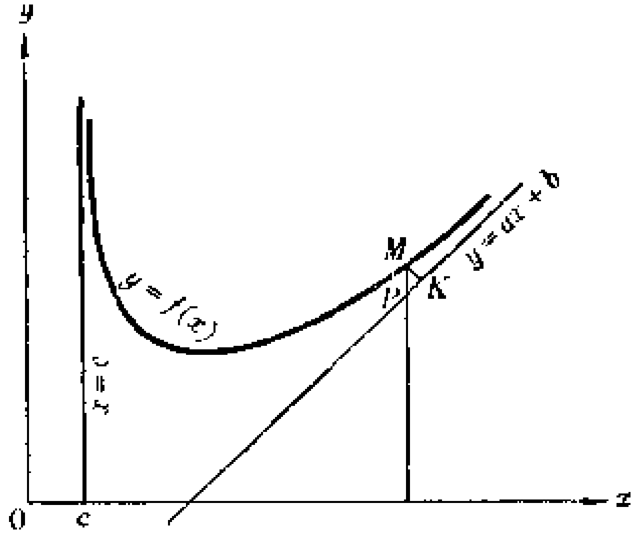


图 2-3-13

1. 垂直漸近綫：垂直漸近綫就是上述漸近綫中 $b=0$ 的情况。从图 2-3-13 中知道，当 $x\to c$ 时 ($x\to c+0$ 或 $x\to c-0$)，$f(x)\to\infty$，因之，要求 $f(x)$ 的垂直漸近綫只要看对于什么值 c，可使

$$\lim_{x\to c} f(x)=\infty \quad (\lim_{x\to c+0} f(x)=\infty \text{ 或 } \lim_{x\to c-0} f(x)=\infty),$$

那末 $x=c$ 就是 $y=f(x)$ 的垂直漸近綫。

例如，$y=\ln x$，当 $x\to+0$ 时 $\ln x\to\infty$，所以 $x=0$ 为 $\ln x$ 的垂直漸近綫。

2. 斜漸近綫和水平漸近綫：設曲綫的方程为 $y=f(x)$，曲綫上的点 M 与直綫 $y=ax+b$ 的距离为 $\rho(M,K)$；由漸近綫定义知道，若直綫 $y=ax+b$ 为曲綫的漸近綫，那末必須

$$\lim_{x\to\infty}\rho(M,K)=0.$$

我們也可以考虑(图 2-3-13)

$$\rho(M,P)=f(x)-(ax+b),$$

容易看出，若 $y=ax+b$ 为 $y=f(x)$ 的漸近綫，那末 $\rho(M,P)\to0$ (当 $x\to\infty$)，且反之亦然。

因而，为了求出渐近綫(即要求出渐近綫方程中的 a 和 b)，可如下进行。既然

$$\lim_{x\to\infty}\rho(M, P)=0,$$

亦即

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax-b]=0,$$

由此可得

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right]=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax-b]\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax-b]\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,$$

但 b 是常数，因而由上式的左边得到

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

在求出 a 之后，代入上式，又可求得 b 之値为

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax].$$

当 $a=0$ 时称为水平渐近綫。

[例 2]　討論 $y=x+\operatorname{arc\,tg} x$ 的渐近綫。

因为这个函数在 $(-\infty, +\infty)$ 內連續，所以沒有垂直渐近綫。因

$$\frac{y}{x}=1+\frac{1}{x}\operatorname{arc\,tg} x\to 1,\quad \text{当 } x\to\infty,$$

及

$$y-x=\operatorname{arc\,tg} x\to\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x\to+\infty,\\[2mm] -\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x\to-\infty.\end{cases}$$

故当 $x\to+\infty$ 时，有渐近綫

$$y=x+\frac{\pi}{2},$$

而 $x\to-\infty$ 时，有渐近綫

$$y=x-\frac{\pi}{2}.$$

对于参数方程 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 的情形,若 t 趋于某一值(或 ∞)时,x 趋于某一定数 c,而 $y\to\infty$,那末 $x=c$ 就是垂直渐近綫。

同样地,在求斜渐近綫时,先要看 t 趋于何值时 $x\to\infty$。例如,若 $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)=\infty$,那末,

$$a=\lim_{t\to t_0}\frac{y}{x}=\lim_{t\to t_0}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}.$$

求得 a 后,再将此 a 之值代入下面的极限中而求得 b,即

$$b=\lim_{t\to t_0}[\psi(t)-a\varphi(t)],$$

假如两个极限都存在,就得到渐近綫 $y=ax+b$。

[例 3] 求 $x=\dfrac{3at}{1+t^3}$, $y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$ $(a>0)$ 的渐近綫。

当 $t\to-1$ 时 $x\to\infty$,而

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to-1}\frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)}=-1,$$

$$\lim_{t\to-1}(y+x)=\lim_{t\to-1}\frac{3at^2+3at}{1+t^3}=-a,$$

所以此时有渐近綫

$$y=-x-a,$$

即

$$x+y+a=0.$$

三、函数作图的一般程序

現在,我們可以来叙述平面曲綫的作图程序,一般地,我們将依次考察以下各項:

1. 函数的基本性质:

(一)定义范圍,函数值范圍,連續范圍。

(二)函数的奇偶性,也就是图形的对称性。

(三)函数的周期性。

2. 用导数来研究函数的性质:

(一)求出 $y'=0$ 的根及 y' 不存在的点,以这些点为分点,把区

間分成小部分，由每一部分中 y' 的符号来决定函数的上升、下降情况。

(二) 求出 $y'=0$ 的根及 y' 不存在的点，以 y'' (如果存在) 的符号或函数的升降情况来确定极值点及极值。

(三) 求出 $y''=0$ 或 y'' 不存在的所有点，然后以 y'' 的在这些点左右两边的符号变化来确定曲綫的凹凸范圍及拐点。

3. 漸近綫：

(一) 定出垂直漸近綫。

(二) 定出斜漸近綫及水平漸近綫。

4. 描点作图：求出一些特殊点处的函数值，例如与坐标軸的交点、极值点、拐点等。

利用上述的討論，就可描繪出曲綫的大致图形，当然，它們仍然是近似的，但通常已經能够滿足一般的需要了。

还須注意，由于曲綫方程的不同表示，上面討論的項目的难易及作用也会不同，例如在参数方程时，特別要注意上升、下降及水平切綫与垂直切綫的討論；而在极坐标方程时，对称性、周期性就显得特別重要，而其他項目的討論較繁，作用有时并不显著，因而往往不去討論。讀者可以从下面的一些例題中和自己的实踐中去体会揣摩。

下面举几个函数作图的例子。

[例 4]　作函数 $y=\frac{x^2}{1+x}$ 的图形。

我們可討論如下：

1. 除 $x=-1$ 外，函数在 x 軸上均連續。

2. $y'=\frac{x(x+2)}{(1+x)^2}$，

当 $x=0,\ -2$ 时 $y'=0$；$x=-1$ 时 y' 不存在。

$$y''=\frac{2}{(1+x)^3},$$

当 $x=-1$ 时 y'' 不存在。

我們可列表討論如下：

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	0		不存在	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	不存在	+	+	+
$f(x)$	↗	极大值 -4	↘	无定义	↘	极小値 0	↗
	凸				凹		

3. 漸近綫：显然，$x=-1$ 是垂直漸近綫，且当 $x\to-1+0$ 时，$y\to+\infty$；当 $x\to-1-0$ 时，$y\to-\infty$。

又因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=-1,$$

所以有漸近綫

$$y=x-1.$$

利用这些討論就可大致繪出其图形(图 2-3-14)。

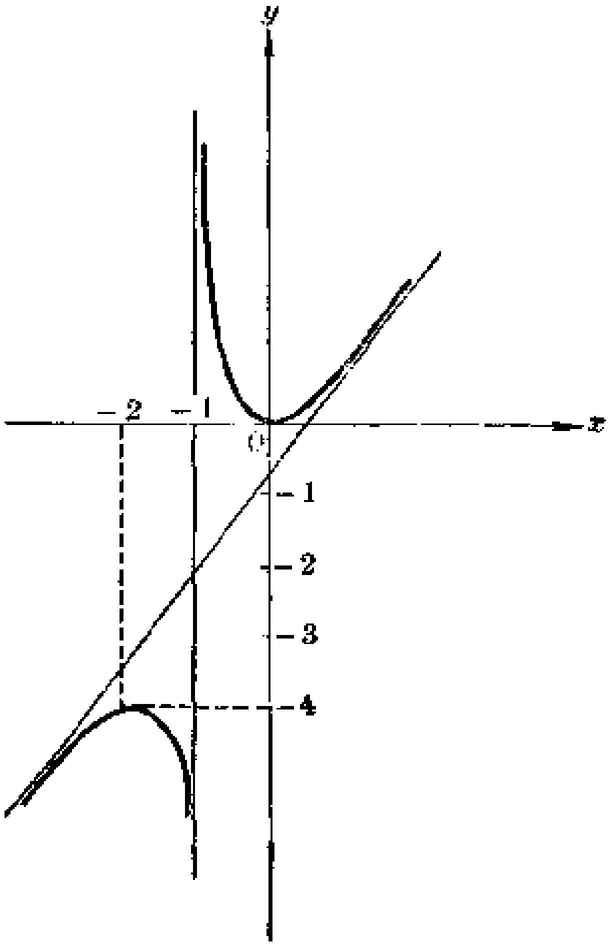


图 2-3-14

[例 5] 作 $x^3+y^3-3axy=0\ (a>0)$ 的图形。

令 $y=tx$，其中 t 为参数，于是方程可化为以 t 为参数的方程：

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

参数 t 的几何意义是所对应的曲綫上的点与原点連綫的斜率。

我們可討論如下：

1．除了 $t=-1$ 外都有定义.

2．$\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{6a\left(\dfrac{1}{2}-t^3\right)}{(1+t^3)^2}$，　$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$，

当 $t=-1,\ 0,\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},\ \sqrt[3]{2}$ 时它們为零或 ∞。

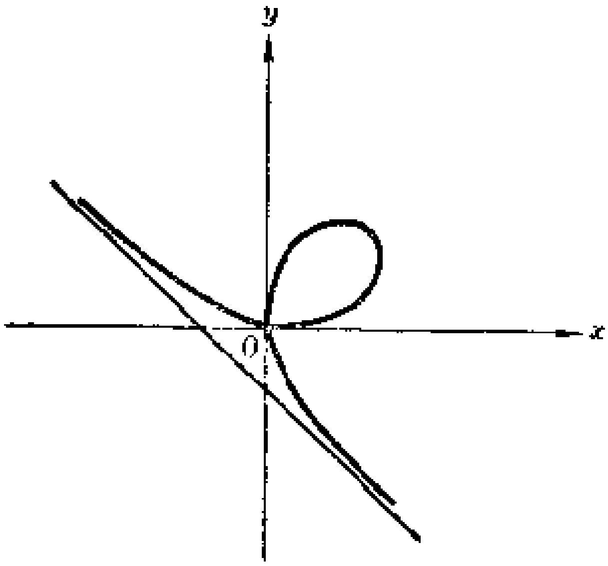


图　2-3-15

現列表討論之：

t	x'_t	y'_t	y'_x	$x(t)$	$y(t)$
$(-\infty,-1)$	+	−	−	$0\nearrow+\infty$	$0\searrow-\infty$
$(-1,0)$	+	−	−	$-\infty\nearrow0$	$+\infty\searrow0$
$\left(0,\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	+	+	+	$0\nearrow\sqrt[3]{4}a$	$0\nearrow\sqrt[3]{2}a$
$\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},\sqrt[3]{2}\right)$	−	+	−	$\sqrt[3]{4}a\searrow\sqrt[3]{2}a$	$\sqrt[3]{2}a\nearrow\sqrt[3]{4}a$
$(\sqrt[3]{2},+\infty)$	−	−	+	$\sqrt[3]{2}a\searrow0$	$\sqrt[3]{4}a\searrow0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t(2-t^3)}{2\left(\dfrac{1}{2}-t^3\right)},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(1+t^3)^4}{12a\left(\dfrac{1}{2}-t^3\right)^3},$$

当 $t=0$, ∞ 时, $x=y=0$; 当 $t=0$ 时 $\frac{dy}{dx}=0$; 当 $t=\infty$ 时 $\frac{dy}{dx}=\infty$, 这就表明曲綫的两支,一支与 x 軸相切,另一支与 y 軸相切。

$$t<\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \text{ 时}, y''>0, \text{所以曲綫为凹;}$$

$$t>\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \text{ 时}, y''<0, \text{所以曲綫为凸。}$$

3. 漸近綫: 在例 3 中已求得曲綫具有漸近綫

$$x+y+a=0.$$

4. 描点作图: 此曲綫叫做笛卡儿叶形綫(图 2-3-15)。

对于极坐标方程 $r=r(\theta)$, 主要討論其周期性、对称性以及当 θ 增加时 r 的增減情况,至于其他項目,可視具体情况不一定都要詳細討論。

极坐标方程的对称性有各种情况,下面只举几个例子,設曲綫方程为

$$r=r(\theta).$$

若 $r(-\theta)=r(\theta)$,

此时,显然图形关于 x 軸(极軸)对称(图 2-3-16)。因而,此时只要作出 $\theta\geqslant0$ 时的图形,把这图形关于 x 軸对称就能得到 $\theta\leqslant0$ 的图形。

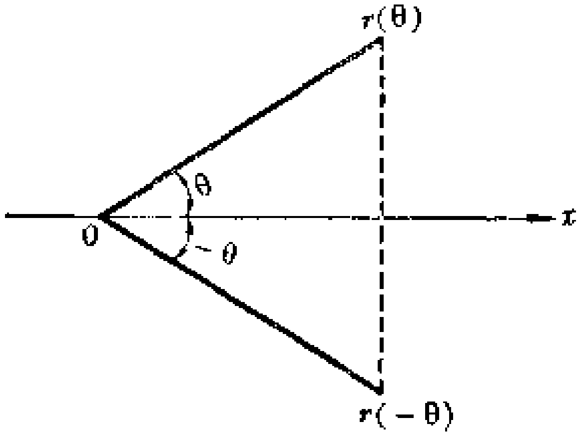


图 2-3-16

若 $$r(\theta)=-r(-\theta),$$

則图形关于 y 軸对称 (图 2-3-17)。于是,此时只要討論 $\frac{\pi}{2}\geqslant\theta\geqslant-\frac{\pi}{2}$ 的图形,把这图形关于 y 軸对称,就能得到别的范圍的图形。

若 $$r(\pi+\theta)=r(\theta),$$

則图形关于原点对称 (图 2-3-18)。于是只要討論 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 的图形,然后把这图形关于原点对称,就能得到 $\pi\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 的图形。

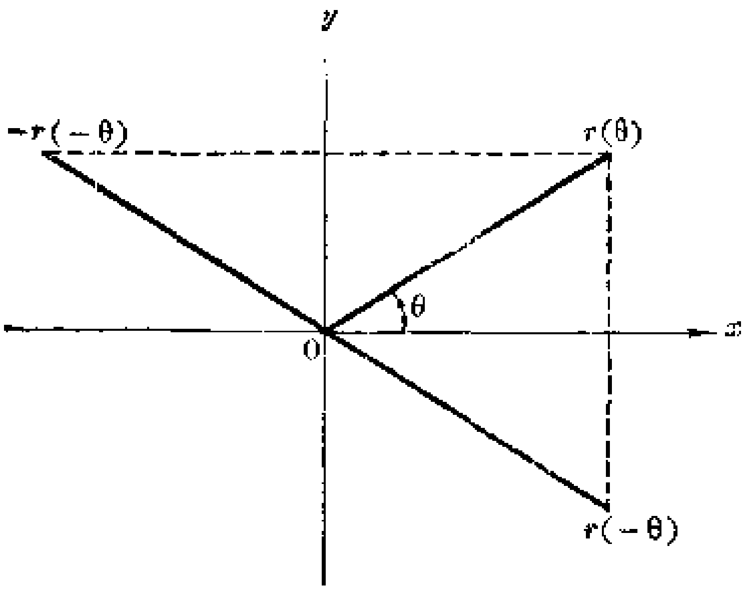


图　2-3-17

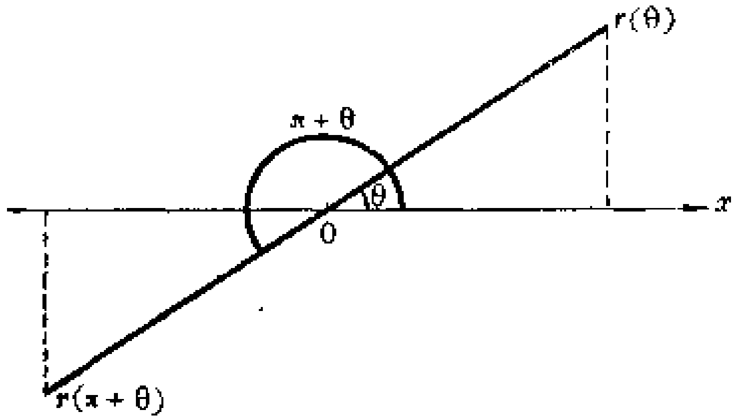


图　2-3-18

如果图形关于 x 軸，y 軸及原点同时为对称的，那末只要討論 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 情况就可以了。讀者可以从下面的例子中去体会这些。

[例 6]　作双紐綫 $r^2=a^2\cos 2\theta$ $(a>0)$ 的图形。

此方程实际上相当于两条曲綫

$$r=a\sqrt{\cos 2\theta},\quad r=-a\sqrt{\cos 2\theta},$$

由于 $r(2\pi+\theta)=r(\theta)$，即图形以 2π 为周期，所以只要討論 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 的情况。又因

$$r(\pi+\theta)=r(\theta),$$

即图形关于原点对称，所以只要討論 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 的情形；又因为

$$r(\pi-\theta)=r(\theta),$$

即图形关于 y 軸对称，因而只要討論 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 情形；又由于 $\frac{\pi}{4}<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时 $\cos 2\theta<0$， r 无意义，所以只要討論 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$ 的情形即可（事实上，还可看出此时显然有 $r(-\theta)=r(\theta)$，即图形关于 x 軸也是对称的，不过現在不討論也已足够了）。而当 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$ 时，

$$r'(\theta)=-\frac{a\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}<0\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right),$$

即 $r(\theta)$ 关于 θ 是下降的。此外，$\theta=\pm\frac{\pi}{4}$，$r=0$，曲綫以直綫 $\theta=\pm\frac{\pi}{4}$ 为切綫。綜合以上討論，就可大致繪出图形（图2-3-19）。

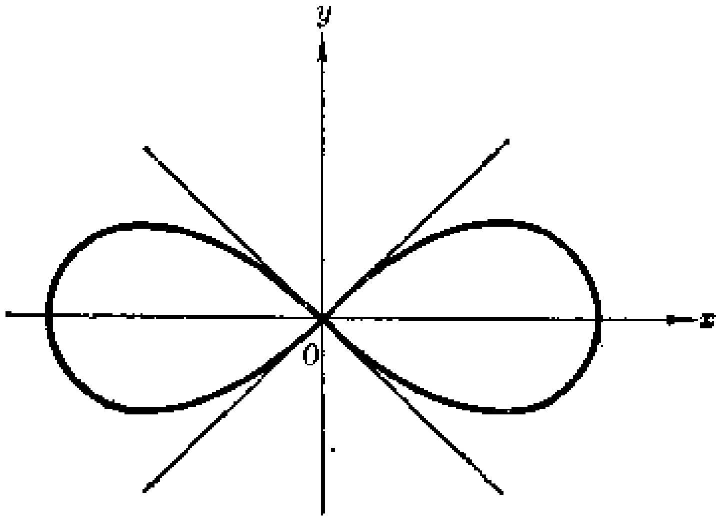


图 2-3-19

最后，容易知道 $r=f(\theta)$ 与 $r=-f(\theta)$ 的图形关于原点是对称的，因此把 $r=a\sqrt{\cos 2\theta}$ 的图形繞原点旋轉 180° 就得到 $r=-a\sqrt{\cos 2\theta}$ 的图形，但此时我們得到的仍是同一图形。

为了比較精确地画出由极坐标方程表示的图形，我們再引进一个公式。設曲綫方程为 $r=r(\theta)$，μ 为曲綫上一点 P 处的切綫与該点的向徑之間所夹的角，則有

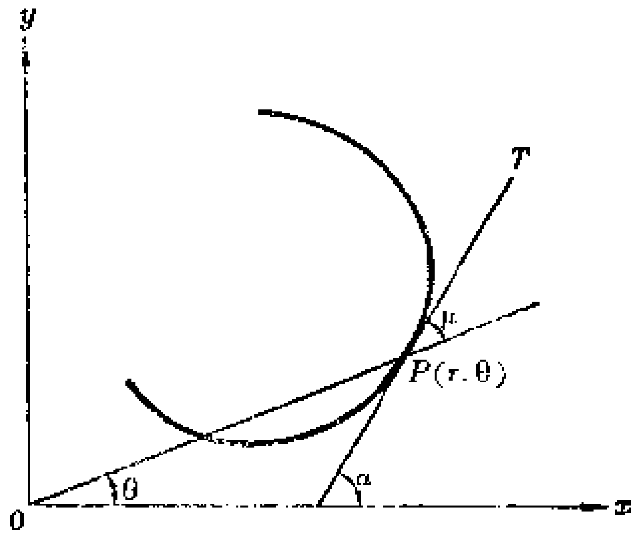


图 2-3-20

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}.$$

从图 2-3-20 可見，显然有 $\mu=\alpha-\theta$，其中 α 为点 P 处切綫与正向 x 軸的夹角，θ 为点 P 处向徑与正向 x 軸之間的夹角，于是

$$\operatorname{tg}\mu=\operatorname{tg}(\alpha-\theta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta}.$$

但是 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}$，即在点 P 处的切綫斜率，于是在 $x=r\cos\theta$，$x=r\sin\theta$ 中視 θ 为参数，$r=r(\theta)$ 为 θ 的函数，因而

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}.$$

代入上式，化簡得

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{\frac{r'\sin\theta+r\cos\theta}{r'\cos\theta-r\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\frac{r'\sin\theta+r\cos\theta}{r'\cos\theta-r\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}.$$

从下面的两个例子中可以看出这一公式在极坐标方程作图中的作用。

[例 7] 作心脏綫 $r=1-\cos\theta$ 的图形。

因为 $r(-\theta)=r(\theta)$，所以对称于 x 軸，且又以 2π 为周期，故只需討論 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 情况即可，这时

$$r'(\theta)=\sin\theta>0 \quad (0<\theta<\pi).$$

所以 r 关于 θ 是单調上升的，且

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta},$$

可以确定 $\theta\to0$ 时，$\operatorname{tg}\mu\to0$，即在 $\theta=0$ 处曲綫的切綫与向徑平行，这也可以从 $\theta=0$ 时 $r=0$ 看出；当 $\theta\to\pi$ 时，$\operatorname{tg}\mu\to\infty$，即在 $\theta=\pi$ 处曲綫的切綫与向徑垂直。由此不难作出函数的图形（图 2-3-21）。

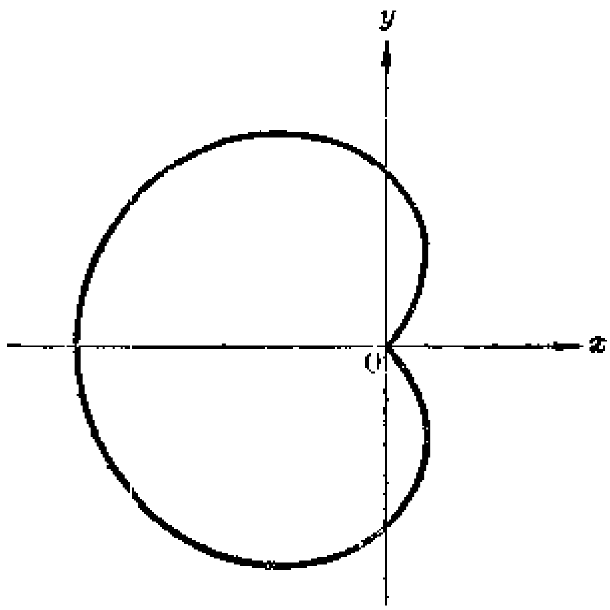


图 2-3-21

[例 8] 作蝸綫 $r=2-\cos\theta$ 的图形。

同上例一样，我們只須討論$0\leqslant\theta\leqslant\pi$的情形，且曲綫在此时为单調上升，但此时

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{2-\cos\theta}{\sin\theta},$$

当 $\theta\to0,\pi$ 时 $\operatorname{tg}\mu\to\infty$，即 $\mu=\frac{\pi}{2}$，就是設在 $\theta=0,\pi$ 处曲綫的切綫都是与向徑垂直的（图 2-3-22）。

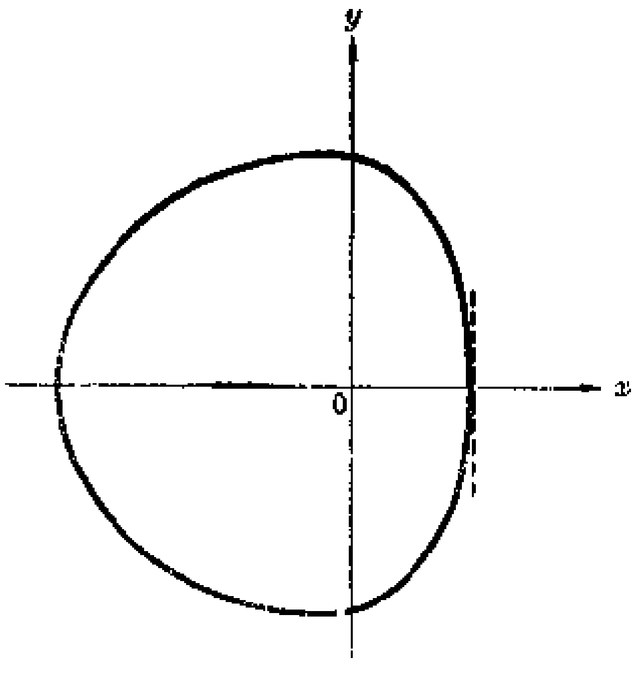


图 2-3-22

比較这两条曲綫在$\theta=0$

处的形状，正是由于这一不同，所以曲綫在 $\theta=0$ 处一条是"尖"形的而一条是"平滑"的。

习　题

1. 証明下列函数的单調性：

   (1) $y=x-\sin x$；　　(2) $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ $(x>0)$。

2. 单調函数的导数是否必为单調？

3. 証明下列不等式：

   (1) $x>\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$；(2) $x-\dfrac{x^3}{6}>\sin x>x$ $(x<0)$；

   (3) $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$ $(x>0)$；

   (4) $\operatorname{tg} x>x+\dfrac{x^3}{3}$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$；(5) $2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}$ $(x>1)$；

   (6) $\dfrac{1}{2^{P-1}}\leqslant x^P+(1-x)^P\leqslant 1$ $(0\leqslant x\leqslant 1,\ P>1)$。

4. 确定下列函数的上升、下降区間：

   (1) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$；　　(2) $y=x+\sin x$；

   (3) $y=x^n e^{-x}$；　　(4) $y=2x^2-\sin x$。

5. 求下列函数的极值：

   (1) $y=x-\ln(1+x)$；　　(2) $y=\sqrt{x}\ln x$；

   (3) $y=\cos x+\operatorname{ch} x$；　　(4) $y=\sin^3 x+\cos^3 x$。

6. 求下列函数的最大值和最小值或上确界、下确界：

   (1) $y=|x^2-3x+2|$，$[-10,10]$；(2) $y=e^{|x-3|}$，$[-5,5]$；

   (3) $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}$，$(0,1)$；　　(4) $y=2\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^2 x$，$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$。

7. 若 $f(x)$ 在点 x_0 具有直到 n 阶連續导数，并且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0$，那末当 n 为奇数时，$f(x_0)$ 非极值。当 n 为偶数而 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时，$f(x_0)$ 为极小值。当 n 为偶数而 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时，$f(x_0)$ 为极大值。

8. 容积固定为 V 的圓柱形閉合罐子，高及底的半徑为多少时可使表面积最小(即所費材料最少)？

9. 底为 a，高为 h 的三角形，試求其內接最大矩形的面积。

10. 給定长为 l 的綫段，試把它分成两段，使以这两段为边所圍成的矩形面积为最大。

11. 求內接于橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，而边平行于軸的最大矩形。

12. 求点 $M(p, p)$ 到拋物綫 $y^2=2px$ 的最短距离。

13. 甲船以 $u=20$ 浬/小时的速度向东航行，正午时在其正北面 $h=82$ 浬处有乙船以 $v=16$ 浬/小时的速度向正南航行，問何时两船距离最近？

14. 証明曲綫 $y=\frac{x+1}{x^2+1}$ 有位于同一直綫上的三个拐点。

15. 作下列函数的图形：

(1) $y=x+\frac{1}{x}$；　(2) $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$；

(3) $y=x+\operatorname{arc\,tg} x$；　(4) $y=x\cdot\operatorname{arc\,tg} x$；

(5) $y=e^{-x^2}$；　(6) $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$；

(7) $y=(x-1)^2(x-2)^3$；　(8) $y=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^3}$；

(9) $y=\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}$　$(a>0)$；　(10) $y=e^{-ax}\sin bx$；

(11) $y^2-x^4+x^5=0$。

16. 作参数方程的图形：

(1) 旋輪綫 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$；　$(a>0)$

(2) 星形綫 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$；　$(a>0)$

(3) 心脏綫 $x=2a\cos t-a\cos 2t$，$y=2a\sin t-a\sin 2t$；　$(a>0)$

(4) 圓的漸伸綫 $x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$
$(a>0,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi)$；

(5) $x=\cos^4 t$，$y=\sin^4 t$；

(6) $x=\operatorname{tg} t$，$y=t\cdot\operatorname{tg} t$　$\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$；

(7) $x=\frac{t^2}{1-t^2}$，　$y=\frac{1}{1+t^2}$；

(8) $x=\frac{t^2}{t-1}$，　$y=\frac{t}{t^2-1}$；

(9) $x=2t-t^2$，　$y=3t-t^3$。

17. 作极坐标方程的图形，并求 $\operatorname{tg}\mu$：

(1) 直綫 $r\cos\theta=a$；$(a>0)$　　(2) 圆 $r=a\cos\theta$；$(a>0)$

(3) 亚基米德螺綫 $r=a\theta$；$(a>0)$　　(4) 双曲螺綫 $r=\frac{a}{\theta}$；$(a>0)$

(5) 对数螺綫 $r=be^{a\theta}$；　　(6) 三叶玫瑰綫 $r=a\sin 3\theta$；$(a>0)$

(7) 四叶玫瑰綫 $r=a\cos 2\theta$；$(a>0)$　(8) $r^2=a^2\sin 2\theta$；

(9) $r=\frac{1}{2}-\cos 3\theta$；　　(10) $r=1+\left|\cos\frac{\theta}{4}\right|$；

(11) 蚶綫 $r=a+b\cos\theta$ （a, $b>0$，分 $a>b$, $a=b$, $a<b$ 討論）。

第四章　多元函数的微分学

§1　偏导数与全微分

一、偏导数与高阶偏导数

在前几章，我們研究了一元函数 $f(x)$ 对 x 求导数，也就是函数 $f(x)$ 在 x 方向的变化率問題，在多元函数情形，同样可以研究函数的变化率。不过，这时必須研究各个方向的变化率，由此，就导出多元函数的偏导数概念。偏导数就是函数对于某个变量的变化率，而把其它变量看作常数。以二元函数 $u=f(x, y)$ 为例，$f(x, y)$ 在点 (x, y) 对 x 的偏导数，就是把 y 看作不变，而作为 x 的一元函数，对 x 求导数。于是，利用极限概念，我們有如下的定义。

定义　对函数 $u=f(x, y)$，如給 x 以增量 Δx，于是函数相应地也得一改变量

$$\Delta_x u=f(x+\Delta x, y)-f(x, y),$$

若极限　$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x},$$

存在，則此极限值就称为函数 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处对 x 的偏导数，記为 $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\left(\text{或 } f'_x, \text{ 或 } \frac{\partial u}{\partial x}, \text{ 或 } u'_x\right)$. 同样地，$\frac{\partial u}{\partial y}$ 就是极限值（如果存在）

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y}.$$

由此定义可見，要求得 $f(x, y)$ 对 x（或 y）的偏导数，只不过是在 $f(x, y)$ 中把 y（或 x）看作常数，而对 x（或 y）求导数。

例如，我們知道理想气体的气态方程是

$$T=\frac{1}{R}PV,$$

其中 P 是压力，V 是体积，R 是常数。此时，如看作体积一定而压力改变，则 T 对 P 的变化率，就是 T 关于 P 的偏导数 $\frac{\partial T}{\partial P}$，由上式可求得

$$\frac{\partial T}{\partial P}=\frac{V}{R}.$$

类似地可求得

$$\frac{\partial T}{\partial V}=\frac{P}{R}.$$

同样地，如果把 P 看成 V, T 的函数，于是由

$$P=\frac{RT}{V}$$

可得
$$\frac{\partial P}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2},\quad \frac{\partial P}{\partial T}=\frac{R}{V}.$$

如把体积 V 看作 P, T 的函数，由

$$V=\frac{RT}{P}$$

就有
$$\frac{\partial V}{\partial P}=-\frac{RT}{P^2},\quad \frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{P}.$$

由此立即可得力学上重要的状态方程

$$\frac{\partial T}{\partial P}\cdot\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{\partial P}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial P}=-1.$$

此式也説明偏导数与一元函数复合函数导数之間的一个差别，就是説对偏导数来説已不象一元函数那样有

$$\frac{dT}{dP}\cdot\frac{dP}{dV}\cdot\frac{dV}{dT}=1$$

了，这是因为对一元函数来説 $\frac{dy}{dx}$ 是两个微分之商，而偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 只是一个記号，其分子、分母并沒有独立意义。

[例 1] 設 $u=x^y \quad (x>0)$，則有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x^y\cdot\ln x.$$

[例 2] 設 $u=\ln(x+y^2+z^3)$，則有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x+y^2+z^3},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x+y^2+z^3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3z^2}{x+y^2+z^3}.$$

从定义立刻可知，若 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 关于 x（或 y）可导，則 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 关于 x（或 y）連續。不过要注意，此时并不能推出 $f(x, y)$ 关于两个变量是連續的。例如考虑下列函数

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

由偏导数的定义知道

$$f'_x(0, 0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x, 0)-f(0, 0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0.$$

同理可求得 $f'_y(0, 0)=0$，但是在上篇第二章中已經指出此函数当 $x\to 0$, $y\to 0$ 时二重极限不存在，因而它在 $(0, 0)$ 点是不連續的。

二元函数的偏导数也具有簡单的几何解释，設 $u=f(x, y)$ 表示三維空間中的一个曲面，若任意固定 y，例如令 $y=y_0$，則平面 $y=y_0$ 与曲面交成一平面曲綫

$$u=f(x, y_0).$$

在点 $P(x_0, y_0)$ 的偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$ 就是 $f(x, y)$ 在 $x=x_0$ 点关于 x 的导数，因而也就是曲綫 $u=f(x, y_0)$ 在点 $x=x_0$ 的切綫斜率，也就是这条切綫与 x 軸正向間的夹角的正切。对 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 可以得到完全类似的几何解释（图 2-4-1）。

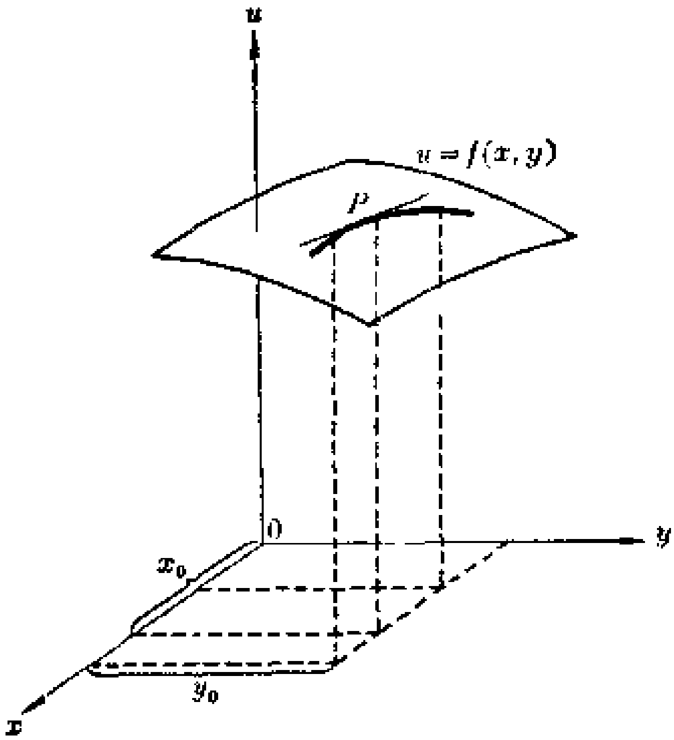


图 2-4-1

与一元函数一样，可类似地定义高阶偏导数，一般地 $f'_x(x, y)$ 及 $f'_y(x, y)$ 仍旧是 x, y 的函数，如果它們对 x 或对 y 还可以求偏导数，就称为原来函数的二阶偏导数。記为

$$f''_{x^2}=\frac{\partial(f'_x)}{\partial x}\quad\left(\text{或 }\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right);$$

$$f''_{y^2}=\frac{\partial(f'_y)}{\partial y}\quad\left(\text{或 }\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right);$$

$$f''_{xy}=\frac{\partial(f'_x)}{\partial y}\quad\left(\text{或 }\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right);$$

$$f''_{yx}=\frac{\partial(f'_y)}{\partial x}\quad\left(\text{或 }\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\right).$$

同样地，可以定义更高阶导数，例如

$$f'''_{x^2y}=\frac{\partial(f''_{x^2})}{\partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y};$$

$$f^{(n)}_{x^n}=\frac{\partial(f^{(n-1)}_{x^{n-1}})}{\partial x}=\frac{\partial^n f}{\partial x^n};$$

$$f^{(n)}_{x^k y^{n-k}}=\frac{\partial\left(f^{(n-1)}_{x^k y^{n-k-1}}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^n f}{\partial x^k\partial y^{n-k}};$$

等等。

[例 3] 設 $u=e^{x^2y}$，則有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xye^{x^2y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x^2e^{x^2y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2ye^{x^2y}+4x^2y^2e^{x^2y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=2xe^{x^2y}(1+x^2y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^4e^{x^2y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=2xe^{x^2y}(1+x^2y).$$

在此例中，我們有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}.$$

但一般而言，对各变量求偏导数的次序是不可交換的。为說明这一点，我們指出 f''_{xy} 与 f''_{yx} 并不是在任何情况下都是相等的。

例如，考慮函数

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

此时

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}\,y, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0;\end{cases}$$

$$f'_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}\,x, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

再从定义出发，不难求得

$$f''_{xy}(0,0)=-1,\quad \text{而}\quad f''_{yx}(0,0)=1,$$

两者并不相等。

但是，如果 f''_{xy} 及 f''_{yx} 在点 (x,y) 都是連續的，那末两者必定相等。这就是下面的定理。

定理　如果 f''_{xy} 及 f''_{yx} 在点 (x,y) 連續，則

$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y).$$

【証明】　作輔助函数

$$\Phi=\varphi(x,y+\Delta y)-\varphi(x,y),$$

而其中　　$$\varphi(x,y)=f(x+\Delta x,y)-f(x,y),$$

由于 x 是固定的，所以对 y 应用中值定理，有

$$\begin{aligned}\Phi&=\varphi'_y(x,y+\theta_1\Delta y)\Delta y\\&=[f'_y(x+\Delta x,y+\theta_1\Delta y)-f'_y(x,y+\theta_1\Delta y)]\Delta y\quad(0<\theta_1<1),\end{aligned}$$

对 x 再用一次中值定理，就有

$$\Phi=f''_{yx}(x+\theta_2\Delta x,y+\theta_1\Delta y)\Delta x\Delta y\quad\left(0<\begin{matrix}\theta_1\\\theta_2\end{matrix}<1\right).$$

如果在上式中交换第二項及第三項的位置，然后先对 x，后对 y 施行同样的手續，可得

$$\begin{aligned}\Phi&=[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)]\\&\quad-[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]\\&=f''_{xy}(x+\theta_3\Delta x,y+\theta_4\Delta y)\Delta x\Delta y\quad\left(0<\begin{matrix}\theta_3\\\theta_4\end{matrix}<1\right),\end{aligned}$$

于是有

$$f''_{yx}(x+\theta_2\Delta x,y+\theta_1\Delta y)=f''_{xy}(x+\theta_3\Delta x,y+\theta_4\Delta y).$$

由于假設 f''_{yx} 及 f''_{xy} 均为連續，故在上式两边令 $\Delta x\to0$，$\Delta y\to0$，取极限即得

$$f''_{yx}(x,y)=f''_{xy}(x,y).$$

定理于是得証。

这一定理建立了多元函数的偏导数可交换求导次序的根据。

同样地，若 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 有直到 n 阶的連續偏导数，就可簡写偏导数为

$$f^{(k)}_{x^\lambda y^{k-\lambda}}=\frac{\partial^k f}{\partial x^\lambda \partial y^{k-\lambda}} \quad (0<k<n,\ \lambda\leqslant k).$$

不論求导数的顺序如何，只要对 x 求导 λ 次，对 y 求导 $k-\lambda$ 次即可。

二、全微分与高阶全微分

在一元函数 $y=f(x)$ 的場合，我們曾研究过 y 关于 x 的微分，它具有两个特性，即：(i)它与自变量的改变量成比例，(ii)当自变量的改变量趋于零时，它与函数的改变量 Δy 之差是較自变量的改变量更高阶的无穷小。微分的許多应用正基于这两个性质。

現在我們轉而討論多元函数情形，例如，对二元函数 $u=f(x, y)$，我們也从同样的思想出发，引进如下定义。

定义 若函数 $u=f(x, y)$ 的全改变量 Δu 可表示为

$$\Delta u=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}),$$

且其中 A, B 与 $\Delta x, \Delta y$ 无关而仅依賴于 x, y，則称函数 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微，并称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全微分，記为 du 或 $df(x, y)$，即

$$du=df(x, y)=A\Delta x+B\Delta y.$$

若 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微，則有

$$f'_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x+o(\sqrt{\Delta x^2})}{\Delta x}=A,$$

这就是說在点 (x, y) 可微，則 f'_x 存在且等于 A，完全一样地可以証明此时 f'_y 也存在且等于 B，故有

$$du=f'_x\Delta x+f'_y\Delta y.$$

由定义易証自变量的改变量等于自变量的微分，因之上式可

写为

$$du = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

由此式出发，就可以証明多元函数的全微分也有与一元函数的微分相类似的运算法則，我們就不去列举了。

[例 4] 設 $u = x^2y + xy^2$, 則有

$$du = 2xy\,dx + x^2dy + y^2\,dx + 2xy\,dy$$
$$= (2xy + y^2)\,dx + (x^2 + 2xy)\,dy.$$

以上事实説明若函数在一点可微，則在該点也一定可导.对一元函数而言，我們知道反过来也是正确的，但对二元函数就不尽然，例如，若

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0; \end{cases}$$

按定义有

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

同样可得 $$f'_y(0, 0) = 0.$$

此时

$$\Delta u - du = [f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0)]$$
$$- [f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y] = \frac{\Delta x\,\Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

但 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{\Delta x\,\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 不存在，故函数 $f(x,y)$ 在 $(0, 0)$ 点不可微。由此可見，对一元函数而言，可微与可导是同一回事；而对多元函数来說，偏导数存在不一定可微，但是在一定条件下，偏导数与可微性之間有密切联系，这就是下面的定理所指出的。

定理 若 $f'_x(x, y)$ 及 $f'_y(x, y)$ 在点 (x, y) 及其某一邻域內存

在，且在这一点它們都連續，则函数 $u=f(x, y)$ 在該点可微。

【証明】 我們把 Δu 写成如下形式，

$$\begin{aligned}\Delta u&=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)\\&=[f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x, y)]\\&\quad+[f(x+\Delta x, y)-f(x, y)].\end{aligned}$$

由于假設 f'_x 及 f'_y 均存在，所以当 Δx, Δy 充分小时，可以把中值定理分别应用于每一个差，就有

$$\Delta u=f'_y(x+\Delta x, y+\theta_1\Delta y)\Delta y+f'_x(x+\theta_2\Delta x, y)\Delta x$$

$$\left(0<\begin{matrix}\theta_1\\\theta_2\end{matrix}<1\right),$$

又由假設 f'_x 及 f'_y 均在点 (x, y) 連續，因而有

$$f'_y(x+\Delta x, y+\theta_1\Delta y)=f'_y(x, y)+\alpha,$$

$$f'_x(x+\theta_2\Delta x, y)=f'_x(x, y)+\beta,$$

而当 $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ 时，α, β 都趋于零。于是

$$\Delta u=f'_x(x, y)\Delta x+f'_y(x, y)\Delta y+\beta\Delta x+\alpha\Delta y,$$

而当 $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ 时，

$$\frac{\beta\Delta x+\alpha\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\to 0.$$

由定义可知，这就証明了 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微。定理从而証毕。

还須注意，f'_x 及 f'_y 的連續性只是可微的充分条件，并非必要的。讀者可以作为练习来驗証下面的函数

$$f(x, y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

在 $(0, 0)$ 可微，但 f'_x 及 f'_y 存在而在該点不連續（見习题 6, 7, 8）。

在一阶全微分的表达式

$$du=f'_x(x, y)dx+f'_y(x, y)dy$$

中的 dx, dy 是不随 x, y 而变的任意定数，当 x, y 变化时，du 仍为 x, y 的函数，我們假定自变量的改变量仍为 dx, dy，就可再求这函数的全微分，从而我們可以定义多元函数的高阶全微分如下：

$$d^2u=d(du),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$d^nu=d(d^{n-1}u).$$

由于

$$d(f'_x)=f''_{x^2}dx+f''_{xy}dy,$$

$$d(f'_y)=f''_{yx}dx+f''_{y^2}dy,$$

因此，由一阶全微分的公式，可得

$$\begin{aligned}d^2u&=d(du)=d(f'_xdx+f'_ydy)\\&=d(f'_x)dx+d(f'_y)dy\\&=f''_{x^2}dx^2+2f''_{xy}dx\,dy+f''_{y^2}dy^2.\end{aligned}$$

类似于单变量函数乘积的高阶导数的莱伯尼兹公式，对高阶全微分有如下公式：

$$d^nu=\sum_{\nu=0}^{n}C_n^\nu\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-\nu}\partial y^\nu}dx^{n-\nu}dy^\nu$$

或簡記为

$$d^nu=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f,$$

其中 $\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n$ 表示一种运算符号，在形式上可以象二项式一样展开，不过 $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k$ 或 $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k$ 与 f 相乘时，表示对函数 f 的导数运算，例如 $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k f$ 表示函数 $f(x,y)$ 关于 x 的 k 阶偏导数，即 $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$，$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^l f$ 表示函数 $f(x,y)$ 关于 x 求 k 阶、关于 y 求 l 阶偏导数，即 $\frac{\partial^{k+l}f}{\partial x^k\partial y^l}$ 等等。

此公式完全类似于求两个一元函数之乘积的高阶导数的莱伯尼兹公式那样，可以用数学归納法証明。

因为，当 $n=1$ 时它就是

$$du=f'_x dx+f'_y dy,$$

而在前面已証明过这是成立的，亦即 $n=1$ 时公式成立，我們設 $n=m$ 时成立，来推証 $n=m+1$ 时成立。

既然假定 $n=m$ 时成立，就有

$$d^m u=\sum_{\nu=0}^{m} C_m^{\nu} \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-\nu}\partial y^{\nu}} dx^{m-\nu} dy^{\nu}.$$

对上式再求一次微分，并利用

$$\partial\left(\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-\nu}\partial y^{\nu}}\right)=\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m-\nu+1}\partial y^{\nu}} dx+\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m-\nu}\partial y^{\nu+1}} dy$$

及 $C_m^{\nu}+C_m^{\nu-1}=C_{m+1}^{\nu}$ 即可証得。

三、复合函数的偏导数与全微分

这一段我們来討論多元函数复合函数的微分公式，对二元函数可导出如下的公式：

設 $u=f(x, y)$，而 x, y 又是自变量 s, t 的函数：

$$x=\varphi(s, t), \quad y=\psi(s, t),$$

此时，若 $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}$ 及 $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}$ 在某点 (s, t) 均存在，而 $f(x, y)$ 在相应于 (s, t) 的点 (x, y) 可微，則成立公式：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

及

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}.$$

我們来証明第一个公式。若給 t 以改变量 Δt，則相应地就有 x 及 y 的改变量

$$\Delta x=\varphi(s, t+\Delta t)-\varphi(s, t),$$

$$\Delta y=\psi(s, t+\Delta t)-\psi(s, t),$$

由于 $f(x, y)$ 可微，所以有

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right),$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}+\frac{o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)}{\Delta t},$$

由于 x, y 对 t 的連續性$\left(因为\ \frac{\partial x}{\partial t},\ \frac{\partial y}{\partial t}\ 存在\right)$，因之，当 $\Delta t\to 0$ 时也有 $\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$，从而

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\right),$$

而这极限显然等于零，所以有

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}.$$

完全类似地可以証明第二个等式。

下面讲几个特别情形。

若 $u=f(x, y)$，而 x, y 依賴于一个变量 t，即

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),$$

则有

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

其次，若 x, y 是自变量 s, t 的函数，而函数 u 依 x, y 而变化外还依賴于 t，即

$$u=f(x, y, t);\quad x=\varphi(s, t),\quad y=\psi(s, t),$$

那末，就有

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right),$$

等式右边的最后一項，我們有意識地把它写成$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$，为的是免得它与等式左边的 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 混淆起来。因为右端的$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$是表示在函数 $u=f(x, y, t)$ 中把 x, y 看作常数，对 t 求偏导数，而左端的 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 是表示在 $u=f(\varphi(s, t), \psi(s, t), t)$ 中把 s 視为常数，对 t 求偏导

数，二者切不可混淆。

最后，我們还要强調指出在导出这些公式时，函数 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微这一条件的重要性。例如考虑函数

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$$

不难驗証 $f'_x(0, 0)$ 及 $f'_y(0, 0)$ 均存在，但在点 $(0, 0)$ 不可微。此时若令 $x=t, y=t$ 代入得 $u=\frac{t}{2}$，于是 $\frac{du}{dt}=\frac{1}{2}$，但是，如果代入上述第一个特殊情况的公式，将得到

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0}=f'_x(0, 0)\cdot 1+f'_y(0, 0)\cdot 1=0.$$

这是因为此时公式不成立的緣故，这一实例說明，有别于一元函数情形，对多元函数而言，如果仅是导数存在，上述复合函数求导公式还不一定成立。

利用高阶偏导数的定义，重复应用上面这些公式，同样可以导出复合函数的高阶偏导数的公式，但是，它們在形式上既繁瑣又不实用，因此我們不停留在公式的推导上。因为在具体运算时，可以逐次应用复合函数一阶偏导数的公式求得。下面我們举例来說明复合函数的高阶偏导数的求法。

[例 5] 設 $u=f\left(x^2y, \frac{y}{x}\right)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

我們可把此函数看作复合函数

$$u=f(\xi, \eta);\quad \xi=x^2y,\quad \eta=\frac{y}{x}.$$

于是按上述求导公式，則有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=2xy\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$\left(\text{因为 } \frac{\partial \xi}{\partial x}=2xy, \frac{\partial \eta}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\right)$.

現在来求二阶偏导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，但在运算时要注意此时 $\frac{\partial u}{\partial \xi}$，$\frac{\partial u}{\partial \eta}$ 都是 ξ，η 的函数，从而也是 x，y 的复合函数，故而对它們求导时須重复应用复合函数的求导法则，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2y\frac{\partial u}{\partial \xi}+2xy\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]+\frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$-\frac{y}{x^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]$$

$$=2y\frac{\partial u}{\partial \xi}+2xy\left[2xy\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\right]+\frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$-\frac{y}{x^2}\left[2xy\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right]$$

$$=4x^2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-4\frac{y^2}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$+2y\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

同理，可求得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2x\frac{\partial u}{\partial \xi}+2xy\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right]-\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$-\frac{y}{x^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right]$$

$$=2x\frac{\partial u}{\partial \xi}+2xy\left[x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\right]-\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$-\frac{y}{x^2}\left[x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right]$$

$$=2x^3y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2x\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$\left(\text{因为 } \frac{\partial \xi}{\partial y}=x^2,\ \frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1}{x}\right)$.

同时，我們在运算过程中，假定所出現的一切偏导数均为連續的。建議讀者作为练习求出 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$；如果再要求三阶或更高阶的偏

导数，如 $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$，$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ 等，只要注意所有 u 关于 ξ，η 的各阶偏导数仍然是 ξ，η 的函数，从而仍然是 x，y 的复合函数，因此重复应用复合函数求导法則即可求得。

有时为了簡便起見，常引用記号

$$f'_1 = \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi}$$

表示函数 f 对第一个变元求偏导数，同样地有

$$f'_2 = \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta}, \quad f''_{12} = \frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta}$$

等等，于是上例中求得的結果就可改写成

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy f'_1 - \frac{y}{x^2} f'_2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4x^2y^2 f''_{11} - 4\frac{y^2}{x} f''_{12} + \frac{y^2}{x^4} f''_{22} + 2y f'_1 + \frac{2y}{x^3} f'_2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x^2 y f''_{11} + y f''_{12} - \frac{y}{x^3} f''_{22} + 2x f'_1 - \frac{1}{x^2} f'_2.$$

[例 6] 設 $u = f(x+y+z, xyz)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

此时有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 + yz f'_2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f''_{11} + (x+y) z f''_{12} + xyz^2 f''_{22} + z f'_2.$$

对于具体的函数，就可得出具体的結果，例如对函数

$$u = (x+y+z)e^{xyz},$$

那末相当于 $u = f(\xi, \eta) = \xi e^{\eta}$，$\xi = x+y+z$，$\eta = xyz$，因此有

$$f'_1 = e^{\eta}, \quad f'_2 = \xi e^{\eta},$$

于是 $$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{xyz}[1 + yz(x+y+z)],$$

此处 $$f''_{11} = 0, \quad f''_{12} = e^{\eta}, \quad f''_{22} = \xi e^{\eta},$$

所以有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=e^{xyz}[(x+y)z+xyz^2(x+y+z)+z(x+y+z)]$$

$$=e^{xyz}z[(x+y)+(1+xyz)(x+y+z)].$$

下面再来看一下复合函数的全微分公式，上面我們已导出当 x, y 为自变量时 $u=f(x, y)$ 的全微分为

$$du=f'_x dx+f'_y dy.$$

在复合函数 $u=f(x, y)$；$x=\varphi(s, t)$，$y=\psi(s, t)$ 时就应具如下的形式：

$$du=\frac{\partial u}{\partial s}ds+\frac{\partial u}{\partial t}dt$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right)dt$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial s}ds+\frac{\partial k}{\partial t}dt\right)+\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial s}ds+\frac{\partial y}{\partial t}dt\right)$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

就是說它在形式上与 x, y 是自变量的情形一样，我們也把它叫做一阶全微分的形式不变性。这是与一元函数的情形相类似的。

但须注意，上式中，在复合函数的情形下，dx, dy 也不再是常量，而是 s, t 的函数，因此有

$$d^2u=d(du)=d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right),$$

而

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)=d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx+\frac{\partial u}{\partial x}d(dx)$$

$$=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dy\right)dx+\frac{\partial u}{\partial x}d^2x$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial u}{\partial x}d^2x,$$

同样有

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial u}{\partial y}d^2y.$$

因此

$$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial u}{\partial x}d^2x+\frac{\partial u}{\partial y}d^2y.$$

它已不再象一阶全微分那样有形式上的不变性。

四、沿任何方向的导数

前面我們引进了偏导数概念，按照定义可見，我們在引进函数 $f(P)=f(x,y,z)$ 关于某一变量（例如关于 x）的偏导数时，設动点仅沿平行于 x 軸的方向移动，因此 $f(P)$ 关于 x 的偏导数可以說是表示函数沿 x 軸方向的变化率，$f(P)$ 关于 y 或 z 的偏导数同样地表示函数沿 y 軸或 z 軸的变化率，但在許多实际問題上常常还需知道 $f(P)$ 沿任何方向的变化率，例如，若 $f(P)$ 表示給定在某一物体內每点 P 的温度，则該物体的热的分布及轉移規律自然地就依賴于温度沿任何方向下降（或上升）的速度。这就自然地引导我們去研究 $f(P)$ 沿任何方向的变化率的問題，亦即沿任何方向的导数問題，下面我們就来引进函数沿任一給定方向的导数的精确定义。

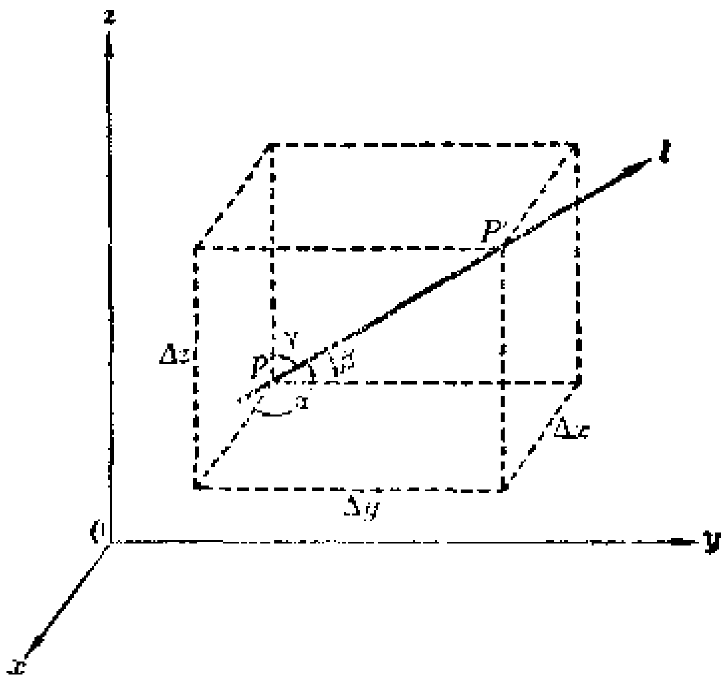


图 2-4-2

設函数 $f(P)$ 定义于某一区域內，$P(x,y,z)$ 为这区域內任一点，l 为过 P 点的任

一有向綫段，設 $P'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ 为这方向上另一任意点(图 2-4-2)。設 $|PP'|$ 是 P, P' 两点間綫段的長度，令 P' 沿 l 趋向于 P，此时，若

$$\lim_{P'\to P}\frac{f(P')-f(P)}{|P'P|}$$

存在，此極限就称为 $f(x, y, z)$ 在 P 点沿 l 的方向导数，記为 $\frac{\partial f(P)}{\partial l}$ 或 $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial l}$。

若 $f(x, y, z)$ 在所考察的点处可微，則可以証明它在这点沿任何方向 l 的方向导数必存在，且可用下面的公式来表示，即

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos(l, x)+\frac{\partial f}{\partial y}\cos(l, y)+\frac{\partial f}{\partial z}\cos(l, z),$$

其中 (l, x), (l, y), (l, z) 分别表示方向 l 与三坐标軸正向之間的夹角。

我們知道方向 l 的方向余弦可表示为

$$\cos(l, x)=\frac{\Delta x}{|PP'|},\quad \cos(l, y)=\frac{\Delta y}{|P'P|},\quad \cos(l, z)=\frac{\Delta z}{|P'P|},$$

由于假設 $f(P)$ 在 P 点可微，故有

$$f(P')-f(P)=f'_x\Delta x+f'_y\Delta y+f'_z\Delta z+o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}\right),$$

于是

$$\frac{f(P')-f(P)}{|P'P|}=f'_x\frac{\Delta x}{|P'P|}+f'_y\frac{\Delta y}{|P'P|}+f'_z\frac{\Delta z}{|P'P|}+\frac{o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}\right)}{|P'P|},$$

由于 $|P'P|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$，所以当 $P'\to P$ 时，即得

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{P'\to P}\frac{f(P')-f(P)}{|P'P|}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos(l, x)+\frac{\partial f}{\partial y}\cos(l, y)+\frac{\partial f}{\partial z}\cos(l, z).$$

这就是我們所要証明的公式。这一公式为我們求函数沿任一給定方向的导数提供了一个实用的計算方法。

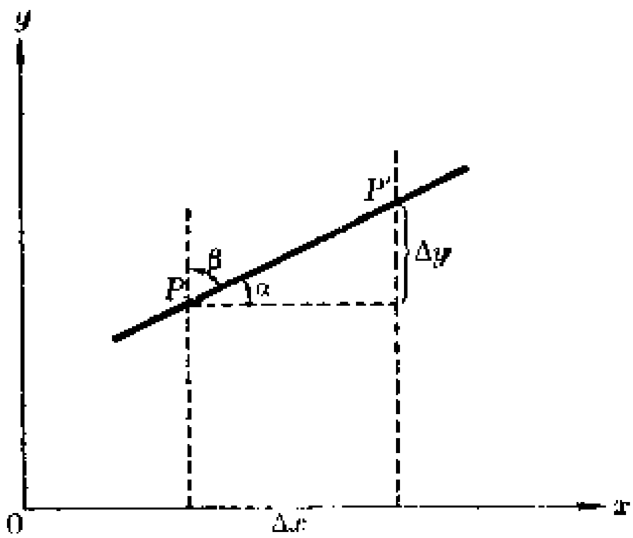


图 2-4-3

在平面情形，即对于两个变量的函数 $f(x,y)$ 而言，沿任一給定方向 l 的方向导数就是上述情形的特例，此时成立如下的公式：

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos(l, x)+\frac{\partial f}{\partial y}\cos(l, y).$$

§2 二元函数的泰勒公式

現在利用一元函数的泰勒公式来推导二元函数的泰勒公式。

定理 若二元函数 $u=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 对 x 及 y 具有直到 $n+1$ 阶連續偏导数，則

$$\begin{aligned}f(x_0+h, y_0+k)=&f(x_0, y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0, y_0)\\&+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)}f(x_0, y_0)+\cdots\\&+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)}f(x_0, y_0)\\&+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)}f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)\quad(0<\theta<1),\end{aligned}$$

这里記号 $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(p)}f(x, y)$ 的意义为

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(p)}f(x, y)=\sum_{r=0}^{p}C_p^r h^r k^{p-r}\frac{\partial^p f}{\partial x^r\partial y^{p-r}}.$$

【証明】 設 h, k 充分小，当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，考虑函数

$$u(t)=f(x_0+th,\ y_0+tk)$$

显然有

$$u(0)=f(x_0,\ y_0),$$

$$u(1)=f(x_0+h,\ y_0+k)$$

利用一元函数的麦克劳林公式，可以得到

$$u(1)=u(0)+\frac{u'(0)}{1!}+\frac{u''(0)}{2!}+\cdots+\frac{u^{(n)}(0)}{n!}$$

$$+\frac{u^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\quad(0<\theta<1).$$

由于

$$\frac{du}{dt}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k\right)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0+th,\ y_0+tk)$$

一般地，

$$\frac{d^p u}{dt^p}=u^{(p)}(t)=\sum_{r=0}^{p}C_p^r h^r k^{p-r}\frac{\partial^p f}{\partial x^r\partial y^{p-r}}$$

$$=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(p)}f(x_0+th,\ y_0+tk),$$

于是

$$u^{(p)}(0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(p)}f(x_0,\ y_0)\quad(p=1,2,\cdots,n),$$

$$u^{(n+1)}(\theta)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)}f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k).$$

这样，代入上式，就得到二元函数的泰勒公式：

$$f(x_0+h,\ y_0+k)=f(x_0,\ y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,\ y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)}f(x_0,\ y_0)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)}f(x_0,\ y_0)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)}f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)\quad(0<\theta<1).$$

泰勒公式也可以写为如下形式，称为泰勒公式的微分形式：

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$$
$$= df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0, y_0) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!}d^nf(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta h, y_0+\theta k).$$

§3 二元函数的极值

上一章曾討論过一元函数的极值，一元函数的极值定义可以推广到多元函数，本节仅就二元函数进行討論。

若函数 $f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 的邻域内成立不等式

$$f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0),$$

則称 $f(x, y)$ 在点 M_0 取到极大值 $f(x_0, y_0)$，点 $M_0(x_0, y_0)$ 称为函数 $f(x, y)$ 的极大点；类似地，若在点 $M_0(x_0, y_0)$ 的邻域内成立不等式

$$f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0),$$

則称 $f(x, y)$ 在点 M_0 取到极小值 $f(x_0, y_0)$，点 M_0 称为函数 $f(x, y)$ 的极小点。

极大值与极小值統称为极值；极大点与极小点統称为极值点。

从定义，$f(x, y)$ 在点 M_0 可导且有一极值，則只随 x 而变的函数 $f(x, y_0)$ 就在点 x_0 有极值。于是由一元函数在极值点的必要条件，可知有

$$\left.\frac{\partial f(x, y_0)}{\partial x}\right|_{x=x_0} = 0.$$

同理可知，这时还应有

$$\left.\frac{\partial f(x_0, y)}{\partial y}\right|_{y=y_0} = 0.$$

这就是說，对偏导数存在的函数 $f(x, y)$ 而言，在点 $M_0(x_0, y_0)$ 有极值的必要条件是

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

也可写成 $df(x_0, y_0) = 0$.

但是,这个条件并非充分的,例如函数 $z = xy$ 在点(0, 0)有

$$f'_x(0, 0) = y|_{(0,0)} = 0, \quad f'_y(0, 0) = x|_{(0,0)} = 0,$$

但是由解析几何知道，此函数的几何图形是一馬鞍面，因而在(0, 0)点显然沒有极值。

此外,在偏导数不存在的点处仍然可能有极值,例如:

$$z = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

它是交于 Y 軸的两个平面。显然，凡 $x = 0$ 的点都是函数的极小点。但是

$$x \geqslant 0 \text{ 时}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad x < 0 \text{ 时}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -1,$$

即在 $x = 0$ 时偏导数不存在。

由此可見，函数的极值点必为 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 同时为零或有一不存在的点。

綜上所述,要求函数的极值,首先要求出所有使函数的全微分等于零或偏导数不存在的点,然后討論該点周圍函数的变化情形,以进一步判定是否有极值，为此我們討論 Δf，若 $f(x, y)$ 的一切二阶导数連續，則由泰勒公式并注意到在极值点必須 $df(x_0, y_0) = 0$, 就有

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= \frac{1}{2}(f''_{x^2}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x^2 \\ &\quad + 2f''_{xy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x\Delta y \\ &\quad + f''_{y^2}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y^2).\end{aligned}$$

由于 $f(x,y)$ 的一切二阶偏导数在 (x_0,y_0) 連續，記 $A=f''_{x^2}(x_0,y_0)$ $B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{y^2}(x_0,y_0)$，那么有

$$f''_{x^2}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)=A+\alpha,\quad \alpha\to 0\ (\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0),$$

$$f''_{xy}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)=B+\beta,\quad \beta\to 0\ (\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0),$$

$$f''_{y^2}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)=C+\gamma,\quad \gamma\to 0\ (\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0).$$

于是

$$\Delta f=\frac{1}{2}[A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2]$$
$$+\frac{1}{2}[\alpha\Delta x^2+2\beta\Delta x\Delta y+\gamma\Delta y^2].$$

当二次形式 $d^2f=A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2$ 不为零时，注意到当 $\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$ 时，α，β，γ 皆为无穷小量，所以存在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的一个邻域，使得在这个邻域内，Δf 的符号与 d^2f 的符号相同，而当 $d^2f=0$ 时，Δf 的符号便取决于 $\alpha\Delta x^2+2\beta\Delta x\Delta y+\gamma\Delta y^2$ 的符号了。

对于 Δx，Δy 的二次型

$$d^2f=A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2,$$

它的判别式为

$$H=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2.$$

我們有以下結論：

1° 若 $H>0$，当 $A<0$ 时，則 $d^2f<0$，亦卽有 $\Delta f<0$，函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取极大值。当 $A>0$ 时則 $d^2f>0$，亦卽有 $\Delta f>0$，函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取极小值。

2° 若 $H<0$，則函数在点 (x_0,y_0) 非极值。

3° 若 $H=0$，則 Δf 的符号須要进一步由 $\alpha\Delta x^2+2\beta\Delta x\Delta y+\gamma\Delta y^2$ 决定。

以上結論可采取两种方法推导，一种是应用高等代数学中关

于判别二次形式为正(負)定的充要条件。另一种是采取初等的方法直接証明。

我們先应用二次形式的有关理論，可以很簡单地就得到了結論。这是因为当 $H>0$ 而 $A<0$ 时，二次形 d^2f 为負定的，故 $d^2f<0$，从而 $\Delta f<0$；当 $H>0$ 而 $A>0$ 时，二次形 d^2f 为正定的，故 $d^2f>0$，从而 $\Delta f>0$；当 $H<0$ 时，二次形为不定的，所以 Δf 亦可正可負；当 $H=0$ 时，二次形 d^2f 在某些 Δx, Δy 值上将等于零，于是 Δf 的符号就必須进一步判断了。

再利用初等方法来証明这个結論如下，分三种情形：

1° $H>0$.

那么 $AC>0$，即 A 与 C 同号，又因为 $\Delta x^2+\Delta y^2\neq 0$，所以

$$Ad^2f=(A\Delta x+B\Delta y)^2+(AC-B^2)\Delta y^2>0,$$

說明 d^2f 与 A 同号，所以

当 $A<0$ 时，$\Delta f<0$，亦即 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取极大値。

当 $A>0$ 时，$\Delta f>0$，亦即 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取极小値。

2° $H<0$.

(i) 若 $A\neq 0$，此时有：

$$Ad^2f=(A\Delta x+B\Delta y)^2+(AC-B^2)\Delta y^2,$$

于是，当 $\Delta x\neq 0$, $\Delta y=0$ 时，$Ad^2f>0$；当 $A\Delta x+B\Delta y=0$, $\Delta y\neq 0$ 时，$Ad^2f<0$，此时 Δf 可正可負。

(ii) 若 $C\neq 0$，只要把 A 与 C, Δx 与 Δy 的位置对調，便可得到与(i)同样的結論。

(iii) 若 $A=C=0$, $B\neq 0$，于是 $d^2f=2B\Delta x\Delta y$，那么，

当 $\Delta x\Delta y>0$ 时，$d^2f>0$；

当 $\Delta x\Delta y<0$ 时，$d^2f<0$.

这就說明了在 $H<0$ 时，Δf 符号要改变，所以当 $H<0$ 时，函数 $f(x, y)$ 在点 M_0 无极値。此时点 M_0 称为鞍点。

3° $H=0$.

若 $A\neq 0$, 則 $A d^2f=(A\Delta x+B\Delta y)^2\geq 0$, 当 $A\Delta x+B\Delta y=0$ 时, $d^2f=0$. 此时 Δf 的符号就无法由 d^2f 来肯定。

若 $C\neq 0$, 可得出类似的結論。所以当 $H=0$ 时为可疑情况，需要另行討論，才能确定此时函数是否有极值。

下面，我們来看几个具体例子：

[例 1]　討論函数 $z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$ $(p>0,\ q>0)$ 的极值。

此时

$$z'_x=\frac{x}{p},\quad z'_y=\frac{y}{q},$$

当 $x=0$, $y=0$ 时,

$$z'_x=z'_y=0,$$

所以在原点可能有极值，进一步計算可得

$$A=\frac{1}{p},$$

$$B=0,$$

$$C=\frac{1}{q},$$

由此 $H>0$, 因此在点 $(0,0)$ 函数 z 有极小值。

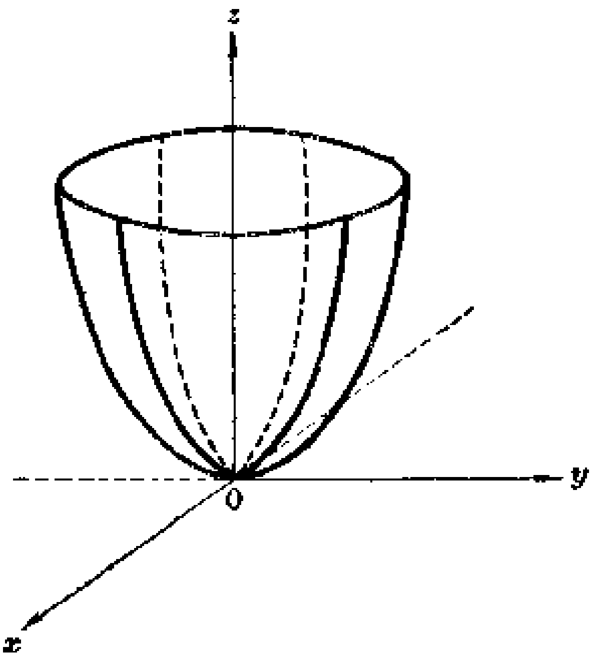


图　2-4-4

在几何图形上函数表示着顶点在原点的椭圆抛物面(图 2-4-4)，显然在 $(0,\ 0)$ 点有极小值。

[例 2]　討論 $z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}$ $(p>0,\ q>0)$ 的极值。

此时

$$z'_x=\frac{x}{p},\quad z'_y=-\frac{y}{q}.$$

亦可看出在 $(0,\ 0)$ 点可能有极值，且

$$A=\frac{1}{p},\quad B=0,\quad C=-\frac{1}{q},$$

从而 $H<0$，因此函数无极值。

在几何上，它表示着頂点在原点的馬鞍面，因而，显然在(0,0)点沒有极值。

最后，我們再簡略地討論一下多元函数的最大值和最小值問題。設函数 $z=f(x,y)$ 在某一有界閉域 D 中連續且可导，因此必在 D 內达到最大值(或最小值)，若这样的点 M_0 位于区域的內部，則在这点函数显然有极大值(或极小值)，因此，在这种情形函数取到最大值(或最小值)的点必是极值点之一，然而函数 $f(x,y)$ 的最大值(最小值)亦可能在区域的边界上达到，因此，为了要找出函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上的最大值(或最小值)，必需要找出一切有极值的內点，算出这些点的函数值，再与区域边界上的函数值相比較，这些数值中的最大者(或最小者)就是函数在閉域 D 上的最大值(或最小值)。通常，也往往把可能有极值的点(即 f'_x，f'_y 同时为零或有一不存在的点)处的函数值全部算出，并与边界上的函数值加以比較，而不管这些点是否极值点，以避免判断极值的麻煩。

[例 3]　設一长方体三边长度之和为一定，試問三边长度取怎样的比例关系时，所成长方体之容积最大。

設长方体三边之长各为 x，y，z，按題意就是要求

$$V=xyz$$

在 $x+y+z=a$ (a 为大于 0 的常数)时的最大值。

由 $z=a-x-y$ 代入 V 得

$$V=xy(a-x-y),$$

此时令

$$\frac{\partial V}{\partial x}=ay-2xy-y^2=0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=ax-x^2-2xy=0,$$

解此方程組，得二組解 $x=y=0$（此时无意义，不討論）及 $x=y=\frac{a}{3}$，此时 $z=a-x-y=\frac{a}{3}$，即三边之长相等，也就是作成立方体时容积为最大。

例 3 使我們看到了所謂求限制极值的問題，也就是在条件

$$x+y+z=a$$

的限制下，求函数 $V=xyz$ 的极值問題，它給出了一种解法，以后在本章 §5 中将要介紹另一种更为普遍的方法。

[例 4] 試在 x 軸，y 軸与直綫 $x+y=2\pi$ 圍成的三角形（图 2-4-5）上求函数

$$u=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$$

的最大值。

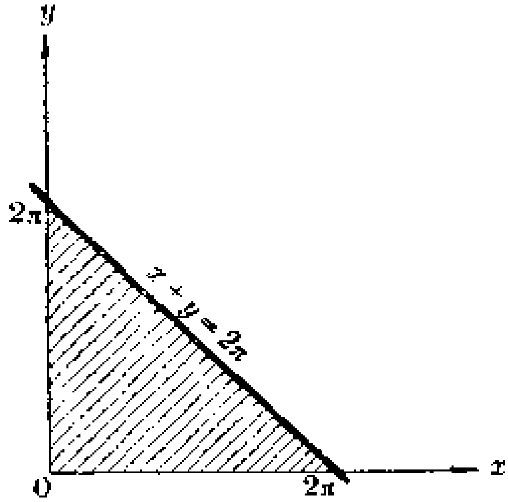


图 2-4-5

此时，我們有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos x-\cos(x+y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\cos y-\cos(x+y),$$

在区域内部，仅在点 $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ 上两个偏导数同时为零。而在此点处函数值为 $u=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，因为在区域的边界，即直綫 $x=0$，$y=0$ 及 $x+y=2\pi$ 上此函数取零值，因此，函数显然在点 $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ 上达到最大值，最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$。

习　題

1．求下列函数的一阶偏导数：

(1) $u=e^{xy}$; (2) $u=x^y$;

(3) $u=xy+\frac{x}{y}$; (4) $u=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$;

(5) $u=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$; (6) $u=e^{xyz}$;

(7) $u=(xy)^z$; (8) $u=z^{xy}$。

2. 求下列函数在給定点(x_0, y_0)的全微分:

(1) $u=x^4+y^4-4x^2y^2$, $(0, 0)$, $(1, 1)$;

(2) $u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(1, 0)$, $(0, 1)$;

(3) $u=x\sin(x+y)$, $(0, 0)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$;

(4) $u=\ln(x+y^2)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$。

3. 求下列函数的全微分:

(1) $u=\sin(x^2+y^2)$; (2) $u=x^m\cdot y^n$;

(3) $u=e^{xy}$; (4) $u=x^y$;

(5) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; (6) $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$。

4. 求下列函数的高阶偏导数:

(1) $u=x\sin(x+y)+y\cos(x+y)$, 所有二阶偏导数;

(2) $u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, 所有二阶偏导数;

(3) $u=x\ln(xy)$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}$;

(4) $u=\ln(ax+by+cz)$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}$;

(5) $u=(x-x_0)^p\cdot(y-y_0)^q$, $\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\partial x^q}$;

(6) $u=x\cdot y\cdot ze^{x+y+z}$, $\frac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\cdot\partial y^q\cdot\partial z^r}$。

5. 求下列函数的高阶全微分:

(1) $u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, d^2u; (2) $u=\sin(x+y+z)$, d^2u;

(3) $u=x^3+y^3-3xy(x-y)$, d^3u; (4) $u=\sin(x^2+y^2)$, d^2u;

(5) $u=\ln(x+y)$, d^nu; (6) $u=e^{ax+by}$, d^nu;

(7) $u=X(x)Y(y)$, d^nu; (8) $u=f(x+y+z)$, d^nu。

6. 証明: $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在 $(0, 0)$ 連續, $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$ 存在,但在$(0, 0)$点不可微分。

7. 証明

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在(0, 0)点的邻域中連續，$f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$有界，但在(0, 0)点不可微。

8. 設

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

則 $f'_x(x, y)$，$f'_y(x, y)$ 存在且不連續，在(0, 0)点的任何邻域中无界，但在(0, 0)点可微。

9. 設 (1) $u=x^2-2xy-3y^2$;　　(2) $u=x^{y^2}$;

(3) $u=\arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$,

驗証成立等式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

10. 設

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

利用定义証明 $\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y)\Big|_{(0,0)}\neq\dfrac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(x,y)\Big|_{(0,0)}$.

11. 求下列函数的一阶和二阶偏导数：

(1) $u=f(x,y)$, 其中 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ （θ 为常数），$\dfrac{du}{d\rho}$, $\dfrac{d^2u}{d\rho^2}$;

(2) $u=f(x,y)$, 其中 $x=t$, $y=t^2$;

(3) $u=f(x,y)$, 其中 $x=a\xi$, $y=a\eta$;

(4) $u=f(x^2+y^2+z^2)$;

(5) $u=f\left(x, \dfrac{x}{y}\right)$;

(6) $u=f(a_1x+b_1y+c_1z,\ a_2x+b_2y+c_2z)$.

12. 求 $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$:

(1) $u=\sin x\,\mathrm{ch}\,y$;　　(2) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

13. 求 $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$,　$u=f(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)$.

14. 求下列函数的一阶和二阶全微分：

(1) $u=f(x+y)$； (2) $u=f(ax, by)$；

(3) $u=f(x+y, x-y)$； (4) $u=f(x\cdot y\cdot z)$；

(5) $u=f(x^2+y^2+z^2)$。

15. 若 $u=f(r)$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，其中 $f(r)$ 二次可微，試証明

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{d^2 u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}.$$

16. 若 u, v 为 x, y 的函数，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，試由 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ 証明等式 $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$，$\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$。

17. 設函数 φ, ψ 可微分多次，試驗証下列等式：

(1) 若 $z=x^n\cdot\varphi\left(\frac{y}{x^2}\right)$， 則 $x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=n\cdot z$；

(2) 若 $z=\varphi(x^2+y^2)$， 則 $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$；

(3) 若 $z=\frac{y^3}{3x}+\varphi(x\cdot y)$， 則 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$；

(4) 若 $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$， 則 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$；

(5) 若 $u=x\cdot\varphi(x+y)+y\cdot\psi(x+y)$，則 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$；

(6) 若 $u=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x\cdot\psi\left(\frac{y}{x}\right)$， 則 $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$。

18. 求下列函数的泰勒展开式($x_0=1$, $y_0=1$)(直到三阶为止)：

(1) $f(x,y)=\frac{x}{y}$； (2) $f(x,y)=x^y$。

19. 求下列函数的麦克劳林展开式：

(1) $f(x,y)=\ln(1+x+y)$， 到三阶为止；

(2) $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$， 到三阶为止；

(3) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$， 到二阶为止；

(4) $f(x,y)=e^x\cos y$， 到二阶为止。

20. 按二項式$(x-1)$和$(y+1)$的正整数幂，将函数 $f(x,y)=e^{x+y}$ 展开到四次項为止。

21. 設 $f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz$，按数 h，k 和 l 的正整数幂展开 $f(x+h, y+k, z+l)$。

22. 求下列函数的极值：

(1) $z=x^2-(y-1)^2$;

(2) $z=(x-y+1)^2$;

(3) $z=3axy-x^3-y^3 \quad (a>0)$;

(4) $z=\sin x+\cos y+\cos(x-y) \quad \left(0\leqslant {x \atop y}\leqslant \frac{\pi}{2}\right)$;

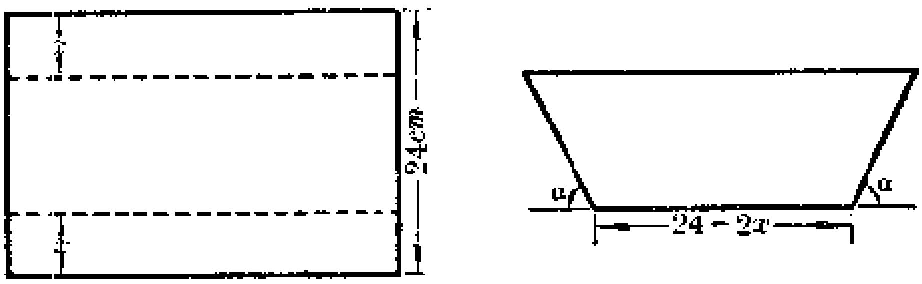
(5) $z=xy\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \quad (a,\ b>0)$;

(6) $z=\sin x\cdot\sin y\cdot\sin(x+y) \quad (0\leqslant {x \atop y}\leqslant\pi)$.

23. 証明函数 $z=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 有无穷多个极大值，但无极小值。

24. 在已知周长为 $2p$ 的一切三角形中求出面积最大的三角形。

25. 有一块铁片，宽 $b=24$ cm，要把它的两边折去做成一槽，使它的容积最大，求每边的倾斜角 α 和 x (如下图)。



第五章　隐函数存在定理，函数相关

一、隐函数存在定理

在第一篇中我們已經介紹了隐函数的概念。設有方程

$$F(x, y)=0,$$

若对某一范圍内（例如区間）每一个值 x，都有一个唯一确定的值 y 满足这个方程，那么 y 就是 x 的函数，这样所定义的函数 y 就是 x 的隐函数。因而产生了一个問題：对于方程 $F(x, y)=0$，如何来断定对某一范圍内的每一个值 x 确实存在一个唯一确定的值 y 满足这个方程呢？换句話說，在什么条件下，由方程 $F(x, y)=0$ 能够定义出一个隐函数呢？又如在本篇第一章中曾經給出了隐函数的求导法则，但在那时候总是假定由方程 $F(x, y)=0$ 所定义的函数 $y=f(x)$ 不仅存在，而且还可导，然而問題在于，这种可导的函数是否一定存在呢？首先，让我們来考察下面的簡单例子，例如单位圓（图 2-5-1）

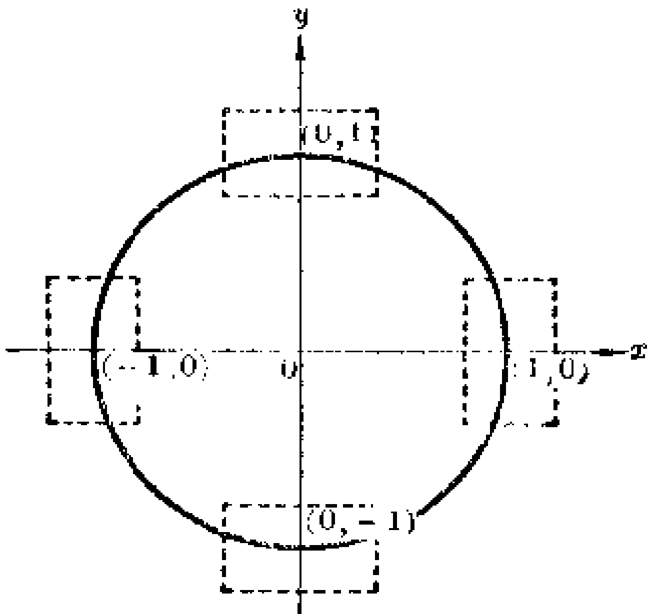


图 2-5-1

$$x^2+y^2=1.$$

容易知道，它在 $(0, 1)$ 这一点及其某个邻域内唯一地确定了一个函数：

$$y=\sqrt{1-x^2}.$$

这个函数在 $x=0$ 的近旁連續，并且有連續导数。

同样在$(0,-1)$这一点及其某个邻域内也唯一地确立了一个函数：

$$y=-\sqrt{1-x^2},$$

它在$x=0$的近旁連續，具有連續导数。但在$(-1,0)$和$(1,0)$这两点的任何邻域内却不具有这种性质了，这时对于$x=-1$的右邻域或$x=1$的左邻域内任何一个值x，将获得两个值y：

$$y=\sqrt{1-x^2},\quad y=-\sqrt{1-x^2},$$

因此唯一性遭到破坏。此外还容易知道，单位圓在$(-1,0)$点和$(1,0)$点处的切綫是垂直于x軸的，因此在这两点处不存在有限导数。

由此可見，方程$F(x,y)=0$只是对某些点及其某个邻域来說，存在唯一确定的可微函数，而对另外一些点却又不存在这样的函数。不过，在一般的情形下，不象单位圓这个例子那么容易看出来，那时我們只知道有这么一个二元函数$F(x,y)$，以及由它所給出的一个方程

$$F(x,y)=0.$$

至于由这个方程出发能否定义一个隐函数$y=f(x)$，以及这个函数将具有哪些性质，是預先不知道的。所以我們需要討論在什么条件下，在适合方程$F(x,y)=0$的点的某个邻域内存在这样的函数，它并且具有我們所需要的性质，例如連續性、可微性。

我們有如下的定理，它告訴我們，如何从二元函数$F(x,y)$的性质来断定由方程$F(x,y)=0$所确定的函数$y=f(x)$是存在的，并且这个函数还将具有某些特性。这个定理連同下面的几个定理，統称为隐函数存在定理。

定理1　設函数$F(x,y)$满足下面四个条件：

(1)　在区域$D(x_0-a<x<x_0+a,\ y_0-b<y<y_0+b)$上連續；

(2)　在区域D上具有对x和对y的連續偏导数；

(3)　$F(x_0,y_0)=0$；

(4) $F'_y(x, y)$在点(x_0, y_0)不等于零。

則：(1) 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内，由方程 $F(x, y)=0$ 能唯一确定 y 为 x 的函数 $y=f(x)$，并且 $y_0=f(x_0)$。換句話說，$y=f(x)$是被定义在点 x_0 的某个邻域 $O(x_0, \eta)$内，它滿足方程 $F(x, f(x))\equiv 0$，并且 $y_0=f(x_0)$；

(2) $y=f(x)$在 $O(x_0, \eta)$内連續；

(3) $y=f(x)$在 $O(x_0, \eta)$内具有連續导函数。

【証明】(图 2-5-2) 不妨假設 $F'_y(x_0, y_0)>0$ (若 $F'_y(x_0, y_0)<0$，可以同样地考虑)。

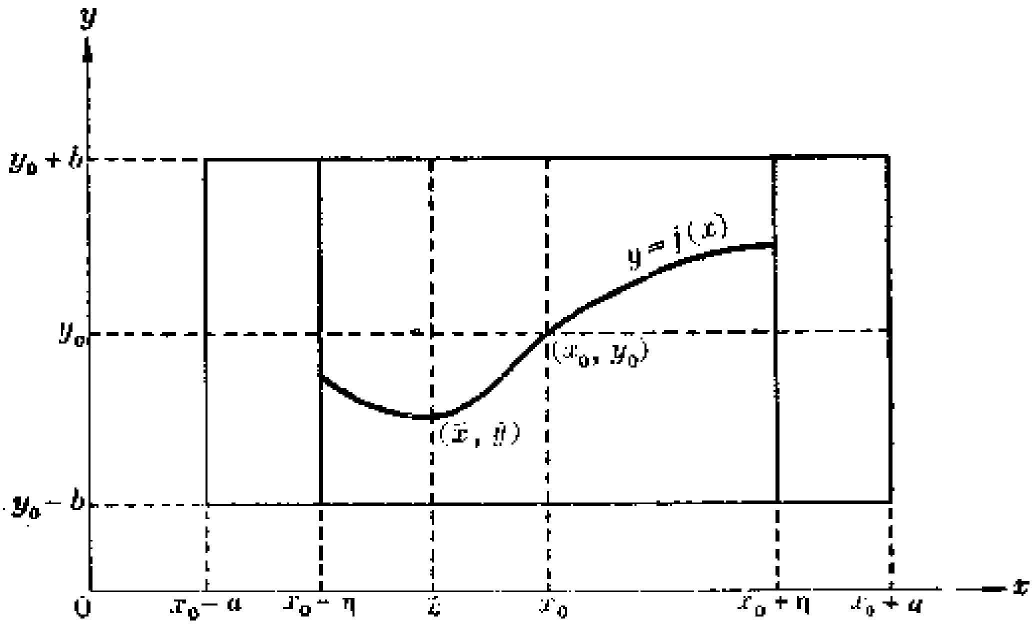


图 2-5-2

由 $F'_y(x, y)$的連續性，可知 F'_y 在点(x_0, y_0)的某一个邻域内也大于零。不妨就設在 D 上

$$F'_y(x, y)>0.$$

(否则，可取使 $F'_y(x, y)>0$ 的那个邻域与 D 的公共部分，再記这个公共部分为 D。)

由于 $F'_y(x, y)$在整个 D 上大于零，因此将 $x=x_0$ 固定，而让 y

在$[y_0-b,\ y_0+b]$内变化，仍旧成立

$$F'_y(x_0,\ y)>0 \quad (y_0-b\leqslant y\leqslant y_0+b).$$

这个式子表明了，当$x=x_0$固定时，一元函数$F(x_0,\ y)$在区間$[y_0-b,\ y_0+b]$上是y的严格增加函数。又因为假設

$$F(x_0,\ y_0)=0,$$

換句話說，$y=y_0$又是函数$F(x_0,\ y)$的零点，于是得到：

$$F(x_0,\ y_0-b)<0;\ F(x_0,\ y_0+b)>0.$$

現在来考虑x的連續函数

$$F(x,\ y_0-b)\text{和}F(x,\ y_0+b).$$

在x_0点存在邻域$O(x_0,\ \eta_1)$，使得在这个邻域内有

$$F(x,\ y_0-b)<0,$$

也存在邻域$O(x_0,\ \eta_2)$，使得在这个邻域内有

$$F(x,\ y_0+b)>0,$$

今取$\eta=\min(\eta_1,\ \eta_2)$，所以在邻域$O(x_0,\ \eta)$内同时成立

$$F(x,\ y_0-b)<0;\ F(x,\ y_0+b)>0.$$

以下，我們来說明，方程$F(x,\ y)=0$的确在$(x_0-\eta,\ x_0+\eta)$内定义了一个函数$y=f(x)$滿足定理所要求的条件。

首先，設$\bar{x}$为$O(x_0,\ \eta)$内任意一点，我們現在来定义$f(\bar{x})$.

由上面的討論知道

$$F(\bar{x},\ y_0-b)<0;\ F(\bar{x},\ y_0+b)>0.$$

再由y的函数$F(\bar{x},\ y)$的連續性，而它在y_0-b及y_0+b两点异号，所以在$(y_0-b,\ y_0+b)$内必存在一点$\bar{y}$，使

$$F(\bar{x},\ \bar{y})=0.$$

又因为$F'_y(x,\ y)>0$，所以$F'_y(\bar{x},\ y)>0$，也即$F(\bar{x},\ y)$是y的严格增加函数，因此使得$F(\bar{x},\ y)=0$的$\bar{y}$是唯一的。这也就是說，对于邻域$O(x_0,\ \eta)$内任意一个值x，由方程$F(x,\ y)=0$总能相应地获得唯一确定的值y，这就是函数关系，記它为$y=f(x)$，并且

满足

$$F(x, f(x)) \equiv 0.$$

这样，由方程 $F(x, y)=0$ 在 $O(x_0, \eta)$ 上完全确定了一个函数 $y=f(x)$.

其次，証明 $y=f(x)$ 在 $O(x_0, \eta)$ 内連續。

設 x_1 是 $O(x_0, \eta)$ 内任意一点，記 $y_1=f(x_1)$，对任意給定充分小的 $\varepsilon>0$ 作两根平行綫：

$$y=y_1+\varepsilon \text{ 和 } y=y_1-\varepsilon,$$

由剛才的証明可知

$$F(x_1, y_1+\varepsilon)>0, \quad F(x_1, y_1-\varepsilon)<0.$$

又由 $F(x, y)$ 的連續性可知，一定存在 x_1 的某一邻域 $O(x_1,\delta)$，使得在 $O(x_1, \delta)$ 内成立着

$$F(x, y_1+\varepsilon)>0 \text{ 和 } F(x, y_1-\varepsilon)<0.$$

因而对 $O(x_1, \delta)$ 内任何一点 x，将它固定而考慮 y 的函数 $F(x,y)$，它是 y 的严格增加的連續函数，并且

$$F(x, y_1-\varepsilon)<0, \quad F(x, y_1+\varepsilon)>0.$$

于是在 $(y_1-\varepsilon, y_1+\varepsilon)$ 内存在唯一的一个零点 y:

$$F(x, y)=0.$$

这就表示，对于邻域 $O(x_1, \delta)$ 内的任何 x，它所对应的函数值 y，成立着

$$|y-y_1|<\varepsilon.$$

正是我們所要証明的連續性。

最后，証明函数 $y=f(x)$ 在 $O(x_0, \eta)$ 内具有連續导数。

設 $\bar{x}$, $\bar{x}+\Delta x$ 是 $O(x_0, \eta)$ 内的任意两点，記

$$\bar{y}=f(\bar{x}), \quad \bar{y}+\Delta y=f(\bar{x}+\Delta x).$$

由函数 $y=f(x)$ 的定义可知：

$$F(\bar{x}, \bar{y})=0, \quad F(\bar{x}+\Delta x, \bar{y}+\Delta y)=0.$$

所以

$$
\begin{aligned}
0&=F(\bar{x}+\Delta x,\ \bar{y}+\Delta y)-F(\bar{x},\ \bar{y})\\
&=F(\bar{x}+\Delta x,\ \bar{y}+\Delta y)-F(\bar{x}+\Delta x,\ \bar{y})+F(\bar{x}+\Delta x,\ \bar{y})-F(\bar{x},\ \bar{y})\\
&=F'_y(\bar{x}+\Delta x,\ \bar{y}+\theta_1\Delta y)\Delta y+F'_x(\bar{x}+\theta_2\Delta x,\ \bar{y})\Delta x.
\end{aligned}
$$

这里 $0<\theta_1<1$, $0<\theta_2<1$. 所以

$$
\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F'_x(\bar{x}+\theta_2\Delta x,\ \bar{y})}{F'_y(\bar{x}+\Delta x,\ \bar{y}+\theta_1\Delta y)}.
$$

由于 $y=f(x)$ 和 $F'_x(x,\ y)$, $F'_y(x,\ y)$ 的連續性以及 $F'_y(x,\ y)\neq 0$, 所以对上式的两端关于 $\Delta x\to 0$ 取极限(这时必有 $\Delta y\to 0$), 得

$$
f'(\bar{x})=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F'_x(\bar{x},\ \bar{y})}{F'_y(\bar{x},\ \bar{y})},
$$

并且知道, $f'(x)$ 在 $O(x_0,\ \eta)$ 内連續。到此定理 1 全部証明完毕。

我們来分析一下定理中的条件(4)在証明过程中的作用。条件(4)是保証了存在点 x_0 的一个邻域, 对这个邻域中的任何固定的 x, 函数 $F(x,\ y)$ 是 y 的严格单调函数, 然后再由这个性质以及定理的条件(1)和(3), 証明了隐函数的存在性、唯一性及連續性, 于是知道, 如果只給出条件(1), (3)以及給出"当 x 固定时, $F(x,\ y)$ 是 y 的严格单調函数", 那么隐函数的存在性、唯一性及連續性仍成立, 这就是下面的定理(参見习題 1)。

定理　若函数 $F(x,\ y)$ 滿足:

(a) 在 $D(x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a,\ y_0-a\leqslant y\leqslant y_0+a)$ 上連續;

(b) $F(x_0,\ y_0)=0$;

(c) 对 $[x_0-a,\ x_0+a]$ 上任何固定的 x, 函数 $F(x,\ y)$ 对于 y 是严格单調的。

則: (1) 在点 $(x_0,\ y_0)$ 的某一邻域内, 由方程 $F(x,\ y)=0$ 能唯一确定 y 是 x 的函数 $y=f(x)$, 它定义在 x_0 的某邻域 $O(x_0,\ \eta)$ 上, 亦就是在 $O(x_0,\ \eta)$ 内 $F(x,\ f(x))\equiv 0$, 并且 $y_0=f(x_0)$;

(2) $y=f(x)$在$O(x_0, \eta)$内連續。

推論　若函数$y=f(x)$在$[a, b]$上連續且严格单調,則存在連續的反函数。

这个推論在第一篇中已經給出,这里可以应用上面的定理,相当容易地获得推論,为此只要考察二元函数$F(x, y)=f(x)-y$,它滿足条件(a),(b)以及(c):对$f(x)$的值域內的任何固定的y,函数$F(x, y)$为x的严格单調函数,于是按定理,从方程$F(x, y)=f(x)-y=0$中能够将x解为y的函数$x=\varphi(y)$,它是唯一确定的,并且連續。

[例1]　考察方程　　$x^2+y^2=1$.

由于这个方程的左端$F(x,y)=x^2+y^2$在整个二維空間連續,它的偏导数$F_x=2x$, $F_y=2y$亦連續。当$y\neq0$时$F_y\neq0$,所以在任何滿足上述方程的点(x, y), $y\neq0$的某一邻域內,由方程唯一确定一个具有連續导数的函数$y=f(x)$. 例如在点$(0, 1)$, $(0, -1)$,以及$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$的某邻域內,隐函数是存在的,事实上,我們已經知道,这时由方程确实能解得

$$y=\sqrt{1-x^2}\quad\left(\text{在点}(0, 1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\text{的某邻域內}\right),$$

$$y=-\sqrt{1-x^2}\quad(\text{在点}(0, -1)\text{的某邻域內}),$$

并且具有連續导数。但在点$(1, 0)$和$(-1, 0)$,由于$F'_y=0$,不滿足定理1的条件(4),所以不能肯定在这两点的某邻域內亦存在隐函数。事实上我們也已知道,方程在这两点的任何邻域內不存在唯一的具有連續导数的解$y=f(x)$.

以上所叙述的問題可以推广到多个变量的情形,为此代替二元函数而給出了一个任意多个变量的函数$F(x, y, z, \cdots, u, v)$,我們提出这样一个問題:是否存在一个唯一确定的函数

$$v=f(x, y, z, \cdots, u),$$

它在这些变量 $x, y, z, \cdots, u$ 取值的某一区域上满足方程

$$F(x, y, z, \cdots, u, v)=0.$$

也就是有

$$F[x, y, z, \cdots, u, f(x, y, z, \cdots, u)]\equiv 0.$$

又如果有这样一个函数存在，这个函数将具有何种性质？类似地有下面的隐函数存在定理，証明的方法和定理 1 也是一样的，只不过更繁复一些罢了，所以只把这个定理叙述如下而略去其証明。

定理 2　若函数 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n; y)$ 满足：

(1) 在长方体区域 $D(x_i^{(0)}-a_i\leqslant x_i\leqslant x_i^{(0)}+a_i\ \ (i=1, 2, \cdots, n))$ 上連續；

(2) 在 D 上具有对一切变元的連續偏导数；

(3) $F(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}; y^{(0)})=0$；

(4) $F'_y(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}; y^{(0)})\neq 0$.

則：(1) 在点 $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}, y^{(0)})$ 的某个邻域内，由方程 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n; y)=0$ 能确定 y 为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数 $y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，并且 $y^{(0)}=f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$。也就是說，函数 $y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 被定义在点 $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$ 的某个邻域 $\varDelta$ 内，满足：$F[x_1, x_2, \cdots, x_n, f(x_1, x_2, \cdots, x_n)]\equiv 0$，并且 $y^{(0)}=f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$；

(2) $y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 $\varDelta$ 内連續；

(3) $y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 $\varDelta$ 内对各个变元有連續偏导数。

下面，我們再来討論由联立方程組所引起的隐函数存在問題。例如从两个方程

$$\begin{cases} F(x, y, z, u, v)=0, \\ G(x, y, z, u, v)=0 \end{cases}$$

中，是否可以把其中某两个变元解为其他变元的函数呢？如果可以

的話，这些函数又将具有什么性质呢？

首先，介紹一下函数行列式的概念。

設有方程組

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ y_2=f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ y_n=f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n), \end{cases}$$

在某一个 n 維区域中，組中每一个函数具有对一切变元的偏导数，則称行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

为这个方程組的函数行列式，也称为雅可比(Jacobi)式，記它为

$$\frac{D(f_1, f_2, \cdots, f_n)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \text{ 或 } \frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}.$$

对写成隐式的方程組

$$F_i(x_1, x_2, \cdots, x_m; y_1, y_2, \cdots, y_n)=0 \quad (i=1, 2, \cdots, n),$$

它的关于变元 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的雅可比式为

$$\frac{D(F_1, F_2, \cdots, F_n)}{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

雅可比行列式有一些重要性质将在本节二内給出。

为簡单起見，我們先給出方程組

$$\begin{cases} F(x, y, u, v)=0, \\ G(x, y, u, v)=0 \end{cases}$$

的隐函数存在定理。

定理3 若函数 $F(x, y, u, v)$ 和 $G(x, y, u, v)$ 滿足：

(1) 在点 $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 的某邻域 D 内連續；

(2) 在 D 内，F 和 G 对各个变元有連續偏导数；

(3) $F(x_0, y_0, u_0, v_0)=0$, $G(x_0, y_0, u_0, v_0)=0$;

(4) $J=\dfrac{D(F, G)}{D(u, v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$ 在 P_0 点不等于零。

则：(1) 在点 P_0 的某个邻域内，由方程組 $F=0$, $G=0$ 能确定唯一一組函数 $u=f(x, y)$, $v=g(x, y)$，也就是它們在 (x_0, y_0) 的某个邻域 $\varDelta$ 内滿足：$F[x, y, f(x, y), g(x, y)]\equiv 0$, $G[x, y, f(x, y), g(x, y)]\equiv 0$，并且 $u_0=f(x_0, y_0)$, $v_0=g(x_0, y_0)$；

(2) $u=f(x, y)$ 和 $v=g(x, y)$ 在 $\varDelta$ 内連續；

(3) $u=f(x, y)$ 和 $v=g(x, y)$ 在 $\varDelta$ 内具有关于 x 和 y 的連續偏导数，并且

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{D(F, G)}{D(x, v)}, \quad \frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{D(F, G)}{D(u, x)},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{D(F, G)}{D(y, v)}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{D(F, G)}{D(u, y)}.$$

現在將定理的証明叙述如下：

条件(4)表示 F_u 和 F_v 中至少有一个在 P_0 点不等于零，不妨設 $F_v(x_0, y_0, u_0, v_0)\neq 0$，那么由定理2，可以在点 P_0 的某个邻域内把 v 从 $F(x, y, u, v)=0$ 中解出来

$$v=\varphi(x, y, u).$$

并且 $v_0=\varphi(x_0, y_0, u_0)$，这个解 φ 还在点 (x_0, y_0, u_0) 的某个邻域内是唯一的，具有对 x, y 和 u 的連續偏导数。而 φ_u 可以从下面的方法中求得：关于 u 来微分下面的方程：

$$F(x, y, u, v)=0$$

得到

$$F_u+F_v\varphi_u=0,$$

所以

$$\varphi_u=-\frac{F_u}{F_v}.$$

将 $v=\varphi(x, y, u)$ 代入函数 $G(x, y, u, v)$ 中，得到 $G(x, y, u, \varphi(x, y, u))\equiv\psi(x, y, u)$. 由于

$$\psi_u=G_u+G_v\varphi_u=\frac{G_uF_v-G_vF_u}{F_v}=-\frac{J}{F_v},$$

故由假設知道 $\psi_u(x_0, y_0, u_0)\neq 0$. 按照定理 2, 在点 (x_0, y_0, u_0) 的某邻域内，能从方程 $G(x, y, u, \varphi)\equiv\psi(x, y, u)=0$ 中将 u 解出来：

$$u=f(x, y).$$

它在 (x_0, y_0) 的某个邻域内对 x 和 y 有連續偏导数，并且 $u_0=f(x_0, y_0)$.

再将 $u=f(x, y)$ 代入 φ 中去，得 $v=\varphi(x, y, f(x, y))\equiv g(x, y)$，那么，$g(x_0, y_0)=\varphi(x_0, y_0, u_0)=v_0$. 于是这一对函数

$$u=f(x, y),\ v=g(x, y)$$

即为所求。驗証从略。

此外将方程組

$$\begin{cases} F(x, y, u, v)=0, \\ G(x, y, u, v)=0 \end{cases}$$

两端对 x 求导，并注意到 $u=f(x, y)$, $v=g(x, y)$，有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}+\dfrac{\partial G}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial G}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial x}=0. \end{cases}$$

解得　$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{D(F,G)}{D(x,v)},\quad \frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{D(F,G)}{D(u,x)}.$$

如果将方程組两端对 y 求导，就可解得 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial g}{\partial y}$，到此便証明了定理。

对于更一般的方程組，我們也有同样的定理，它可以用数学归納法来証明，这里我們只叙述其結果。

定理 4　若有 m 个函数

$$F_i(x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_m)\quad (i=1, 2, \cdots, m)$$

满足：(1) 在点 $D_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}; y_1^{(0)}, \cdots, y_m^{(0)})$ 的某邻域 D 内連續；

(2) 在 D 内具有对一切变元的連續偏导数；

(3) $F_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}; y_1^{(0)},\cdots, y_m^{(0)})=0\quad (i=1,2,\cdots,m)$；

(4)

$$J=\frac{D(F_1,F_2,\cdots,F_m)}{D(y_1, y_2, \cdots, y_m)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{vmatrix}$$ 在 P_0 点不等于零。

則：(1) 在 P_0 点的某邻域内，由方程組 $F_i(x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_m)=0\ (i=1, 2,\cdots, m)$，能唯一确定一組函数 $y_i=f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)\ (i=1, 2, \cdots, m)$，它們定义在 $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$ 点某邻域 Δ 内，满足 $F_i(x_1, x_2, \cdots, x_n; f_1, f_2, \cdots, f_m)\equiv 0$，并且有 $y_i^{(0)}=f_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})\ (i=1, 2, \cdots, m)$；

(2) 这一組函数 f_i 在 Δ 内連續；

(3) 这一組函数 f_i 在 Δ 内具有对各个变元的連續偏导数。

最后，为了求出 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\ (i=1, 2,\cdots, m; j=1, 2,\cdots, n)$，可以

将方程組

$$F_i(x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_m)=0 \quad (i=1, 2, \cdots, m)$$

两端对 x_j 求导,得到含有未知量 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ 的一个 m 阶綫性代数方程組:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}+\frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_j}+\frac{\partial F_i}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_j}+\cdots+\frac{\partial F_i}{\partial y_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_j}=0$$
$$(i=1, 2, \cdots, m).$$

而这个綫性代数方程組的行列式正是雅可比式 J。由于 $J\neq0$,所以可从这 m 个方程中求出唯一一組解 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $(i=1, 2, \cdots, m)$。

[例 2] 从方程組

$$\begin{cases} x+y+z+u+v=1, \\ x^2+y^2+z^2+u^2+v^2=2 \end{cases}$$

中求出 u_x, v_x 及 u_{x^2}, v_{x^2}。

可以驗証方程組滿足隐函数存在定理的一切条件。現在将 u, v 看作是 x, y, z 的函数,将方程組对 x 求偏导数:

$$\begin{cases} 1+u_x+v_x=0, \\ x+u\cdot u_x+v\cdot v_x=0. \end{cases} \qquad (*)$$

解得

$$u_x=\frac{x-v}{v-u}, \quad v_x=\frac{u-x}{v-u}.$$

再将方程組(*)对 x 求偏导数,得

$$\begin{cases} u_{x^2}+v_{x^2}=0, \\ 1+u_x^2+u\cdot u_{x^2}+v_x^2+v\cdot v_{x^2}=0. \end{cases}$$

解得

$$u_{x^2}=\frac{1+u_x^2+v_x^2}{v-u}=\frac{1+\left(\dfrac{x-v}{v-u}\right)^2+\left(\dfrac{u-x}{v-u}\right)^2}{v-u},$$

$$v_{x^2}=\frac{1+u_x^2+v_x^2}{u-v}=\frac{1+\left(\dfrac{x-v}{v-u}\right)^2+\left(\dfrac{u-x}{v-u}\right)^2}{u-v}.$$

二、雅可比行列式的性质

雅可比行列式不仅在隐函数存在定理中起着重要作用，而且在其他不少分析問題和应用中,也是經常出現的,它是一个重要工具。所以有必要熟悉它的性质。

性质 1　設函数

$$y_i=f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

定义于某一 n 維区域 D 中，且有关于一切变元的連續偏导数。又設

$$x_i=\varphi_i(t_1, t_2, \cdots, t_n) \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

定义于某一 n 維区域 $\tilde{D}$ 中，且有关于一切变元的連續偏导数。又当点 $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 在 $\tilde{D}$ 中变动时，对应的点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 不越出区域 D。于是就可以借助中間变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 而把 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 看为 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 的复合函数。

这时，y_i 关于 t_j 的雅可比式与 y_i 关于 x_i 以及 x_i 关于 t_j 的雅可比式之間有着下面的关系：

$$\frac{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{D(t_1, t_2, \cdots, t_n)}=\frac{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)}\cdot\frac{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{D(t_1, t_2, \cdots, t_n)}.$$

这个性质，可以看为是复合函数 $y=f(x)$, $x=\varphi(t)$ 求导公式 $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$ 的拓广。

【証明】　为簡便起見,以 $n=2$ 証明这个性质,当 $n>2$ 时可以完全同样証明。按复合函数的偏导数公式有

$$\frac{D(y_1, y_2)}{D(t_1, t_2)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial t_2}\\ \frac{\partial y_2}{\partial t_1} & \frac{\partial y_2}{\partial t_2}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2}+\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2}+\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2}\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} \cdot \frac{D(x_1, x_2)}{D(t_1, t_2)}.$$

这就是所要証明的結論。

性质 2 設函数

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

在某 n 維区域 D 中具有对各变元的連續偏导数，并且它們的反函数

$$x_j = \varphi_j(y_1, y_2, \cdots, y_n) \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

存在，具有对各变元的連續偏导数。那么

$$\frac{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \cdot \frac{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)} = 1.$$

这个性质可以看作反函数导数公式 $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$ 的拓广。

【証明】 既然 $x_j = \varphi_j(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 是 $y_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 的反函数，于是可以将 y_i 看作借助于中間变量 x_j 而为 y_i 的复合函数，即：

$$y_i = f_i(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n) \equiv y_i.$$

再按照性质 1，得：

$$1 = \frac{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)} = \frac{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \cdot \frac{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)}.$$

（注） 当 $J = \frac{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \neq 0$ 时，由隐函数存在定理，$y_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 的反函数一定存在。这时性质 2 亦可写为

$$\frac{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)} = \frac{1}{\frac{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)}}.$$

在第三篇重积分的計算（换元法则）中，将叙述雅可比行列式的几何意义。

[例3]　由直角坐标(x, y)化为极坐标(r, θ)的变换为

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta. \end{cases}$$

$x'_r=\cos\theta$, $x'_\theta=-r\sin\theta$, $y'_r=\sin\theta$, $y'_\theta=r\cos\theta$. 它們在任何点(r, θ)处連續，并且雅可比式

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=r.$$

由性质2知道，除极点$r=0$外，变换的逆变换存在，并且它的雅可比式为

$$\frac{D(r, \theta)}{D(x, y)}=\frac{1}{\dfrac{D(x, y)}{D(r, \theta)}}=\frac{1}{r}.$$

三、函数相关

考察函数組

$$y_i=f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (i=1, 2, \cdots, m),$$

它們在n維空間的某一个区域D中有定义。如果其中有一个函数的数值，例如y_j，可以由其余函数的数值$y_1, y_2, \cdots, y_{j-1}, y_{j+1}, \cdots, y_m$单值地确定时，就称函数$y_j$在区域$D$中和其余的函数有关，或称函数組$y_1, y_2, \cdots, y_m$在$D$中函数相关。

更确切地說，对n維区域D中任何一点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，由函数組（$m-1$个函数）

$$y_i=f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (i=1, 2, \cdots, j-1, j+1, \cdots, m),$$

相应地得到$m-1$維空間內的一点$(y_1, y_2, \cdots, y_{j-1}, y_{j+1}, \cdots, y_m)$. 于是对区域$D$就相应地得到$m-1$維空間內的一个点集$D'$. 如果存在一个函数$\varphi$，它的定义域是$m-1$維空間上的某一区域$E$，并且$E$包含了$D'$，使得

$$y_j=\varphi(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{j-1},\ y_{j+1},\ \cdots,\ y_m)$$

成立，也就是在区域 D 上成立着

$$y_j\equiv\varphi[f_1(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n),\ f_2(x_1,\ \cdots,\ x_n),\ \cdots,$$
$$f_{j-1}(x_1,\ \cdots,\ x_n),\ f_{j+1}(x_1,\ \cdots,\ x_n),\ \cdots,\ f_m(x_1,\ \cdots,\ x_n)],$$

則称函数組 $y_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 在 D 上函数相关。

为了能够应用微分学来討論函数的相关性，我們总假設函数 φ 在 $m-1$ 維区域 E 内具有对一切变元的連續偏导数。

如果在区域 D 内以及在 D 的任何部分区域内都不存在这样的函数 φ，使得 $y_j=\varphi(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{j-1},\ y_{j+1},\ \cdots,\ y_m)$ 在所考虑的区域内为恒等式，則称函数組 $y_i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m)$ 在 D 上函数独立。也就是說，只有在 D 内以及在 D 的任何部分区域内，函数組皆不函数相关时才称为在 D 上函数独立。

[例 4]　函数組

$$u=x_1+x_2+x_3+x_4,$$
$$v=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2,$$
$$w=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1+x_2x_4+x_1x_3$$

在整个四維空間上函数相关。这是因为存在函数

$$\varphi(t_1,\ t_2)=\frac{1}{2}(t_1^2-t_2),$$

使得

$$w=\varphi(u,\ v)=\frac{1}{2}(u^2-v)$$

在整个四維空間 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ 内成为恒等式。

[例 5]　常数和任何函数皆函数相关。亦即，若一組函数 $y_i=f_i(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 定义于区域 D 上，其中有一个函数在 D 内为常数，設为 $y_1=c$，那么这組函数在 D 内函数相关。

这是因为，只要取函数 φ 为

$$\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_{m-1}) \equiv c,$$

就有

$$y_k - \varphi(y_1, y_2, \cdots, y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_m) \equiv c$$

在 D 内恒成立。

現給出判别一組函数是否相关或独立的条件，为此需引進函数組的雅可比函数矩陣的概念。对于函数組

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (i=1, 2, \cdots, m),$$

我們称矩陣(如果陣中每一个元皆存在的話)

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

为函数組 y_i $(i=1, 2, \cdots, m)$ 的雅可比矩陣。

由雅可比矩陣的元素所組成的在 D 中不恒等于零的行列式的最高阶数称为这个矩陣的秩。由此可見，如果雅可比矩陣的秩是 r $(r \leqslant m, r \leqslant n)$，那么由这个陣的元素所組成的 r 阶行列式中至少有一个在 D 内不恒为零，而一切高于 r 阶的行列式(假若有的話)皆恒为零。

現在我們来考慮函数組

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (i=1, 2, \cdots, m) \qquad (*)$$

函数独立和函数相关的条件。假設这个函数組在区域 D 内具有对一切变元的連續偏导数。

定理 5 若 $m \leqslant n$，函数組(*)的雅可比矩陣中有一个 m 阶行列式在 D 内不为零，也就是說，在 D 内无零点。例如不妨設

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0, \text{ 在 } D \text{ 内成立,} \tag{1}$$

則函数組(*)在 D 内是函数独立的。

【証明】 假設函数組(*)在 D 的某个部分区域 D_0 内为函数相关,亦即存在 $m-1$ 元函数 φ,使得

$$y_m = \varphi(y_1, y_2, \cdots, y_{m-1})$$

在 D_0 内恒成立。

将它关于 x_i $(i=1, 2, \cdots, m)$ 分别求导,得

$$\frac{\partial y_m}{\partial x_i} = \frac{\partial y_m}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial y_m}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial y_m}{\partial y_{m-1}}\cdot\frac{\partial y_{m-1}}{\partial x_i}.$$

由上面的式子便知道,行列式(1)的最后一行 $\frac{\partial y_m}{\partial x_1}, \frac{\partial y_m}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial y_m}{\partial x_m}$ 可以由前 $n-1$ 行綫性表出,于是行列式(1)在 D_0 内必等于零。这与已知条件矛盾,便証明了函数組(*)在 D 内函数独立。

定理 6 若(i) 函数組(*)的雅可比矩陣在 D 内的秩为 $r \geqslant 1$,

(ii) 雅可比矩陣在点 $M_0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \in D$ 达到秩 r. 亦即存在一个 r 阶行列式,不妨設它为

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_r} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_r}{\partial x_1} & \frac{\partial y_r}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_r}{\partial x_r} \end{vmatrix} \neq 0, \text{ 在 } M_0 \text{ 点成立,}$$

則在点 M_0 的某个邻域内成立:

(i) $y_1, y_2, \cdots, y_r$ 函数独立，

(ii) 若 $m>r$，那么函数組(*)为函数相关。

【証明】 第一个結論由定理1立即可以得到。因为由 $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$ 的連續性 $(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$ 必存在点 M_0 的一个邻域，而在这个邻域内

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_r} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_r}{\partial x_1} & \frac{\partial y_r}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_r}{\partial x_r} \end{vmatrix} \neq 0.$$

再将定理5应用于函数組 $y_1, y_2, \cdots, y_r$，使知道它們在 M_0 的这个邻域内为函数独立的。

以下証明第二个結論，为簡便起見，仅以 $m=2, n=3, r=1$ 的情形来証明，至于一般的情形，其証明方法是一样的，不过更为复杂些。

設方程組 $u=f(x, y, z)$，$v=g(x, y, z)$，其雅可比矩陣 $\begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix}$ 在 D 内的秩为1，而在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 点达到1，不妨設 $f_x(x, y, z)$ 在 M_0 点不为零，那么按隐函数存在定理，从方程

$$u-f(x, y, z)=0$$

中，能够在 M_0 点的某个邻域内，确定 x 为 u, y, z 的单值函数，記这个函数为

$$x=\varphi(u, y, z),$$

从而
$$u\equiv f[\varphi(u, y, z), y, z].$$

这一恒等式表明了，函数 f 仅与 u 有关而与 y, z 无关，因此将它对 y 和 z 分別求导，得

$$f_x\varphi_y+f_y=0,$$

$$f_x\varphi_z+f_z=0,$$

于是有
$$\varphi_y=-\frac{f_y}{f_x},\quad \varphi_z=-\frac{f_z}{f_x}.$$

另一方面，将 $x=\varphi(u, y, z)$ 代入 v，得到

$$v=g(x, y, z)=g[\varphi, y, z]\equiv G(u, y, z).$$

考虑 G 对 y, z 的导数：

$$G_y=g_x\varphi_y+g_y=\frac{f_xg_y-f_yg_x}{f_x};$$

$$G_z=g_x\varphi_z+g_z=\frac{f_xg_z-f_zg_x}{f_x}.$$

由于矩阵$\begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix}$的秩为 1 以及 f_x 在 M_0 点非零，于是得到

$$G_y=0,\quad G_z=0.$$

这就説明函数 G 与 y, z 无关而仅与 u 有关，也就是

$$v=G(u).$$

这样便証明了函数 u 和 v 在 M_0 的某一邻域内为函数相关。

[例 6]　函数

$$u=x+y+z,$$

$$v=x-y-z$$

的雅可比矩陣 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 中有一个二阶行列式无零点，所以这两个函数是函数独立的。

[例 7]　設两个函数：

$$y_1=\begin{cases} x_1^3x_2^2, & 当\ x_1\geqslant 0, \\ 0, & 当\ x_1<0, \end{cases}$$

$$y_2=\begin{cases} x_1^2x_2^3, & 当\ x_2\geqslant 0, \\ 0, & 当\ x_2<0. \end{cases}$$

容易驗証，它們的雅可比行列式在第一象限内无零点，在第二和第

四象限内为雅可比陣的秩1，在第三象限内为零，所以只有在第一象限内它們是函数独立的。

习　題

1. 若在隐函数存在定理中条件改为：

(1) 在区域 $D:(x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a,\ y_0-b\leqslant y\leqslant y_0+b)$ 上連續；

(2) $F(x_0, y_0)=0$；

(3) 当 x 固定时，函数 $F(x, y)$ 是 y 的单調函数；

則可得到什么样的討論，試証明之。

2. 函数 $F(x, y)=y^2-x^2(1-x^2)=0$ 在哪些点近旁可唯一地决定单值連續，且有連續导数的函数 $y=y(x)$。

3. 若 $F(x, y, z)=z^2-2x-y+4$，試决定 $z=\varphi(x, y)$，使 $\varphi(0, 0)>0$，且适合 $F(x, y, \varphi(x, y))=0$。

4. 証明有唯一可导的函数 $y=y(x)$ 滿足方程 $\sin y+\operatorname{sh} y=x$，并求出导数 $y'(x)$。

5. 設函数 $F(x, y, z)$ 有二阶連續偏导数，由方程 $F(x, y, z)=0$ 可确定隐函数 $z=f(x, y)$，討論 $z=f(x, y)$ 极値的充要条件 $(F'_z\neq0)$。

6. 求由下列方程所确定的隐函数 $z=f(x, y)$ 的极値：

(1) $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$；

(2) $x^2+2y^2+z^2+8xy-z+8=0$。

7. 对下列方程确定函数 $y=y(x)$，求出 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$：

(1) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$；　　(2) $\ln(x+y)+xy=0$；

(3) $x^y=y^x\quad(x\neq y)$。

8. 对下列方程确定的函数 $z=z(x, y)$，求出一阶及二阶偏导数：

(1) $x+y+z=e^z$；　　(2) $x\cdot y\cdot z=x+y+z$；

(3) $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$。

9. 对下列方程所确定的函数，求出全微分或偏导数：

(1) $f(x+y, y+z, z+x)=0$，求 dz；

(2) $z=f(xz, z-y)$，求 dz；

(3) $F(x-y, y-z, z-x)=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$；

(4) $F(x, x+y, x+y+z)=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

10. 設由方程 $z=x+y\cdot\varphi(z)$ 确定函数 $z=z(x, y)$，設 $1-y\varphi'(z)\neq 0$，証明

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}.$$

11. 証明由方程 $ax+by+cz=\Phi(x^2+y^2+z^2)$ 所定义的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay$，其中 $\Phi(u)$ 是 u 的可微函数，a，b，c 为常数。

12. 設 D 是点 P_0：$(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$ 的邻域，若：

(1) $F(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)=0$，$G(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)=0$；

(2) F，G 关于一切变量的偏导数在 D 中連續；

(3) $J=\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$ 在 p_0 点不为0；

則在 (x_0, y_0, z_0) 的邻域 R 內存在唯一的一对函数

$$u=f(x, y, z);\ v=g(x, y, z)\quad 满足：$$

a) $u_0=f(x_0, y_0, z_0)$，$v_0=g(x_0, y_0, z_0)$，

b) $F(x, y, z, f, g)\equiv 0$，$G(x, y, z, f, g)\equiv 0$，

c) $u=f(x, y, z)$，$v=g(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的邻域 R 內有对一切变量的偏导数，且

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{D(F,G)}{D(x,v)},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{D(F,G)}{D(y,v)},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{1}{J}\frac{D(F,G)}{D(z,v)},$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{D(F,G)}{D(u,x)},\quad \frac{\partial g}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{D(F,G)}{D(u,y)},\quad \frac{\partial g}{\partial z}=-\frac{1}{J}\frac{D(F,G)}{D(u,z)}.$$

13. 在 Oxy 平面上确定区域，使方程組

$$x=u+v,\ y=u^2+v^2,\ z=u^3+v^3\quad (u, v\ 取一切可能的实数值)$$

定义 z 为 x，y 的函数 $z=z(x, y)$，并求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

14. 設 $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 是 x 的連續可导函数，且

$$G_i(x_1, \cdots, x_n)=F_i(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \cdots, \varphi_n(x_n)),$$

証明 $$\frac{\partial(G_1, G_2, \cdots, G_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}=J(\varphi_1(x_1), \cdots, \varphi_n(x_n))\prod_{i=1}^{n}\varphi_i'(x_i),$$

其中記 $$\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\frac{\partial(F_1, \cdots, F_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)},$$

$$\prod_{i=1}^{n}\varphi_i'(x_i)=\varphi_1'(x_1)\cdot\varphi_2'(x_2)\cdot\cdots\cdot\varphi_n'(x_n).$$

15. 求下列方程組所确定的函数的导数或偏导数:

(1) $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x\cdot y\cdot z=1, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$;

(2) $\begin{cases} x+y=u+v, \\ \frac{x}{y}=\frac{\sin u}{\sin v}, \end{cases}$ 求 du, dv;

(3) $\begin{cases} xu+yv=0, \\ yu+xv=1, \end{cases}$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$;

(4) $\begin{cases} x=\cos\theta\cos\varphi, \\ y=\cos\theta\sin\varphi, \\ z=\sin\theta, \end{cases}$ 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$;

(5) $\begin{cases} u=f(u\cdot x, v+y), \\ v=g(u-x, v^2\cdot y), \end{cases}$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$;

(6) $\begin{cases} x=\varphi(u, v, w), \\ y=\psi(u, v, w), \\ z=\chi(u, v, w), \end{cases}$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$.

16. 設 $x=e^t$, 变換方程 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$.

17. 設 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 变換方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=y+kx(x^2+y^2), \\ \frac{dy}{dt}=-x+ky(x^2+y^2) \end{cases}$$ 为极坐标方程。

18. 設 $x=e^u\cos\theta$, $y=e^u\sin\theta$, 变換方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

19. 設 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 則 $f(x, y)=\Phi(r, \theta)$, 用 Φ 关于 r, θ 的偏导数来表示 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

20. 設　$x=e^\xi$,　$y=e^\eta$,　变換方程　$ax^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2bxy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+cy^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

(a, b, c 为常数)。

21. 設 $\xi=x$, $\eta=x^2+y^2$, 变换方程 $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

22. 設 $\xi=x$, $\eta=y-x$, $\zeta=z-x$, 变换方程 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

23. 設綫性变换 $\xi=x+\lambda_1 y$, $\eta=x+\lambda_2 y$, 現在要把方程

$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ (A, B, C 为常数，且 $AC-B^2<0$)

变换为 $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$，証明 λ_1，λ_2 为方程 $C\lambda^2+2B\lambda+A=0$ 的两个相异实根。

24. 証明拉普拉斯方程 $\Delta w\equiv\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}=0$ 在任意的常态变换：

$x=\varphi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$ $\left(\text{它們滿足 } \frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial\psi}{\partial v}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)$ 下形狀保持不变。

25. 設 $\xi=x-at$, $\eta=x+at$, 变换方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

26. 作自变数和因变数的变换，取 u, v 为新的自变数，$w=w(u, v)$ 为新因变数：

(1) 設 $u=x^2+y^2$, $v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, $w=\ln z-(x+y)$, 变换方程

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)\cdot z;$$

(2) 設 $u=x+y$, $v=\frac{y}{x}$, $w=\frac{z}{x}$, 变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0;$$

(3) 設 $x=u$, $y=\frac{u}{1+uv}$, $z=\frac{u}{1+u\cdot w}$, 变换方程

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2;$$

(4) 設 $u=\frac{x}{y}$, $v=x$, $w=xz-y$, 变换方程

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{x}.$$

27. 証明 $\begin{cases} x=r\cos\theta\cos\varphi, \\ y=r\cos\theta\sin\varphi, \\ z=r\sin\theta, \end{cases}$ 函数独立。

28. 証明 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\ y_2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2, \\ y_3 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n, \end{cases}$

函数相关，并写出其函数关系式。

29. 下列函数是否相关？

(1) $\dfrac{x-y}{x-z}, \dfrac{y-z}{y-x}, \dfrac{z-x}{z-y}$;

(2) $\dfrac{x}{1-x-y-z}, \dfrac{y}{1-x-y-z}, \dfrac{z}{1-x-y-z}$.

第六章　限制极值(条件极值)

一、拉格朗日乘数法

在第四章§3中已經叙述了求二元函数极值的一种方法，在那里，二元函数中的两个自变量是各自独立变化的，不受到其他条件的約束。但实际上还常常会遇到这样的极值問題，其自变量要受其他条件的約束。我們称前一种极值为直接极值（簡称极值），后一种极值为限制极值（或条件极值），下面我們建立求限制极值的一种方法——拉格朗日乘数法。拉格朗日乘数法的基本精神在于引入待定参数，将求限制极值的問題化为求直接极值的問題。

設函数 $f(x, y, u, v)$ 具有对各个变元的連續偏导数，而这些变元 x, y, u, v 之間又受有以下条件的限制：

$$\begin{cases} g(x, y, u, v)=0, \\ h(x, y, u, v)=0, \end{cases}$$

其中函数 g 和 h 皆具有对各个变元的連續偏导数，并且它們的雅可比行列式

$$\frac{D(g, h)}{D(u, v)} \neq 0.$$

我們要求函数 $f(x, y, u, v)$ 在限制条件 $g(x, y, u, v)=0$，$h(x, y, u, v)=0$ 下的极值。

先来考虑极值的必要条件。

若函数 $f(x, y, u, v)$ 在某一点 $M(x, y, u, v)$ 达到限制极值，这里 x, y, u, v 满足限制条件。按隐函数存在定理，設想从方程組 $g=0$, $h=0$ 中将 u, v 解出来，亦即

$$\begin{cases} u=u(x, y), \\ v=v(x, y). \end{cases}$$

那么問題就化为考察函数 $f(x, y, u(x, y), v(x, y))$ 的直接极值問題,而它的必要条件为在极值点处函数 f 的全微分为零,再由一阶微分形式的不变性,得必要条件为:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv=0. \tag{1}$$

但要注意,在这里变元 x, y, u, v 之間并非相互独立变化的,而是受有条件限制,因此,它們的微分之間也将满足一定的关系,这个关系只要将限制条件 $g=0$ 及 $h=0$ 求微分,得

$$dg=\frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{\partial g}{\partial y}dy+\frac{\partial g}{\partial u}du+\frac{\partial g}{\partial v}dv=0, \tag{2}$$

$$dh=\frac{\partial h}{\partial x}dx+\frac{\partial h}{\partial y}dy+\frac{\partial h}{\partial u}du+\frac{\partial h}{\partial v}dv=0. \tag{3}$$

这样我們就得到,若函数在某点 $M(x, y, u, v)$ 达到限制极值,那么在这一点 M 上应同时满足三个微分关系式(1),(2),(3)。

为了解得这些可能的极值点,可以采用两种方法。一般地,采用第二种方法(拉格朗日乘数法)更为方便。

方法一(直接解法)

由于雅可比式

$$\frac{D(g, h)}{D(u, v)}\neq 0,$$

从(2),(3)中能够将 du 和 dv 解出来,代入(1)中,这样(1)式就化为 dx 和 dy 的綫性齐次式

$$df=A(x, y, u, v)dx+B(x, y, u, v)dy=0.$$

注意到变元 x 和 y 是相互独立变化的,因此它們的微分 dx 和 dy 也是相互独立的,所以有

$$\begin{cases}A(x, y, u, v)=0,\\ B(x, y, u, v)=0.\end{cases}$$

連同限制条件 $g(x, y, u, v)=0$ 及 $h(x, y, u, v)=0$ 共四个方程,从这四个方程中能解出点 $M(x, y, u, v)$,这就是函数 f 的可能限

制极值点。

方法二(拉格朗日乘数法)　这种方法在理論力学中有着重要应用,而方法本身也具有一定的力学意义。

以 $1,\alpha,\beta$ 分别乘(1),(2),(3)式再相加,得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\alpha\frac{\partial g}{\partial x}+\beta\frac{\partial h}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\alpha\frac{\partial g}{\partial y}+\beta\frac{\partial h}{\partial y}\right)dy$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\alpha\frac{\partial g}{\partial u}+\beta\frac{\partial h}{\partial u}\right)du$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial v}+\alpha\frac{\partial g}{\partial v}+\beta\frac{\partial h}{\partial v}\right)dv=0. \tag{4}$$

α,β 称为拉格朗日乘数,也称为待定乘数。由于

$$\frac{D(g,h)}{D(u,v)}\neq 0,$$

总能求得唯一一組 α 和 β 使

$$\frac{\partial f}{\partial u}+\alpha\frac{\partial g}{\partial u}+\beta\frac{\partial h}{\partial u}=0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}+\alpha\frac{\partial g}{\partial v}+\beta\frac{\partial h}{\partial v}=0. \tag{6}$$

这时,(4)式化为

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\alpha\frac{\partial g}{\partial x}+\beta\frac{\partial h}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\alpha\frac{\partial g}{\partial y}+\beta\frac{\partial h}{\partial y}\right)dy=0.$$

由于 dx 和 dy 是相互独立的,要使上式成立,必须

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\alpha\frac{\partial g}{\partial x}+\beta\frac{\partial h}{\partial x}=0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\alpha\frac{\partial g}{\partial y}+\beta\frac{\partial h}{\partial y}=0. \tag{8}$$

到此,我們得到,如果函数 $f(x,y,u,v)$ 在某点 $M(x,y,u,v)$ 达到限制极值,则在該点处应满足六个关系式 (5),(6),(7),(8) 及 $g=0$, $h=0$。反过来,从上面的六个方程中也可以解出六个未知量 x,y,u,v 及 α,β。

現在引入函数 L，它称为拉格朗日函数：

$$L(x, y, u, v)$$
$$=f(x, y, u, v)+\alpha g(x, y, u, v)+\beta h(x, y, u, v).$$

我們知道，函数 L 的直接极值的必要条件为

$$L_x=0,\ L_y=0,\ L_u=0,\ L_v=0.$$

这正好就是方程 (5)，(6)，(7)，(8)，从这四个方程再加上 $g=0$ 和 $h=0$，可解出函数 f 的可能限制极值点 $M(x, y, u, v)$ 及待定乘数 α, β。这里可以看到，利用拉格朗日乘数法，就将求函数 f 的限制极值問題化为求函数 L 的直接极值問題。这就是說，为了找出 f 的所有可能的限制极值点 $M(x, y, u, v)$，首先作出拉格朗日函数 L，再由 $L_x=0$, $L_y=0$, $L_u=0$, $L_v=0$ 連同限制条件 $g=0$, $h=0$ 解出 x, y, u, v 及 α, β，这里 (x, y, u, v) 就是 f 的可能限制极值点。

下面进一步討論极值点的充分条件。

因为

$$\frac{D(g, h)}{D(u, v)}\neq 0,$$

按隐函数存在定理，可由方程組

$$\begin{cases} g(x, y, u, v)=0, \\ h(x, y, u, v)=0 \end{cases}$$

确定唯一一組函数

$$\begin{cases} u=u(x, y), \\ v=v(x, y). \end{cases}$$

将它們代入拉格朗日函数 L 中得

$$L(x, y, u, v)=L(x, y, u(x, y), v(x, y)),$$

注意到　$$g(x, y, u(x, y), v(x, y))\equiv 0$$

及　$$h(x, y, u(x, y), v(x, y))\equiv 0,$$

于是　$$L(x, y, u, v)=L(x, y, u(x, y), v(x, y))$$

$$=f(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv F(x, y).$$

由一阶微分形式不变性，有

$$dF = dL = L_x dx + L_y dy + L_u du + L_v dv,$$

从而 F 的二阶微分有

$$d^2F = d(dL) = (dL_x)dx + (dL_y)dy$$
$$+ (dL_u)du + L_u d^2u + (dL_v)dv + L_v d^2v.$$

但因为在极值点满足必要条件：

$$L_u = 0, \qquad L_v = 0.$$

所以

$$d^2F(x, y) = (dL_x)dx + (dL_y)dy + (dL_u)du + (dL_v)dv$$
$$= d^2L(x, y, u, v).$$

等式右端的 d^2L，是将变元 x, y, u, v 視为相互独立时函数 L 的二阶全微分。

充分性要討論 d^2F 的符号是恒正或恒負或不定。也就是要討論 d^2L 的符号。这正好就象将所有变元 x, y, u, v 視为相互独立时討論函数 $L(x, y, u, v)$ 的直接极值的充分条件一样，这正是我們剛才多次提起的拉格朗日乘数法的精神所在。但要注意的是，这时在 d^2L 中所出現的 dx, dy, du, dv 应該受条件(2)，(3)，即：

$$\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial u}du + \frac{\partial g}{\partial v}dv = 0,$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial y}dy + \frac{\partial h}{\partial u}du + \frac{\partial h}{\partial v}dv = 0$$

的限制。

从这里可以看出，由于引进了拉格朗日函数 L，从而把限制极值的問題化为討論函数 L 的直接极值問題。

一般說来，設有 $n+m$ 个变元的函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_{n+m})$ 具有对各个变元的連續偏导数。又假定这些变元之間还满足 m 个联系方程：

$$\Phi_i(x_1, x_2, \cdots, x_{n+m})=0 \quad (i=1, 2, \cdots, m),$$

这里 Φ_i $(i=1, 2, \cdots, m)$ 具有对各个变元的連續偏导数，并且它們关于其中某 m 个变元的雅可比行列式不等于零，可以用同样的方法来討論函数 f 在限制条件 $\Phi_i=0$ 下的极值問題。

二、求限制极值的若干例題

［例 1］ 求由空間一点 (a, b, c) 到平面

$$Ax+By+Cz+D=0$$

的最短距离。

由所給的点 (a, b, c) 到任何变动点 (x, y, z) 的距离为

$$r^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-a)^2.$$

但是在我們的問題中，这个变动点 (x, y, z) 被限制在平面

$$Ax+By+Cz+D=0$$

上变动。这就是限制条件。在这个条件下，求 r^2 的极小值。

作拉格朗日函数

$$L=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+\lambda(Ax+By+Cz+D),$$

令 $L_x=0$, $L_y=0$, $L_z=0$, 解得

$$x=a-\frac{1}{2}\lambda A, \quad y=b-\frac{1}{2}\lambda B, \quad z=c-\frac{1}{2}\lambda C,$$

代入 $Ax+By+Cz+D=0$, 得

$$\lambda=\frac{2(Aa+Bb+Cc+D)}{A^2+B^2+C^2}.$$

又因为在这个实际問題中，极小值的存在性及唯一性是不用怀疑的，并且沒有极大值。所以由上面所解得的点 (x, y, z) 必是 r^2 取到极小值的点。将它代入 r^2 中，得最短距离为

$$r^2=\frac{1}{4}\lambda^2(A^2+B^2+C^2)=\frac{(Aa+Bb+Cc+D)^2}{A^2+B^2+C^2}.$$

严格說来，我們应該利用充分条件来判断上面所解得的点 (x, y, z) 是否为极小值点。这里仅从实际出发而略去了数学上的

严密論証。

[例 2] 求函数

$$f=x+y+z+t$$

在限制条件

$$xyzt=c^4$$

下的极值。

作拉格朗日函数

$$L=x+y+z+t+\lambda(xyzt-c^4),$$

令 L 关于 x, y, z 和 t 的偏导数为零,得

$$L_x=1+\lambda\,yzt=0,$$
$$L_y=1+\lambda\,xzt=0,$$
$$L_z=1+\lambda\,xyt=0,$$
$$L_t=1+\lambda\,xyz=0.$$

所以

$$yzt=xzt=xyt=xyz.$$

再从 $$xyzt=c^4$$

得

$$x=y=z=t=c,\quad \lambda=-\frac{1}{c^3},$$

于是点 (c,c,c,c) 是可能的限制极值点, 以下再进一步判断它是否是极值点以及是极大值点还是极小值点。

由于

$$L=x+y+z+t-\frac{1}{c^3}(xyzt-c^4),$$

所以

$$dL=dx+dy+dz+dt$$
$$-\frac{1}{c^3}(yzt\,dx+xzt\,dy+xyt\,dz+xyz\,dt),$$

在点(c, c, c, c)处，L的二阶全微分

$$d^2L=-\frac{2}{c}[dx\,dy+dy\,dz+dx\,dz+dt\,(dx+dy+dz)],$$

其中dx, dy, dz, dt还受有限制，这个限制就是将方程$xyzt=c^4$两端微分，在点(c, c, c, c)处有

$$dx+dy+dz+dt=0,$$

亦即

$$dt=-(dx+dy+dz).$$

所以

$$d^2L=-\frac{2}{c}[dx\,dy+dy\,dz+dx\,dz-(dx+dy+dz)^2]$$

$$=\frac{1}{c}[(dx+dy+dz)^2+dx^2+dy^2+dz^2]>0.$$

因此，函数f在点(c, c, c, c)达到极小值，极小值为$4c$.

［例3］ 設一导綫长为l_0在它的一端接上k条导綫，各长l_s $(s=1, 2, \cdots, k)$，在各导綫上电流强度各为i_s。綫路(l_0, l_1)，(l_0, l_2)，$\cdots$，(l_0, l_k)两端的电位差为E，試求要怎样选取导綫的横截面q_s $(s=1, 2, \cdots, k)$使所用材料为最少(图2-6-1)。

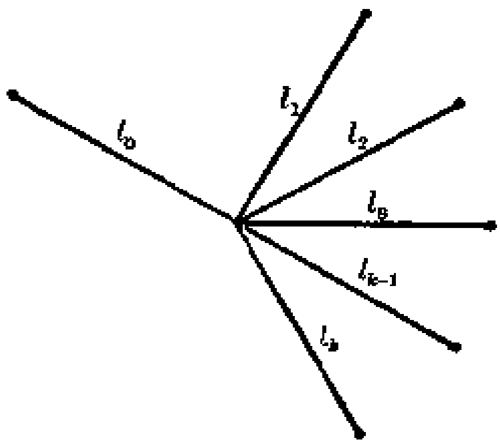


图　2-6-1

在电学中，电位差E与导綫长度l、导綫截面q以及电流I有以下关系

$$E=c\frac{l}{q}I,$$

其中c为电阻率。

因此，我們的問題就化为要求导綫的体积V

$$V=l_0q_0+l_1q_1+l_2q_2+\cdots+l_kq_k \tag{1}$$

的最小值，而变元q_s $(s=1, 2, \cdots, k)$之間还要滿足下面的k个限

制条件

$$c\left(\frac{l_0 i_0}{q_0}+\frac{l_s i_s}{q_s}\right)=E \quad (s=1, 2, \cdots, k). \tag{2}$$

这就是一个限制极值問題。

作拉格朗日函数

$$L=(l_0 q_0+l_1 q_1+\cdots+l_k q_k)+\sum_{s=1}^{k}\lambda_s\left[c\left(\frac{l_0 i_0}{q_0}+\frac{l_s i_s}{q_s}\right)-E\right],$$

令 L 对 q_s 的偏导数为零，得到

$$l_0-\frac{c\,l_0 i_0}{q_0^2}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k)=0, \tag{3}$$

$$l_s-\frac{\lambda_s c\,l_s i_s}{q_s^2}=0 \quad (s=1, 2, \cdots, k). \tag{4}$$

由(2)式得

$$\frac{l_1 i_1}{q_1}=\frac{l_2 i_2}{q_2}=\cdots=\frac{l_k i_k}{q_k}=\frac{E}{c}-\frac{l_0 i_0}{q_0}.$$

記

$$\frac{E}{c}-\frac{l_0 i_0}{q_0}=\sigma,$$

則

$$q_s=\frac{l_s i_s}{\sigma} \quad (s=1, 2, \cdots, k). \tag{5}$$

由(4)式得

$$\lambda_s=\frac{q_s^2}{c i_s}=\frac{l_s^2 i_s}{c\sigma^2} \quad (s=1, 2, \cdots, k).$$

将这些 λ_s 代入(3)式

$$q_0^2=\frac{i_0}{\sigma^2}(l_1^2 i_1+l_2^2 i_2+\cdots+l_k^2 i_k)$$

或

$$q_0=\frac{\sqrt{i_0(l_1^2 i_1+l_2^2 i_2+\cdots+l_k^2 i_k)}}{\dfrac{E}{c}-\dfrac{l_0 i_0}{q_0}},$$

由此得到

$$q_0=\frac{c}{E}\left[i_0 l_0+\sqrt{i_0[l_1^2 i_1+l_2^2 i_2+\cdots+l_k^2 i_k]}\right].$$

再将这个 q_0 代入(5)式得到

$$q_s = \frac{c\,l_s i_s}{E}\left[1+\frac{l_0 i_0}{\sqrt{i_0(l_1^2 i_1+l_2^2 i_2+\cdots+l_k^2 i_k)}}\right]$$
$$(s=1,\ 2,\ \cdots,\ k).$$

我們得到唯一的一組正值 $q_0, q_1, \cdots, q_k$. 由这个实际問題知道，在适当选取横截面时，应該有一个材料最省的时候，所以所得到的数 $q_0, q_1, \cdots, q_k$ 一定是这个問題的解。从数学上严格說来，是还須要驗証其充分性的，也即驗証这一組正值是否为限制极值点。

习　　题

1. 求下列函数在所給条件下极值：

 (1) $f=x+y$, 若 $x^2+y^2=1$;

 (2) $f=x-2y+2z$, 若 $x^2+y^2+z^2=1$;

 (3) $f=xyz$, 若 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$　$(x>0,\ y>0,\ z>0,\ a>0)$;

 (4) $f=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, 若 $x+y=2$;

 (5) $f=\cos^2 x+\cos^2 y$, 若 $x-y=\frac{\pi}{4}$;

 (6) $f=xyz$, 若 $x^2+y^2+z^2=1,\ x+y+z=0$.

2. 求 $f=x^m y^n z^p$ 在条件 $x+y+z=a,\ a>0,\ m>0,\ n>0,\ p>0,\ x>0,\ y>0,\ z>0$ 之下的最大值。

3. 求椭圓 $x^2+3y^2=12$ 的內接等腰三角形，使其底边平行于椭圓的長軸，而面积最大。

4. 試求抛物綫 $y^2=4x$ 上的点，使它与直綫 $x-y+4=0$ 相距最近。

5. 已知矩形的周长为 $2p$, 将它繞一边旋轉而构成一立体，求使立体体积为最大的那个矩形。

6. 試証：在条件 $x^2+y^2=1$ 之下，二次形式 $rx^2+2sxy+ty^2$ 有极大值 R_1 与极小值 R_2, 且为方程

$$R^2-(r+t)R+(rt-s^2)=0$$

的根。

7. 确定二次形式 $\sum_{i,j}^{n} a_{ij} x_i x_j$ 在条件 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 之下的最大值与最小值。

8. 抛物体 $x^2+y^2=z$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求这个椭圆到坐标原点的最长与最短距离。

第七章　微分学在几何上的一些应用

§1　平面曲綫的切綫和法綫

本篇一开始就引进了切綫的概念，一条由显式方程

$$y=f(x)$$

所給出的曲綫，如果在每一点(x, y)都有一条切綫，那么切綫斜率$\operatorname{tg}\alpha$由公式

$$\operatorname{tg}\alpha=f'(x)$$

給出。这样，在点(x, y)的切綫方程就为

$$Y-y=f'(x)(X-x),$$

而法綫的方程就是

$$Y-y=-\frac{1}{f'(x)}(X-x).$$

对于由隐函数方程所給出的曲綫或者由参数方程所給出的曲綫，它們的切綫和法綫方程都不难推导，这里不一一叙述了。作为例子，考察在实际問題中相当有用的一种曲綫如下：

［例］　圓的漸伸綫。把一个繞在半徑为a的圓周上的绳子伸开，保持绳子与圓周在将要离开的点K处相切，这时绳端M的軌迹叫做圓的漸伸綫（图 2-7-1）。

取半徑OK与正向OX軸所成的角度t作为参数，注意

$$\overline{KM}=\widehat{AK}=at,$$

得到圓的漸伸綫参数方程为：

$$\begin{aligned}x&=\overline{OK}\cos t+\overline{KM}\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\\&=a\cos t+at\sin t,\end{aligned}$$

$$y=\overline{OK}\sin t+\overline{KM}\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=a\sin t-at\cos t.$$

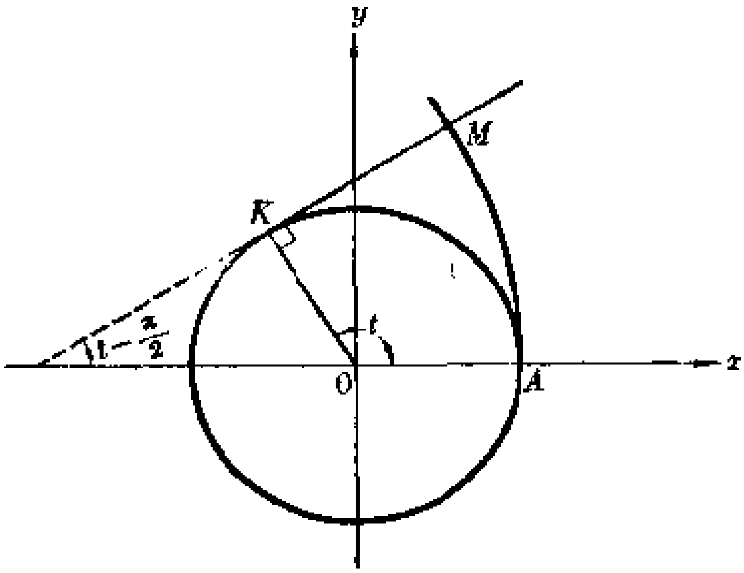


图　2-7-1

它的切綫斜率等于

$$y'=\frac{y'_t}{x'_t}=\operatorname{tg}t.$$

法綫斜率等于

$$-\operatorname{ctg}t=\operatorname{tg}\left(t-\frac{\pi}{2}\right).$$

由此可看出，直綫 MK 就是圓的漸伸綫在 M 点的法綫。

§2　平面曲綫的弧长微分、曲率和曲率半徑

1. 弧长的微分：在下一篇积分学的定积分应用中将要給出曲綫弧长的定义，弧长的求法以及弧长微分的表达式。这里只介紹这个公式并給以初等几何的解釋。

設一条平面曲綫的弧长 s 由某一定点 A 起算。設弧 $\widehat{MN}$ 是由某一点 $M(x, y)$ 起弧长的改变量 Δs，而 Δx 和 Δy 是相应的 x 和 y 的改变量，由直角三角形(图 2-7-2)得到

$$(\overline{MN})^2=\Delta x^2+\Delta y^2,$$

由此

$$\frac{(\overline{MN})^2}{\Delta x^2}=1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2,$$

当 Δx 充分小时,在一些假定之下(例如这条曲綫具有連續导数,参閱第三篇第三章 §1),可以用弧长代替弦 $\overline{MN}$,再对 $\Delta x\to 0$ 取极限,得到

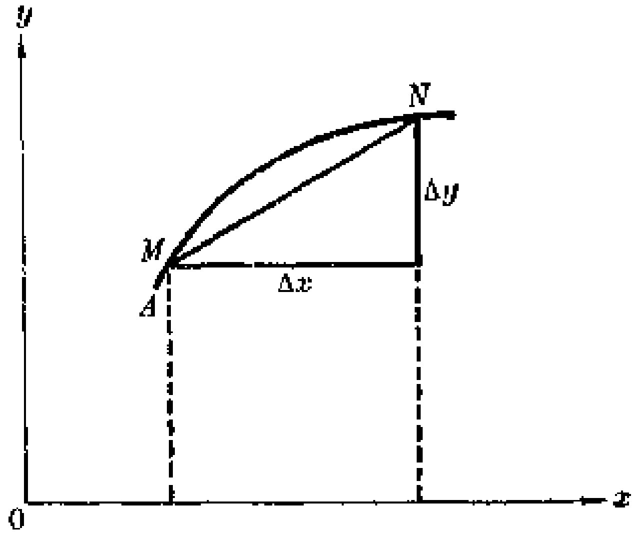


图 2-7-2

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

由此得到弧长微分的表达式

$$ds=\pm\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

或

$$ds=\pm\sqrt{(dx)^2+(dy)^2},$$

$$ds^2=dx^2+dy^2.$$

給曲綫一个确定的方向以后,ds 的符号就能被确定:如果弧长是朝增加的方向变化的,則 ds 取正号,反之取負号。

2. 曲率与曲率半徑:这里,我們要引进一个量,用它来表示曲綫在一点的弯曲程度。設有两条足够光滑的曲綫 l 和 l',在这两条曲綫上各取长度皆等于 Δs 的弧段 $\widehat{PQ}$ 和 $\widehat{P'Q'}$. 設曲綫 l 在 P 点及 Q 点的切綫夹角为 $\Delta\alpha$,曲綫 l' 在 P 点及 Q 点的切綫夹角为 $\Delta\alpha'$(图 2-7-3)。可以看出,由于 $\widehat{PQ}$ 的弯曲程度要比 $\widehat{P'Q'}$ 的弯曲程度小,相应地切綫間夹角 $\Delta\alpha$ 也比 $\Delta\alpha'$ 小,因此可以用 $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ 大小来描划曲綫弯曲程度大小。当 $P\to Q$,如果比值 $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ 的极限存在,它的极限的絕对值称为曲綫在 P 点的曲率,通常記为 K,也就是

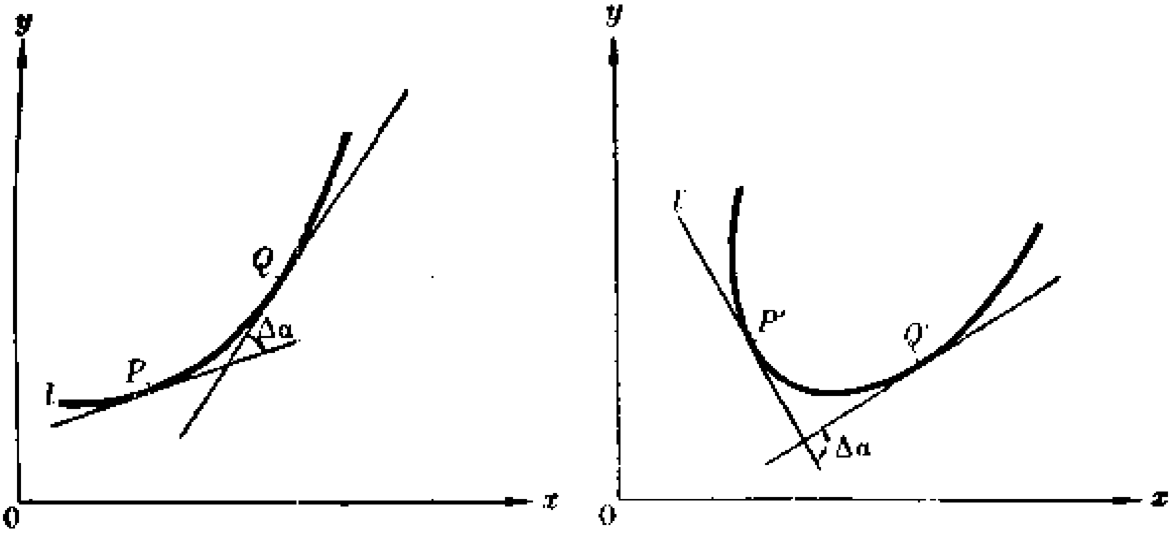


图　2-7-3

$$K=\left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|.$$

可見，曲率 K 是用来表示曲綫在 P 点上的弯曲程度的。由于

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

$$\alpha=\text{arc tg}\,y'\quad(\alpha\text{ 为切綫与 }OX\text{ 軸夹角}),$$

$$d\alpha=\frac{y''}{1+y'^2}\,dx,$$

立即得 K 的計算公式：

$$K=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|.$$

在参数方程 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 的情形下

$$K=\left|\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{[(x'(t))^2+(y'(t))^2]^{3/2}}\right|.$$

在极坐标 $r=r(\theta)$ 的情形下，借助 $\text{tg}\,\mu=\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}$ 的公式，可以得出 K 的公式。由于 $ds=\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$ 而 $\alpha=\mu+\theta$，

$$d\alpha=d\mu+d\theta=d\,\text{arc tg}\,\frac{r}{r'}+d\theta$$

$$=\frac{r^2+2r'^2-rr''}{r^2+r'^2}\,d\theta,$$

得
$$K=\left|\frac{r^2+2r'^2-rr''}{(r^2+r'^2)^{3/2}}\right|.$$

例如，容易求得直綫 $y=ax+b$ 的曲率 $K=0$，而圓 $r=a$ 的曲率 $K=\frac{1}{a}$。故圓的曲率为半徑的倒数。

一般地，我們称曲率的倒数为曲率半徑，記为 R：
$$R=\frac{1}{K}.$$

以下我們給出曲率半徑的几何解釋(图2-7-4)。在曲綫 $y=f(x)$ 上的一点 P 向凹的一边作法綫 PN，在 PN 上取一点 C，使 $\overline{PC}$ 之長度等于 P 点的曲率半徑 $R=\frac{1}{K}$。点 C 称为曲率中心。以曲率中心 C 为圓心，以 R 为半徑作一个圓，称此圓为曲綫在 P 点的曲率圓，此圓与曲綫在点 P 有以下关系：

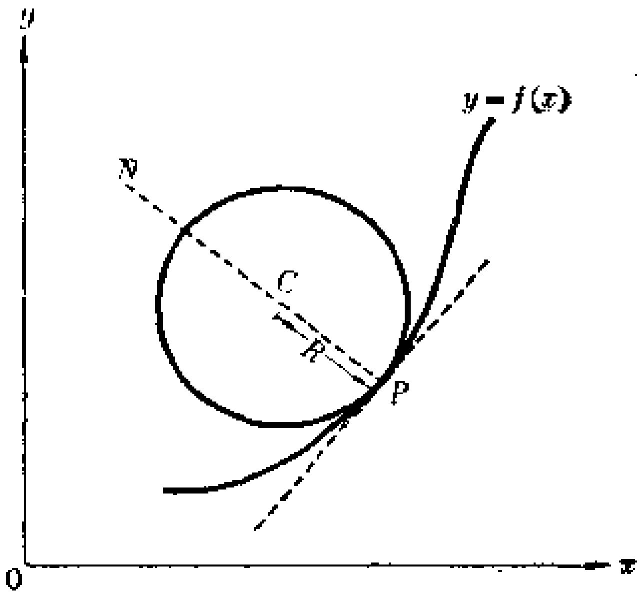


图 2-7-4

(1) 有共同的切綫，亦即圓与曲綫在点 P 相切，

(2) 有相同的曲率，

(3) 因此，圓和曲綫在点 P 具有相同的一阶和二阶导数。

这一事实表明，当討論函数 $y=f(x)$ 在某点 x 的局部性质时，若这个性质只与 x, y, y', y'' 有关，那么我們只要討論曲綫在 x 点的曲率圓的局部性质，而关于圓的性质是容易获得的。

§3 空間曲綫的切綫和法平面

1. 一般，我們用参数式

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$$

来表示空間的一条曲綫。和平面曲綫一样，通过曲綫上任一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$（这里 $x_0=x(t_0)$，$y_0=y(t_0)$，$z_0=z(t_0)$）的切綫定义为割綫的极限位置，而通过点 M_0 和点 $M(x, y, z)$ 的割綫方程是

$$\frac{X-x_0}{x(t)-x(t_0)}=\frac{Y-y_0}{y(t)-y(t_0)}=\frac{Z-z_0}{z(t)-z(t_0)},$$

分母都被 $t-t_0$ 除，仍是原来的割綫方程：

$$\frac{X-x_0}{\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}}=\frac{Y-y_0}{\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}}=\frac{Z-z_0}{\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}}.$$

假設函数 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ 在 t_0 处导数存在，不全为零，那么当 $t\to t_0$ 时，割綫就变为切綫，得到空間曲綫在点 M_0 的切綫方程为

$$\frac{X-x_0}{x'(t_0)}=\frac{Y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{Z-z_0}{z'(t_0)}.$$

2. 如果空間曲綫以

$$y=y(x),\ z=z(x)$$

的形式来表示，实际上也可以把它表示为参数形式：

$$x=x,\ y=y(x),\ z=z(x),$$

这里参数为 x. 根据刚才的討論，設 $y(x)$ 及 $z(x)$ 在点 x_0 导数存在，这时曲綫在点 (x_0, y_0, z_0)（这里 $y_0=f(x_0)$，$z_0=z(x_0)$）的切綫方程为

$$\frac{X-x_0}{1}=\frac{Y-y_0}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}}=\frac{Z-z_0}{\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=x_0}}.$$

3. 空間曲綫用隐式来表示：

$$\begin{cases}F_1(x, y, z)=0,\\ F_2(x, y, z)=0,\end{cases}$$

也就是用两曲面的交綫来表示空間曲綫。設 $F_1(x, y, z)$ 和 $F_2(x, y, z)$ 函数无关，不妨設

$$\left.\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}\right|_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0.$$

由隐函数存在定理，方程組在 M_0 点附近决定了函数

$$y=y(x), \ z=z(x).$$

为了求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$，现将方程組对 x 求导，得

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{dz}{dx}=0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{dz}{dx}=0. \end{cases}$$

由这两个方程，解出

$$\frac{dy}{dx}=\frac{D(F_1, F_2)}{D(z, x)} \Big/ \frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)},$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)} \Big/ \frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}.$$

有了 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{dz}{dx}$ 以后，就很容易得到曲綫在点 (x_0, y_0, z_0) 的切綫方程了：

$$\frac{X-x_0}{\left.\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}\right|_{(x_0, y_0, z_0)}}=\frac{Y-y_0}{\left.\frac{D(F_1, F_2)}{D(z, x)}\right|_{(x_0, y_0, z_0)}}=\frac{Z-z_0}{\left.\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)}\right|_{(x_0, y_0, z_0)}}.$$

（注）把具有連續变动的切綫的曲綫称为光滑曲綫，因此，若确定曲綫的函数具有連續导数时，它們所确定的曲綫就是光滑曲綫。

4．曲綫的法平面方程：曲綫在点 M_0 的法平面就是通过点 M_0 并且和 M_0 的切綫相垂直的平面，因此切綫的方向数就是法平面的法方向数。按照空間曲綫的三种不同表示形式，法平面的法向量应分別为：$(x'(t), y'(t), z'(t))$，$(1, y'(x_0), z'(x_0))$ 和

$$\left(\left.\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}\right|_{(x_0, y_0, z_0)}, \left.\frac{D(F_1, F_2)}{D(z, x)}\right|_{(x_0, y_0, z_0)}, \left.\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)}\right|_{(x_0, y_0, z_0)}\right),$$

于是法平面的方程将分别为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0,$$

或者

$$x-x_0+\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}(y-y_0)+\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=x_0}(z-z_0)=0,$$

或者

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}\bigg|_{(x_0, y_0, z_0)}(x-x_0)+\frac{D(F_1, F_2)}{D(z, x)}\bigg|_{(x_0, y_0, z_0)}(y-y_0)$$
$$+\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)}\bigg|_{(x_0, y_0, z_0)}(z-z_0)=0.$$

§ 4 曲面的切平面与法綫

1 設曲面的方程为

$$F(x, y, z)=0,$$

設过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 引完全在曲面上的曲綫 l：

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),$$

因此
$$F(x(t), y(t), z(t))\equiv 0.$$

对 t 求导，在 $t=t_0$ 处（亦即在点 M_0 处）有

$$(F'_x)_{M_0}x'(t_0)+(F'_y)_{M_0}y'(t_0)+(F'_z)_{M_0}z'(t_0)=0.$$

前已知道，向量 $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ 正是曲綫 l 在 M_0 点的切綫向量。所以向量 $((F'_x)_{M_0}, (F'_y)_{M_0}, (F'_z)_{M_0})$ 是和这条切綫垂直的。又由于所取曲綫 l 的任意性，可知曲面上任何一条通过 M_0 的曲綫，它在点 M_0 的切綫皆垂直于方向 $((F'_x)_{M_0}, (F'_y)_{M_0}, (F'_z)_{M_0})$，因此这些切綫应位于同一平面上，这个平面称为曲面在 M_0 点的切平面，而方向 $((F'_x)_{M_0}, (F'_y)_{M_0}, (F'_z)_{M_0})$ 就是切平面的法方向向量。切平面方程为

$$(F'_x)_{M_0}(x-x_0)+(F'_y)_{M_0}(y-y_0)+(F'_z)_{M_0}(z-z_0)=0.$$

通过 M_0 点与切平面垂直的直綫，称为曲面在 M_0 点的法綫，于是法綫的方程应为

$$\frac{x-x_0}{(F'_x)_{M_0}}=\frac{y-y_0}{(F'_y)_{M_0}}=\frac{z-z_0}{(F'_z)_{M_0}}.$$

設 α, β, γ 分别为曲面在 M_0 点的法綫与坐标軸正方向之間夹角，那么在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 点的法綫的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{(F'_x)_{M_0}}{\pm\sqrt{(F'_x)^2_{M_0}+(F'_y)^2_{M_0}+(F'_z)^2_{M_0}}},$$

$$\cos\beta=\frac{(F'_y)_{M_0}}{\pm\sqrt{(F'_x)^2_{M_0}+(F'_y)^2_{M_0}+(F'_z)^2_{M_0}}},$$

$$\cos\gamma=\frac{(F'_z)_{M_0}}{\pm\sqrt{(F'_x)^2_{M_0}+(F'_y)^2_{M_0}+(F'_z)^2_{M_0}}}.$$

根式前正負号的选取，依賴于法綫选取的方向，当法綫的正向取定以后，根式前的符号就被确定了。

2．若曲面方程表示为

$$z=f(x, y).$$

实际上，很容易化为剛才討論过的情形，此时

$$F(x, y, z)=z-f(x, y)=0.$$

于是曲面在点 (x_0, y_0, z_0)（这里 $z_0=f(x_0, y_0)$）的切面方程为

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)}(x-x_0)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)}(y-y_0)-(z-z_0)=0.$$

法綫方程为

$$\frac{x-x_0}{-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)}}=\frac{y-y_0}{-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)}}=\frac{z-z_0}{1}.$$

而在点 $M(x, y, z)$ 处的法綫方向余弦

$$\cos\alpha=\frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \cos\beta=\frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

这里 $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$，根号前正負号的选取依賴于法綫正向的选取。

3　最后，若曲面表示为参数形式：

$$x=x(u,\ v),\ y=y(u,\ v),\ z=z(u,\ v).$$

并設 $\dfrac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}$ 在点 $P_0(u_0,v_0)$ 处不等于零，亦即在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处不等于零，这里

$$x_0=x(u_0,\ v_0),\ y_0=y(u_0,\ v_0),\ z_0=z(u_0,\ v_0).$$

$\left(对于\ \dfrac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)}\Big|_{P_0}\neq 0\ 或\ \dfrac{D(z,\ x)}{D(u,\ v)}\Big|_{P_0}\neq 0\ 的情形也可同样討論之。\right)$
則由 $x=x(u,\ v),\ y=y(u,\ v)$ 决定了两个函数：

$$u=u(x,\ y),\ v=v(x,\ y).$$

因此可以将 z 看为 x,y 的函数，这样問題就化为剛才已經討論过的問題了。因此只要求出 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$，为此，将 $z=z(u,\ v)$ 分别对 u,v 求导，并注意到 z 为 x,y 的函数，按隐函数求导法則有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u},\\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}.\end{cases}$$

由这两个方程可解出 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)}\Big/\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{D(z,\ x)}{D(u,\ v)}\Big/\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}.$$

所以，在 M_0 点的切平面方程应为

$$\frac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)}\Big|_{P_0}(x-x_0)+\frac{D(z,\ x)}{D(u,\ v)}\Big|_{P_0}(y-y_0)$$

$$+\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\Big|_{P_0}(z-z_0)=0.$$

法綫方程为

$$\frac{x-x_0}{\left[\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right]_{P_0}}=\frac{y-y_0}{\left[\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right]_{P_0}}=\frac{z-z_0}{\left[\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]_{P_0}}.$$

而在点 $M(x, y, z)$ 的法綫的方向余弦：

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

这里 $A=\frac{D(y,z)}{D(u,v)}$，$B=\frac{D(z,x)}{D(u,v)}$，$C=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$.

［例］　求拋物面 $z=x^2+y^2$ 的切平面和法綫。

由　$\frac{\partial z}{\partial x}=2x$，$\frac{\partial z}{\partial y}=2y$，

故过点 $M(x, y, z)$ 的切平面方程为

$$2x(X-x)+2y(Y-y)-(Z-z)=0.$$

法綫方程为

$$\frac{X-x}{2x}=\frac{Y-y}{2y}=\frac{Z-z}{-1}.$$

（注）　若曲面具有連續变化的切平面时，也称此曲面为光滑曲面。

习　題

1．求下列曲綫在所示点处的切綫与法平面：

(1) $x=a\sin^2 t$，$y=b\sin t\cdot\cos t$，$z=c\cos^2 t$，在 $t=\frac{\pi}{4}$ 的点上；

(2) $x^2+y^2=a^2, y^2+z^2=a^2$ 在点 (x_0, y_0, z_0)；

(3) $x^2+y^2+z^2=6$，$x+y+z=0$，在点 $(1, -2, 1)$．

2．在曲綫 $x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$ 上求出一点，使此点的切綫平行于平面 $x+2y+z=4$．

3．証明曲綫 $x=ae^t\cos t$，$y=ae^t\sin t$，$z=ae^t$ 与錐面 $x^2+y^2=z^2$ 的母綫相

交成同一角。

4. 求下列各曲綫在所示点的切綫的方向余弦：

(1) $x=t^2$, $y=t^3$, $z=t^4$, 在 $t=1$ 的点上；

(2) $xyz=1$, $y^2=x$, 在点 $(1, 1, 1)$.

5. 求下列曲面在所示点的切平面及法綫，并求其法綫方向余弦：

(1) $x=a\sin\varphi\cos\theta$, $y=a\sin\varphi\sin\theta$, $z=a\cos\varphi$, 在 (θ_0, φ_0)；

(2) $e^{\frac{x}{z}}+e^{\frac{y}{z}}=4$, 在点 $(\ln 2, \ln 2, 1)$；

(3) $z=2x^2+4y^2$, 在点 $(2, 1, 12)$；

(4) $ax^2+by^2+cz^2+d=0$, 在点 (x_0, y_0, z_0).

6. 求两曲面 $x^2+y^2=a^2$, $bz=xy$ 的交角。

7. 求下列曲綫的曲率与曲率半徑：

(1) 悬鏈綫 $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$；

(2) 抛物綫 $y^2=2px$；

(3) 旋輪綫 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$；

(4) 心脏綫 $r=a(1+\cos\theta)$；

(5) 双紐綫 $r^2=2a^2\cos 2\theta$；

(6) 对数螺綫 $r=ae^{\lambda\theta}$.

第三篇 积 分 学

本篇将討論一种在理論上和实踐上极为重要的数学工具——积分。为了使讀者能够理解积分本质，掌握它和运用它，所以在处理材料时，不是形式地按照定积分、二重积分、三重积分、第一类曲綫积分、……等次序孤立地进行叙述，而是按照它們之間的内在联系，以統一的观点有重点地叙述。积分的本质是一个具有特殊結构的和式的极限，在各种积分中，这种和式的极限只是表現形式不同而已。因此在叙述时，我們首先把定积分概念讲深讲透，然后将二重积分、三重积分、第一类曲綫积分、第一类曲面积分抓住其本质統一叙述。这样，就可把格林公式、奥斯特洛格拉得斯基公式及斯托克司公式統一起来，加以比較，体現了一个基本思想：函数在区域上的积分值，可以用它的“原函数”在边界上的值或积分来表示。

在本篇中，每个重要概念引入时，都将指出它的实际背景，然后提高到理論上来分析它們的本质，同时插入大量实例，使得讀者能够比較好地掌握教材内容，学会解决实际問題的方法。

第一章 不定积分

§1 不定积分与它的簡单計算方法

在上一篇中討論了导数与微分，它是由給定的函数求出其导数或微分。但是，在科学、技术的許多問題中，常常需要解决相反的問題，就是要由一个函数的已知导数，求出这个函数。例如在上一篇中，我們假定已知物体的运动方程 $s=s(t)$，用微分法求得其速度 $v=\frac{ds}{dt}$，然后找出其加速度 $a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$. 但是实际上，往往还需要解决反面的問題：已給定加速度 a 是时間 t 的函数，而要求确定速度 v 及其所經过的路程，这样就需要由已知的函数 $a=a(t)$ 还原出一个函数 $v=v(t)$，而它的导数就是 $a(t)$，然后从求得的 $v(t)$ 再求出函数 $s=s(t)$，而它的导数就是 $v(t)$.

一般地，我們給出如下的定义：

定义 若在某一区間上，$F'(x)=f(x)$，則在这个区間上，函数 $F(x)$ 叫做函数 $f(x)$ 的原函数.

显然，从定义可知，一个函数的原函数不是唯一的，因为 $[F(x)+C]'=F'(x)=f(x)$ (C 为任意常数)，所以若函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的原函数，則 $F(x)+C$ (C 为任意常数) 也是 $f(x)$ 的原函数。反过来，由第二篇第二章拉格朗日定理的推論可知，如果两个函数 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数，那末它們至多相差一个常数項，所以 $F(x)-G(x)=C$，因此函数 $f(x)$ 的原函数的一般表达式为 $F(x)+C$.

称函数 $f(x)$ 的原函数的一般表达式为 $f(x)$ 的不定积分，記

为$\int f(x)dx$。由上所述可見，求不定积分的运算就是求导数的逆运算。

回到一开始提出来的那个力学問題上，我們現在可以把它表示为

$$v=\int a(t)dt$$

及
$$s=\int v(t)dt.$$

如果討論的是等加速运动，在重力作用下，就有(g 为重力加速度)

$$v=\int g\,dt=gt+C_1$$

及
$$s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2,$$

其中 C_1 与 C_2 均为任意常数。我們不难通过求导数来驗証这些等式的正确性。但是，如果需要完全确定的解決，还需要知道在某一时刻的速度以及在此时刻的路程。例如，已知 $t=t_0$ 时

$$v=v_0,\ s=s_0,$$

那末就可以定出

$$C_1=v_0-gt_0$$

及
$$C_2=s_0+\frac{1}{2}gt_0^2-v_0t_0,$$

从而得到
$$v=g(t-t_0)+v_0$$

及
$$s=\frac{1}{2}g(t-t_0)^2+v_0(t-t_0)+s_0.$$

习惯上称 t_0, s_0 及 v_0 分别是 t, s 及 v 的初始值。

作为导数的逆运算，很容易求得初等函数的不定积分，下面是最簡单的不定积分表：

1. $\int 0\,dx=C$;

2. $\int k\,dx=kx+C$ (k 为常数)；

3. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$;

4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$;

5. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$;

6. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$;

7. $\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + C$;

8. $\int \csc^2 x \, dx = -\operatorname{ctg} x + C$;

9. $\int \sec x \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + C$;

10. $\int e^x dx = e^x + C$;

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C$;

13. $\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C$;

14. $\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C$;

15. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$;

16. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

借助于积分法则可以把上面得到的积分表所适用的范围加以扩充。最简单的积分法则有以下三个：

一、若 a 是常数 $(a \neq 0)$，$f(x)$ 和 $g(x)$ 的原函数存在，则

$$\int a f(x) \, dx = a \int f(x) \, dx.$$

即常数因子可以提到积分号外面来。

二、　$$\int [f(x)\pm g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx.$$

即函数之和(差)的不定积分等于两者的不定积分之和(差)。

三、若　$$\int f(t)\,dt=F(t)+C,$$

則　$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

它們都不难从不定积分的定义証得。亦就是将等号右端求导，証明求导后所得的函数等于左端积分号下的函数。

利用这些簡单的法則及簡单积分表可以求得一些函数的不定积分。

[例 1]　$$\int (6x^2-3x+5)\,dx$$

$$=6\int x^2\,dx-3\int x\,dx+5\int dx=2x^3-\frac{3}{2}x^2+5x+C.$$

[例 2]　$$\int \frac{dx}{2x-1}=\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C.$$

[例 3]　$$\int \frac{(e^x-1)(e^{3x}+2)}{e^x}\,dx$$

$$=\int (e^{3x}-e^{2x}-2e^{-x}+2)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{2}e^{2x}+2e^{-x}+2x+C.$$

在不定积分中，皆含有一个任意常数 C，它的几何意义是：如果我們已經知道曲綫的斜率 $m(x)$，即曲綫在每一点 x 处的切綫的斜率 $m(x)$，現在要求这个曲綫 $y=F(x)$，也就是説，这个曲綫应满足 $F'(x)=m(x)$. 由不定积分的定义，此曲綫的方程可求得，設 $F(x)$ 为 $m(x)$ 的一个原函数，有

$$y=\int m(x)\,dx=F(x)+C.$$

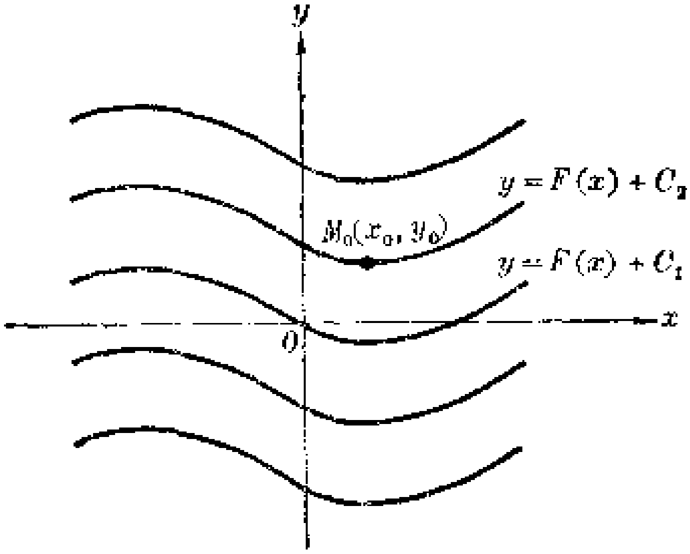


图　3-1-1

于是所得到的曲綫不是一条，而是相平行的一簇曲綫（图 3-1-1）。如果加上条件：要求此曲綫經过某一固定点 $M_0(x_0, y_0)$，那么即可定出此常数 C：

$$C=y_0-F(x_0),$$

于是曲綫便被唯一确定了。

§2　不定积分的計算

从上一节看到，虽然利用积分法則及簡单的积分表可以求出不少函数的原函数，但是实际上遇到的积分仅凭这一些方法还不能完全解决。例如

$$\int \cos^2 x \sin x \, dx$$

就无法求出。为了求得更一般的不定积分的計算，还需要引进更多的方法和技巧，下面我們先介紹不定积分的換元法和分部积分法，然后討論有理分式的部分分式法以及可有理化的积分等等。这样，就可以解决更多的不定积分的計算問題。

一、換元法

实际上，上节所讲的法則三是将要証明的換元法的很特殊的

情况，这里将推广到一般的情形。

例如要計算积分

$$\int \cos^2 x \sin x dx,$$

可以設想，由于

$$\sin x dx = -d \cos x,$$

那么上面的积分就可化为

$$\int \cos^2 x \sin x \, dx = -\int \cos^2 x \, d \cos x,$$

作代换 $t=\cos x$，上式右端即为 $-\int t^2 dt$，可直接利用簡单积分表求得其原函数为 $-\frac{t^3}{3}$，再代回变量 x，即得原函数为 $-\frac{1}{3}\cos^3 x$。

下面对一般情形給以理論上的証明。

定理 1 設 $f(x)$，$\varphi(t)$ 及 $\varphi'(t)$ 都是連續函数，且

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

則

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C.$$

【証明】 我們所要証明的就是

$$F(\varphi(t)) + C$$

的导数即为

$$f[\varphi(t)]\varphi'(t).$$

現証明如下：

由假設

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

所以

$$F'(x) = f(x),$$

于是把 $F(\varphi(t))$ 視为复合函数

$$u = F(x), \quad x = \varphi(t).$$

再利用复合函数求导法則可得

$$\frac{d}{dt}[F(\varphi(t))]=\frac{dF(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$=F'(x)\cdot\varphi'(t)=F'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

这就証明了我們的定理。

[例 1] $\displaystyle\int\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}dx=\int\operatorname{arc\,tg} x\,d(\operatorname{arc\,tg} x)$

$$=\frac{1}{2}[\operatorname{arc\,tg} x]^2+C.$$

[例 2] $\displaystyle\int\sin^3 x\,dx=\int(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$

$$=\int(\cos^2 x-1)\,d\cos x$$

$$=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C.$$

[例 3] $\displaystyle\int\frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\ln|\ln x|+C.$

[例 4] $\displaystyle\int\operatorname{tg} x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d\cos x}{\cos x}$

$$=-\ln|\cos x|+C=\ln|\sec x|+C.$$

[例 5] $\displaystyle\int\sec t\,dt=\int\frac{dt}{\cos t}=\int\frac{\cos t\,dt}{\cos^2 t}=\int\frac{d\sin t}{1-\sin^2 t}$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+\sin t}+\frac{1}{1-\sin t}\right)d\sin t$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin t)^2}{\cos^2 t}+C$$

$$=\ln|\sec t+\operatorname{tg} t|+C.$$

它也可以由下法得出，即

$$\int\sec t\,dt=\int\frac{d(\sec t+\operatorname{tg} t)}{\sec t+\operatorname{tg} t}=\ln|\sec t+\operatorname{tg} t|+C.$$

看来虽然簡明，但不及上法自然。

定理 2 設 $f(x)$ 連續，$x=\varphi(t)$ 及 $\varphi'(t)$ 均为連續，$x=\varphi(t)$ 的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ 存在且可导，并且

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(t)+C, \tag{1}$$

則

$$\int f(x)dx=F(\varphi^{-1}(x))+C, \tag{2}$$

式中 $\varphi^{-1}(x)$ 为 $x=\varphi(t)$ 的反函数。

【証明】 将第(2)式右端求导同时注意到第(1)式，得：

$$\frac{d}{dx}[F(\varphi^{-1}(x))+C]=F'(t)\cdot[\varphi^{-1}(x)]'$$

$$=f[\varphi(t)]\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=f(x).$$

这样便証明了(2)式。

［例 6］ 求

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

作代换 $x=a\sin t$，于是

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a\cos t}{a\cos t}dt=\int dt=t+C=\sin^{-1}\frac{x}{a}+C.$$

［例 7］ 求

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

作代换 $x=a\operatorname{tg}t$，于是

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{a\sec^2t\,dt}{a\sec t}=\int\sec t\,dt$$

$$=\ln|\sec t+\operatorname{tg}t|+C_1$$

$$=\ln\left[\operatorname{tg}t+\frac{1}{a}\sqrt{a^2+a^2\operatorname{tg}^2t}\right]+C_1$$

$$=\ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}+C_1$$

$$=\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|+C,$$

其中 $C=C_1-\ln a$。

[例 8] 求

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

作代换 $x=a\sec t$，于是

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{a\sec t\operatorname{tg}t}{a\operatorname{tg}t}dt$$
$$=\ln|\operatorname{tg}t+\sec t|+C_1$$
$$=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C,$$

其中 $C=C_1-\ln a$。

[例 9] 求

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$$

作代换 $x=\frac{1}{t}$，于是

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^2}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=-\int\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}}$$
$$=-\sqrt{t^2+1}+C=-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+C$$
$$=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$$

[例 10] 求

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$$

作代换 $x=t^6$，于是

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3}{t+1}dt$$
$$=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+C$$
$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C.$$

二、分部积分法

試討論可微函数 $u(x)$ 及 $v(x)$，利用已知的等式

$$(uv)'=u'v+uv',$$

或

$$uv'=(uv)'-u'v,$$

設 $u'v$ 或 uv' 中至少有一个具有原函数，則两边作不定积分的运算，即得

$$\int uv'\,dx=\int (uv)'\,dx-\int vu'\,dx,$$

即

$$\int uv'\,dx=uv-\int vu'\,dx$$

或

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

最后这个等式就称为分部积分公式。也称部分积分公式。一般說，适当的选擇 u, v 可使等式右边的积分要容易計算些。

[例 11] 求

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx.$$

利用分部积分法，有

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx&=x\cdot\operatorname{arc\,tg} x-\int x\,d(\operatorname{arc\,tg} x)\\&=x\cdot\operatorname{arc\,tg} x-\int\frac{x}{1+x^2}\,dx\\&=x\cdot\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.\end{aligned}$$

[例 12] 求

$$\int x^2\sin x\,dx.$$

利用分部积分法，有

$$\begin{aligned}\int x^2\sin x\,dx&=\int x^2d(-\cos x)\\&=-x^2\cos x-\int(-\cos x)\,dx^2\\&=-x^2\cos x+\int 2x\cos x\,dx.\end{aligned}$$

对等式右边的积分再施行分部积分法，即得

$$\int x^2 \sin x\,dx = -x^2\cos x + 2\int x d\sin x$$
$$= -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C.$$

[例 13]　求

$$\int xe^{ax}\,dx.$$

利用分部积分法，有

$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\int x\,de^{ax} = \frac{x}{a}e^{ax} - \frac{1}{a}\int e^{ax}\,dx$$
$$= \frac{x}{a}e^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax} + C = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + C.$$

分部积分法还有另一种作用，对某些积分利用若干次分部积分法后，常常会重又出现原来要求的那个积分，从而成为所求积分的一个方程式，解出这个方程（把原来要求的那个积分作为未知量），就得到所要求出的积分。我們下面举一些例来說明分部积分法的这一作用。

[例 14]　求

$$I = \int\sqrt{x^2+a^2}\,dx.$$

利用分部积分法，有

$$I = \int\sqrt{x^2+a^2}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$$
$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int\frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx + \int\frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$$
$$= x\sqrt{x^2+a^2} - I + a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C_1.$$

此时在等式右边重又出現了我們原来要求的那个积分 I，由此方程解出 I，把它移到等式的左边，有

$$2I = 2\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C_1,$$

从而得到

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{2}\cdot\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C,$$

其中 $C=\frac{1}{2}C_1$.

[例 15] 求

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx \text{ 及 } \int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

在这两个不定积分中，我們分别令

$$u=\cos bx,\ dv=e^{ax}dx$$

及

$$u=a\sin bx,\ dv=e^{ax}dx,$$

然后分别利用分部积分法得:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

这样一来，两个积分中的每一个积分都能用另一个积分来表达，由这两个式子解出，即得

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C.$$

同理可以証明:

$$\int\sec^3x\,dx=\frac{1}{2}[\sec x\operatorname{tg}x+\ln|\sec x+\operatorname{tg}x|]+C.$$

总結以上数例，可知凡属于以下类型的不定积分，利用分部积分法，常可求得:

$$\int x^k\ln^m x\,dx; \qquad \int x^k\sin bx\,dx;$$

$$\int x^k\cos bx\,dx; \qquad \int x^k e^{ax}\,dx;$$

$$\int P(x)e^{ax}dx; \qquad \int P(\sin x)e^{bx}dx;$$

$$\int P(x)\ln x\,dx; \qquad \int P(x)\sin mx\,dx;$$

$$\int P(x)\cos mx\,dx;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

这里 k, m 表示正整数, a, b 表示常数, $P(t)$ 表示多項式。

以上給出了一些求不定积分的方法，这些方法必須通过大量的练习才能牢固掌握。不定积分和求导数不一样，对于給定的一个初等函数，我們总可循着一定的方法去求得它的导数，但求不定积分就不是那末簡单，它并无一定的步驟可循，甚至有些函数根本不能用初等函数去表示它們的不定积分，最簡单的如

$$\int e^{-x^2}dx; \quad \int \frac{dx}{\ln x}; \quad \int \frac{\sin x}{x}dx$$

就是这样。

不过，对于某些特殊类型的积分，还是可以找出一般的积分步驟，下面将分段列出一些常見的不定积分法。

三、有理函数积分法

設 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是两个多項式，凡形如

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

的函数称为有理函数。以下考虑有理函数的积分

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx.$$

不妨設 $P(x)$ 的次数低于 $Q(x)$ 的次数，否則以 $Q(x)$ 除 $P(x)$，即可分解为多項式 $R(x)$ 与 $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ 之和。其中 $P_1(x)$ 的次数为低于 $Q(x)$ 的次数，而 $R(x)$ 的积分是毫无困难的，所以我們只要考虑眞分式的积分就够了。

我們先討論眞分式中的部分分式的积分，这就是下列四种类型的分式的积分：

1. $\int \frac{A}{x-a}\,dx$; 2. $\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx \quad (n=2, 3, \cdots)$;

3. $\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\,dx$; 4. $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\,dx \quad (n=2, 3, \cdots)$;

其中 A, B, C, a, p, q 都是常数，并設二次三項式 x^2+px+q 沒有实根，于是 $\frac{p^2}{4}-q<0$.

1, 2 两种类型的积分我們早已会求，它們分别为

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a|+C$$

及

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = -\frac{A}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C \quad (n=2, 3, \cdots).$$

对于 3, 4 两种类型的积分也可利用代换求出，我們先討論 3。由 x^2+px+q 分出完全平方项，从而有

$$x^2+px+q = x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left[q-\frac{p^2}{4}\right]$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

最后一个括号中的表达式为一正数，不妨記为 a^2，現在作代换

$$x+\frac{p}{2}=t,\ dx=dt,$$

于是

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{Bt+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)}{t^2+a^2}\,dt$$

$$= B\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2}$$

$$= \frac{B}{2}\ln(t^2+a^2)+\frac{1}{a}\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\mathrm{tg}^{-1}\frac{t}{a}+C.$$

其中 $\bar{C}$ 为任意常数，代回变量 x，就有

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\,dx$$
$$=\frac{B}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2C-Bp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{tg}^{-1}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+\bar{C}.$$

利用同样的代换可将 4 型的积分化为

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\,dx=\frac{B}{2}\int\frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^n}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

右边的第一个积分是容易算出的，它为

$$\int\frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^n}=-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}+C.$$

对于第二个积分，可求得如下的递推公式：

$$I_n=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^n}\,dt$$
$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{2a^2(n-1)}\int t\,d\left[\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}\right]$$
$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{1}{2a^2(n-1)}\int t\,d\left[\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}\right]$$
$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}}$$
$$-\frac{1}{2a^2(n-1)}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}$$
$$=\frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2(n-1)-1}{2a^2(n-1)}I_{n-1}.$$

我們已經算出过

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{a}+C_1;$$

于是依照上面这个递推公式，由已知的 I_1 可推出 I_2，为：

$$I_2=\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{t}{t^2+a^2}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{tg}^{-1}\frac{t}{a}+C_2;$$

$n=3$ 时，就可得到 I_3 为：

$$I_3=\frac{1}{4a^2}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^2}+\frac{3}{8a^4}\cdot\frac{t}{t^2+a^2}+\frac{3}{8a^5}\operatorname{tg}^{-1}\frac{t}{a}+C_1;$$

…………………………………………………………;

依次类推，就可得出我們所要求的积分。

有了以上这四种类型的积分，我們就可求得任何有理函数的积分，因为从代数学上知道，把眞分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 分解成部分分式后，积分 $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ 就不外是这四种类型积分之組合。

事实上，由于 $Q(x)$ 为实系数的多項式，所以

$$Q(x)=(x-a_1)^{\lambda_1}\cdots(x-a_k)^{\lambda_k}[x^2+p_1x+q_1]^{\nu_1}\cdots[x^2+p_nx+q_n]^{\nu_n}.$$

于是，从代数学中可以知道，每一个有理分式总可分解成簡单的部分分式之和：

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}&=\left[\frac{A_1^{(1)}}{x-a_1}+\frac{A_2^{(1)}}{(x-a_1)^2}+\cdots+\frac{A_{\lambda_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{\lambda_1}}\right]+\cdots\\&+\left[\frac{A_1^{(k)}}{x-a_k}+\frac{A_2^{(k)}}{(x-a_k)^2}+\cdots+\frac{A_{\lambda_k}^{(k)}}{(x-a_k)^{\lambda_k}}\right]\\&+\left[\frac{B_1^{(1)}x+C_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1}+\cdots+\frac{B_{\nu_1}^{(1)}x+C_{\nu_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\nu_1}}\right]+\cdots\\&+\left[\frac{B_1^{(n)}x+C_1^{(n)}}{x^2+p_nx+q_n}+\cdots+\frac{B_{\nu_n}^{(n)}x+C_{\nu_n}^{(n)}}{(x^2+p_nx+q_n)^{\nu_n}}\right],\end{aligned}$$

其中常数 $A_i^{(j)}$, $B_i^{(j)}$, $C_i^{(j)}$ 称为待定系数，它們可以用下面的方法来确定：

我們将上边等式的右端通分，即得恒等式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\equiv\frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

从而

$$P(x)=P_1(x).$$

而 $P_1(x)$ 为含有待定系数 $A_i^{(j)}$, $B_i^{(j)}$, $C_i^{(j)}$ 的 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k+2\nu_1+2\nu_2+\cdots+2\nu_n-1$ 次多項式。比較多項式 $P(x)$ 和 $P_1(x)$ 的同次幂的系数，可得到 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k+2\nu_1+2\nu_2+\cdots+2\nu_n$ 个綫性

方程，再利用部分分式理論可知，从这一方程組确实可以解出 $\lambda_1+\cdots+\lambda_k+2\nu_1+\cdots+2\nu_s$ 个待定系数。有时，对一些具体問題，还可以用某种特殊方法来确定待定系数，显得更为簡便，下面的例18就显示了这一点。由上可見，对有理函数的积分，可归結成以上四种类型的积分。

[例 16] 求积分

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}.$$

由于 $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$，应用待定系数法：

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a},$$

从而 $$1=(A+B)x+a(A-B).$$

比較两边同次冪的系数，可得

$$A=-B=\frac{1}{2a},$$

因此 $$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right).$$

于是，所求积分就是

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

[例 17] 求积分

$$\int\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx.$$

設 $$\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2},$$

右边通分后，再比較两端分子的同次冪系数得一綫性方程組：

$$A_1+B_1=0,$$

$$C_1-B_1=0,$$

$$2A+B_2+B_1-C_1=0,$$
$$C_2+C_1-B_2-B_1=2,$$
$$A-C_2-C_1=2.$$

解出这方程組，得：

$$A_1=1,\ B_1=-1,\ C_2=0,\ B_2=-2,\ C_1=-1.$$

所以

$$\int\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx=\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}-\int\frac{x+1}{x^2+1}\,dx$$
$$=\ln|x-1|+\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|$$
$$-\operatorname{arc\,tg} x+C.$$

[例 18] 求积分

$$\int\frac{x^3+2x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)^2}\,dx.$$

我們設

$$\frac{x^3+2x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}+\frac{D}{(x-3)^2},$$

右边通分，得

$$x^3+2x^2+1=A(x-2)(x-3)^2+B(x-1)(x-3)^2$$
$$+C(x-1)(x-2)(x-3)+D(x-1)(x-2).$$

如同前两个例題所做那样，由此比較两端同次冪的系数，然后解一組綫性方程，就可得到待定系数 A, B, C, D 之值。但是，我們这里将用另一种方法来求得，这一方法在一些特殊情况下比上一种办法更为簡便。我們在所得到的恒等式两边，首先令 $x=1$，即得

$$4=-4A,$$

即

$$A=-1,$$

然后，先后令 $x=2, 3$，即可得到

$$B=17,\ D=23,$$

为了得出 C，先在两边对 x 求导一次，然后再令 $x=3$，得到

$$C=-15,$$

从而有

$$\int\frac{x^3+2x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)^2}\,dx$$

$$=-\int\frac{dx}{x-1}+17\int\frac{dx}{x-2}-15\int\frac{dx}{x-3}+23\int\frac{dx}{(x-3)^2}$$

$$=-\ln|x-1|+17\ln|x-2|-15\ln|x-3|-\frac{23}{x-3}+C_1.$$

四、可有理化的积分

1. 形如 $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ 的积分。

此处及以后均以 $R(u,v)$ 記两个变量 u, v 的有理函数，此处就是討論被积函数为 x 与 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 的有理函数的积分。

令

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t,$$

或解出 x

$$x=\varphi(t)=\frac{b-dt^n}{ct^n-a},$$

于是积分就变成如下形状：

$$\int R(\varphi(t),\ t)\varphi'(t)dt,$$

由于 $\varphi(t)$ 及 $\varphi'(t)$ 均为有理函数，所以 $R(\varphi(t),t)\varphi'(t)$ 仍为有理函数，因此积分就已經化为有理函数积分的形状，由上段所述方法，就可最后求出这个积分了。

更一般些，对于形如

$$\int R\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \cdots, \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$$

的积分，作代换

$$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},$$

其中 n 是 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 的最小公倍数。与上面叙述相同地，可以化成一个有理函数的积分。

[例 19] 求积分

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}.$$

我們把它先改写成

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}=\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{x+1},$$

就化成本段所指出的类型了，于是，令

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=t,$$

就可将此积分有理化了，此时化得

$$\int\frac{-3}{t^3-1}\,dt.$$

再利用上段所述的部分分式法，即可求得此积分。

2. 形如 $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ 的积分。

这种类型的积分，也可以通过变换把它有理化。这种变换称为欧拉 (Euler) 变换。

(一)若 $a>0$，令

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\,x+t,$$

两边平方后可得

$$bx+c=\pm2\sqrt{a}\,xt+t^2,$$

从而有

$$x=\frac{t^2-c}{b\mp2\sqrt{a}\,t}.$$

这是一个有理函数，因此 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 即 $\sqrt{a}\,x\pm t$ 亦是 t 的有理函数。

在代换式中，不論取

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\,x+t \quad 或 \quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\,x-t$$

都能将积分有理化，但是根据具体問題的不同，采用这种或那种代换，将会使計算过程更为方便一些。

(二) 若 $c>0$，令

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c},$$

两边平方后消去 c，并約去 x，得到

$$ax+b=xt^2\pm2\sqrt{c}\,t$$

或

$$x=\frac{b\mp2\sqrt{c}\,t}{t^2-a}.$$

由同样的道理可知，作此代换就可使上列积分有理化。

(三) 若方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个实根 α 及 β，于是

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}.$$

令

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=t(x-\alpha),$$

两边平方后，并消去 $x-\alpha$，可得

$$a(x-\beta)=t^2(x-\alpha),$$

从而有

$$x=\frac{\alpha t^2-a\beta}{t^2-a}.$$

这就是所需要的代换，通过它可使上列积分有理化。

对于这种类型的积分，恒可用这三种欧拉代换之一来使之有理化；因为，如果 $ax^2+bx+c=0$ 有实根，那末第三种欧拉变换即可达到目的；如果沒有实根，那末必定 $b^2-4ac<0$，于是二次三項式

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right]$$

对一切 x 都与 a 同号，$a<0$ 时，根式 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 完全沒有实值，故一定 $a>0$，此时即可用第一种欧拉变换达到目的。这一結

果同时也說明了这样的事实：为了在所有可能情况下，把这种类型的积分有理化，只須欧拉第一、第三两种变换即已足够了。不过，由于某些具体問題的不同，有时使用第二种欧拉变换可以使計算更为簡便。

[例 20] 求积分

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}.$$

我們很容易看出，本例对上面三种情况都适合，但为了計算簡单起見，可令

$$\sqrt{x^2+3x+2}=-x+t,$$

于是
$$x+\sqrt{x^2+3x+2}=t,$$

$$x=\frac{t^2-2}{2t+3},$$

从而有
$$dx=\frac{2(t^2+3t-2)}{(2t+3)^2}\,dt.$$

代入积分，即得

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}=2\int \frac{t^2+3t-2}{t(2t+3)^2}\,dt.$$

这时积分就已有理化，然后利用部分分式法即可求得最后那个积分。

以上是就一般情形而言的，有些特殊情形，可不必利用欧拉变换，而可以通过更簡便的方法得出。

首先討論形如

$$I=\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

的积分。先把它分成两項，即

$$I=\frac{M}{2a}\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\left(N-\frac{bM}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

右端的第一个积分立刻可以求出，第二个积分可把根式内的二次

三項式配成完全平方，使成为

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}},$$

于是，視 a 及 $c-\dfrac{b^2}{4a}$ 之正、負情况，可将它化为形如

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad 或 \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$$

的积分，而对于它們，我們是容易求出的。

同理，对于形如

$$\int (Mx+N)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

的积分，也可化成两項之和：

$$\frac{M}{2a}\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,d(ax^2+bx+c)$$
$$+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx,$$

右端的第一个积分立即可以求得，而第二个积分亦可通过配方的办法組成

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad 或 \quad \int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx$$

中之一种类型。

[例 21]　求积分

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{-x^2-4x}}\,dx.$$

我們有

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{-x^2-4x}}\,dx=-\int \frac{d(-x^2-4x)}{\sqrt{-x^2-4x}}-3\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-4x}}$$
$$=-2\sqrt{-x^2-4x}-3\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$$
$$=-2\sqrt{-x^2-4x}-3\arcsin\frac{x+2}{2}+C.$$

3. 形如 $\int R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ 的积分。

对于含有三角函数的积分，由于 $\sec x$, $\csc x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ 都可化为 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的函数，所以我們可以只討論 $\int R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ 型的积分。其中 $R(x, y)$ 为 x, y 的有理函数。

作代换 $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=t$，就可将 $R(\cos\theta, \sin\theta)$ 化为 t 的有理函数，从而可以利用部分分式法求出积分，事实上，因为这时

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{\sec^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{\sec^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$d\theta=\frac{2dt}{1+t^2},$$

都是 t 的有理函数。

虽然，对于三角函数的积分作代换 $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=t$ 总可以将积分有理化，因而这个代换可以看作是万能的，但是有时利用这种代换常常是比較麻煩的。对于某些較特殊的函数可以作其他代换。

(一) 若 $R(\cos\theta, \sin\theta)$ 中以 $-\cos\theta$ 代 $\cos\theta$，原式仅改变符号，则令 $\sin\theta=t$，即可化为 t 的有理函数。

因为此时，在 $\frac{R(\cos\theta, \sin\theta)}{\cos\theta}$ 中用 $-\cos\theta$ 代 $\cos\theta$，其值不变，故为 $\cos^2\theta$, $\sin\theta$ 的有理函数，記为 $R_0(\cos^2\theta, \sin\theta)$，則

$$\begin{aligned}R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta&=R_0(\cos^2\theta, \sin\theta)\cos\theta\,d\theta\\&=R_0(1-\sin^2\theta, \sin\theta)d\sin\theta,\end{aligned}$$

这就达到了有理化的目的。这里 R_0 表示为两个变量的有理函数。

(二) 若 $R(\cos\theta, \sin\theta)$ 中以 $-\sin\theta$ 代 $\sin\theta$，原式仅改变符号，则令 $\cos\theta=t$，即可化为 t 的有理函数。

与上面一样的道理，因为此时 $\dfrac{R(\cos\theta, \sin\theta)}{\sin\theta}$ 为 $\cos\theta$，$\sin^2\theta$ 的有理函数，故

$$R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = R_0(\cos\theta, \sin^2\theta)\sin\theta\, d\theta$$
$$= -R_0(\cos\theta, 1-\cos^2\theta)d\cos\theta.$$

(三) 若 $R(\cos\theta, \sin\theta)$ 中同时以 $-\sin\theta$ 代 $\sin\theta$，$-\cos\theta$ 代 $\cos\theta$，原式的符号与数值均不改变，则令 $\operatorname{tg}\theta=t$ 即可有理化。

因为此时 $R(\cos\theta, \sin\theta)=R(\cos\theta, \operatorname{tg}\theta\cos\theta)=R_1(\cos\theta, \operatorname{tg}\theta)$，在 R_1 中以 $-\cos\theta$ 代 $\cos\theta$，其值不变，故可表示为 $\cos^2\theta$，$\operatorname{tg}\theta$ 的有理函数 $R_0(\cos^2\theta, \operatorname{tg}\theta)$ 或 $R_0\left(\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\theta}, \operatorname{tg}\theta\right)$。因而，令 $\operatorname{tg}\theta=t$ 就能化为 t 的有理函数。

此外，对于某些特殊情况，还可以不通过代换，而利用三角公式来简化。

对形如　$\int \sin mx\cos nx\,dx$，$\int \sin mx\sin nx\,dx$

或　$$\int \cos mx\cos nx\,dx$$

的积分，均可通过下面的关系式来简化，即

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x],$$

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x],$$

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x].$$

[例 22]　求积分

$$\int \sin mx\cos nx\,dx \quad (m\neq\pm n).$$

利用上面指出的三角公式中的第一个，我們有

$$\int \sin mx \cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \sin(m+n)x\,dx+\frac{1}{2}\int \sin(m-n)x\,dx$$

$$=\frac{1}{2(m+n)}\int \sin(m+n)x\,d(m+n)x$$

$$+\frac{1}{2(m-n)}\int \sin(m-n)x\,d(m-n)x$$

$$=-\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)}-\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)}+C.$$

类似地，对于以下这些特殊类型的积分都可以这样去做，如

$$\int \sin kx\cdot\cos mx\cdot\sin nx\,dx$$

或
$$\int \sin^2 mx\cos nx\,dx$$

等，可以两次或几次地用三角函数的积化和差的公式得到简化。

对于形如

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx$$

的积分，如果 m, n 都是偶数，则利用

$$\sin u\cos u=\frac{1}{2}\sin 2u,$$

$$\sin^2 u=\frac{1-\cos 2u}{2},$$

$$\cos^2 u=\frac{1+\cos 2u}{2}$$

等关系，即可求出。

如果 m, n 中有一个为奇数时，可以象下面所举的例 23 的方法来求得。

[例 23] 求积分

$$\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx.$$

我們有

$$\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx = -\int \sin^2 x\cos^2 x\,d\cos x$$

$$= -\int (1-\cos^2)\cos^2 x\,d\cos x$$

$$= \int \cos^4 x\,d\cos x - \int \cos^2 x\,d\cos x$$

$$= \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$$

［例 24］　求积分

$$\int \sin^4 x\,dx.$$

我們有

$$\int \sin^4 x\,dx = \int (\sin^2 x)^2\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1-2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[x-\sin 2x + \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin 4x\right] + C$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

对于一般情形，可如上面討論过的那样，通过代换来求得。

［例 25］　求积分

$$\int \frac{\operatorname{tg} x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\,dx.$$

在被积函数中，同时以 $-\sin x$ 代 $\sin x$，$-\cos x$ 代 $\cos x$，原式不变，故可作代换

$$\operatorname{tg} x = t,$$

于是

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},$$

$$\sin^2 x = \operatorname{tg}^2 x \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

故而积分变为

$$\int \frac{t}{a^2t^2+b^2}\,dt = \frac{1}{2a^2}\ln|a^2t^2+b^2|+C$$

$$= \frac{1}{2a^2}\ln|a^2\operatorname{tg}^2 x+b^2|+C.$$

[例 26]　求积分

$$\int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,dx \quad (0<r<1,\ -\pi<x<\pi).$$

作代換 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$，于是有

$$\int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,dx = (1-r^2)\int \frac{2\,dt}{(1-r)^2+(1+r)^2t^2}$$

$$=2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)+C$$

$$=2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

习　　題

1. 計算下列不定积分：

(1) $\int (3-x^2)^3\,dx$;

(2) $\int (a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)\,dx$;

(3) $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$;

(4) $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$;

(5) $\int \operatorname{tg}^{10} x\sec^2 x\,dx$;

(6) $\int e^{ax}\cdot 2^x\,dx$;

(7) $\int (2^x+3^x)^2\,dx$;

(8) $\int \operatorname{tg} x\,dx$;

(9) $\int \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}$;

(10) $\int (\alpha x^2+\beta)^\mu x\,dx\ (\mu\neq -1)$;

(11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$; (12) $\int \sin^5 x\,dx$;

(13) $\int \operatorname{tg}\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$; (14) $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$;

(15) $\int \csc x\,dx$; (16) $\int \frac{dx}{A^2\sin^2 x+B^2\cos^2 x}$;

(17) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$; (18) $\int \frac{dx}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$;

(19) $\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{1+\sin^4 x}\,dx$; (20) $\int \frac{\sin^2 x\cos x}{1+\sin^3 x}\,dx$;

(21) $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$; (22) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;

(23) $\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}\,dx$; (24) $\int \frac{1+\sin 2x}{\sin^2 x}\,dx$;

(25) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$; (26) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$;

(27) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,dx$; (28) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$;

(29) $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}\,dx$; (30) $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx$.

2. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$; (2) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$;

(3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; (4) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$;

(5) $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$; (6) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$;

(7) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$; (8) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\alpha x^2+\beta}}$;

(9) $\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha x^2+\beta^2)^3}}$; (10) $\int \frac{x\,dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}$;

(11) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5+x-x^2}}$; (12) $\int \sqrt{2+x-x^2}\,dx$;

(13) $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\,dx$.

3. 計算不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$;　　(2) $\int \frac{dx}{x^3+1}$;

(3) $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$;　　(4) $\int \frac{dx}{x^4+1}$;

(5) $\int \frac{x\,dx}{(x^2-b^2)^2}$;　　(6) $\int \frac{dx}{(x^2-3)(x^2+2)}$;

(7) $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,dx$;　　(8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$;

(9) $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$;　　(10) $\int \frac{dx}{Ax^2+2Bx+C}$　$(B^2-AC>0)$;

(11) $\int \sin mx \sin nx\,dx$;　　(12) $\int \cos mx \cos nx\,dx$;

(13) $\int (18x-4)\sqrt{9x^2+6x}\,dx$;

(14) $\int (18x-4)\sqrt{-9x^2-6x}\,dx$.

4. 計算下列类型的积分：

(1) $\int \ln x\,dx$;　　(2) $\int x^n \ln x\,dx$　(n为正整数)；

(3) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}\,dx$;　　(4) $\int \csc x\,dx$;

(5) $\int \cos(\ln x)\,dx$;　　(6) $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$;

(7) $\int x\cos^2 x\,dx$;　　(8) $\int x\sin^2 x\,dx$;

(9) $\int \arccos x\,dx$;　　(10) $\int (\arcsin x)^2\,dx$;

(11) $\int x\ln(x-1)\,dx$;　　(12) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$;

(13) $\int e^x \sin^2 x\,dx$;　　(14) $\int e^x \cos^2 x\,dx$.

5. 計算有理函数的积分：

(1) $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$;　　(2) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}$;

(3) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$;　　(4) $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}\,dx$;

(5) $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$;　(6) $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$;

(7) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$;　(8) $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

6. 有理化被积函数或求下列无理函数的积分:

(1) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$;　(2) $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$;

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[4]{x})^3}$;　(4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$;

(5) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$;　(6) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$　$(a>0)$;

(7) $\int \sqrt{2+x-x^2}\,dx$;　(8) $\int x\sqrt{x^4+2x^2-1}\,dx$;

(9) $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\,dx$;　(10) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$;

(11) $\int \frac{x\,dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$;　(12) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$;

(13) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{-3+4x-x^2}}$;　(14) $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2-3x+2}}\,dx$.

7. 求下列三角函数及其他超越函数的积分:

(1) $\int \sin^6 x\,dx$;　(2) $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$;

(3) $\int \sin^4 x\cos^4 x\,dx$;　(4) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,dx$;

(5) $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$;　(6) $\int \frac{dx}{\sin x\cos^4 x}$;

(7) $\int \sin 5x\cos x\,dx$;　(8) $\int \sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\,dx$;

(9) $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$;　(10) $\int \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}(x+a)\,dx$;

(11) $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$;　(12) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx$;

(13) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$;　(14) $\int xe^x\cos x\,dx$;

(15) $\int xe^x\sin x\,dx$;　(16) $\int x^2e^x\cos x\,dx$;

(17) $\int x^2 e^x \sin^2 x\, dx$;　(18) $\int x e^x \sin^2 x\, dx$;

(19) $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$;　(20) $\int \frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$;

(21) $\int \left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x\, dx$;　(22) $\int [\ln(x+\sqrt{1-x^2})]^2 dx$;

(23) $\int x \ln \frac{1+x}{1-x}\, dx$;　(24) $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx$;

(25) $\int x \operatorname{arctg} x \cdot \ln(1+x^2)\, dx$;　(26) $\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$;

(27) $\int \frac{\cos^3 x+1}{\sin^2 x}\, dx$;　(28) $\int \frac{a^x}{a^{2x}+1}\, dx$;

(29) $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x\, dx$;　(30) $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$;

(31) $\int |x|\, dx$;　(32) $\int (x+|x|)^2 dx$.

第二章 定积分概念

§1 定积分問題的提出及定积分的定义

在实踐中我們經常要計算这样或那样的量。例如，要計算一个由曲綫圍成的图形的面积，要計算一个几何体的体积，要計算一个质点在外力作用下移动时所作的功，要計算一个密度不均匀的物体的质量等等。以計算曲边形面积为例，所要計算的图形可以是很不規則的，怎么办呢？退一步，先求近似值，例如，設法将以曲綫为境界的区域分成一小块一小块，每一小块都可以近似地看作一个小矩形（图 3-2-1），而曲边形的面积也就可以近似地看作若干个小矩形的面积之和。換句話說，这些小矩形面积之和就是所要求的曲边形面积的近似值。可以想象，如果分割得越多，近似程度就越高。我們知道，

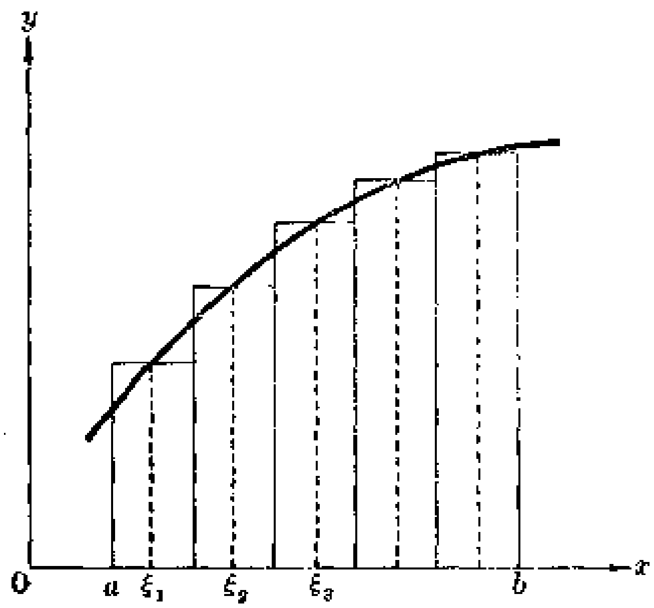


图 3-2-1

为了得出精确值，必須利用极限运算。大量的問題，尽管它們在表面上、形式上来看是各不相关、各不相同的，但是却提出了一个同样的要求：計算一个和式的极限，进行无穷小量的求和，这就是定积分概念。这种无穷小量求和的思想，很早就已被人們提出来了，阿基米德就用过这种想法求得曲边形 AOB 的面积（图 3-2-2）。

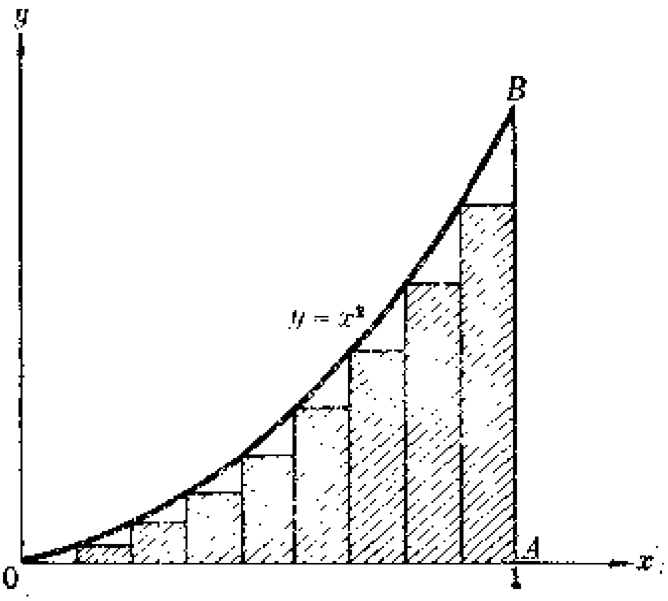


图 3-2-2

用下列各点

$$0,\ \frac{1}{n},\frac{2}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\ 1,$$

把区間 [0, 1] 分成 n 个相等的小段，我們算出有阴影的矩形面积之和，为

$$S_n=0\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2]$$

$$=\frac{1}{6n^3}(n-1)n(2n-1),$$

此值就可作为曲边形 OAB 面积的近似值。如要得出精确值，取极限 $n\to\infty$，即得

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}.$$

即曲边形 OAB 的面积为 $\frac{1}{3}$. 从图上可以看出，当 n 越大时，矩形面积之和 S_n 愈接近于曲边形的面积。这样，我們完成了初等数学所不能完成的事。

現在,我們再考慮下面的問題:設有一直綫段 AB,它上面分布有质量,但密度不是均匀的,設密度函数为 $f(x)$,我們該如何計算它的质量呢?

首先,还是求近似値,如图 3-2-3 所示,把綫段 AB 用点

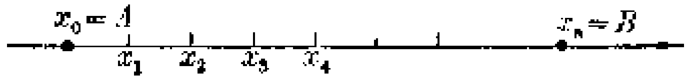


图 3-2-3

$$A=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=B$$

分成小段,在每一小段$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点 ξ_i,只要分得相当細,就可以設想,在整个区間 $[x_{i-1}, x_i]$ 上,每一点的密度可近似地看作是 $f(\xi_i)$,也就是說,在小区間$[x_{i-1}, x_i]$上,密度可近似地看作是均匀的,且密度为 $f(\xi_i)$,从而每一小段的质量近似地等于 $f(\xi_i)\Delta x_i$ $(\Delta x_i=x_i-x_{i-1})$,因此直綫段 AB 的总质量 m 可近似地看作这些质量之和,即

$$m\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

当分得越細时,近似程度就越高. 所以自然地就把质量的精确值看作是当所有的 $\Delta x_i\to0$ 时,那个和式的极限。从物理意义上来看,这个极限是存在的,因为质量是客观存在的。

許多实际問題,都归結到計算这样一种和式的极限。因此,有必要把那些問題經过数学抽象使它們統一地建立在严格的理論基础上。

定义 設在 $[a, b]$ 上定义一函数 $f(x)$,在$[a, b]$ 中任意插入若干个分点(这里插入 $n-1$ 个)

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

来划分区間$[a, b]$,这一分法記为 Δ,在每一个部分区間 $[x_{i-1}, x_i]$ 中任取一点 ξ_i,作和式

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i,$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，設 $\lambda(\Delta)$ 为 $\Delta x_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 中的最大数，即

$$\lambda(\Delta) = \max_{i=1, 2, \cdots, n} \{\Delta x_i\}.$$

若当 $\lambda(\Delta) \to 0$ 时，和式的极限存在，且此极限值不依賴于 ξ_i 的选擇，也不依賴于对 $[a, b]$ 的分法，就称此极限值为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分。

这一定义可以用"$\varepsilon-\delta$"的說法表述如下：

設有定数 I，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对任意的分法 Δ，不管 ξ_i 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 中如何选取，只要 $\lambda(\Delta) = \max\limits_{i=1, 2, \cdots, n} \{\Delta x_i\} < \delta$，便有

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i - I \right| < \varepsilon,$$

則称 I 是 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上的定积分，記为

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

数 a 和 b 分别称为积分的下限和上限，当上、下限都是常数时，定积分是常数。

和式 σ 称为 $f(x)$ 的积分和数，因为在历史上是黎曼(Riemann)首先在一般形式給出这一定义，所以也称为黎曼和数。在上述意义下的定积分，也叫做黎曼积分。

如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的定积分存在，我們就說 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积(黎曼可积)。

从所述定义可以推出以下的推論。

推論 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积，則 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 必定有界。

这是因为，若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 无界，則对任何一組分点 $a=x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$，这个函数至少会在其中某一部分区間

$[x_{i-1}, x_i]$ 上无界。因此，可在其上选取一点 ξ_i，而使 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 大于任意预先給定的数，随之可使和数 σ 也如此，从而和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 就不可能有有限的极限。所以，可积函数一定是有界的。这就是說，在上述的黎曼积分意义下，无界函数一定不可积。

最后，我們再来看一下定积分的几何意义。

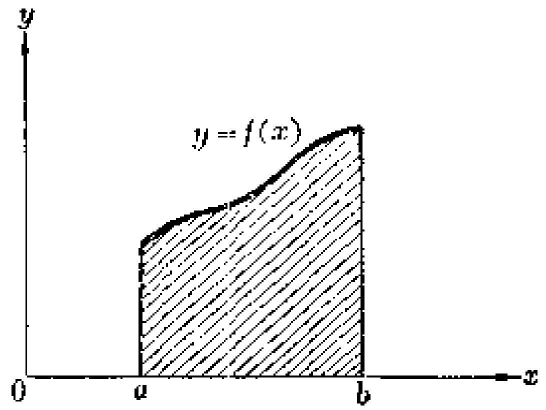


图 3-2-4

若 $y=f(x)$ 是一曲綫弧，且 $f(x)\geq 0$，则由定积分定义可知，$\int_a^b f(x)\,dx$ 就表示由曲綫 $y=f(x)$ 及直綫 $x=a, x=b, y=0$ 所圍成的曲边梯形（图 3-2-4 中带有阴影部分的图形）的面积。

最后，还要指出，从定义可以知道：$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ 以及 $\int_a^a f(x)\,dx = 0$。

§2 积分存在的充分必要条件

上面指出的定积分是一种和式的极限，但是，它在实际上不易計算，因此，我們从研究它的性质着手，进一步就討論它的計算方法，然后再叙述它的应用。为此，我們首先从理論上来研究一个函数在某一区間上的定积分存在的充分且必要条件。

設 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的有界函数。以分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

把 $[a, b]$ 分成 n 个小区間，設 M_i, m_i 分别为 $f(x)$ 在部分区間 $[x_{i-1}, x_i]$ 的上、下确界，作和

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

它們分别称为对于这一分法的大和与小和(也称作达布(Darboux)大和与达布小和，統称达布和数)。它們具有下面的一些性质。

定理1 若在原来的分点中加入新的分点，則大和不增，小和不减少。也就是說，如果加入新的分点后对应的大和及小和分别記为 S' 及 s'，則 $S'\leqslant S;s'\geqslant s$。

【証明】 設原有分点是 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，不失一般性，我們只就在 $[x_{i-1}, x_i]$ 中插入一个分点 x' 的情形加以証明。

設 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x']$ 及 $[x', x_i]$ 中的上确界分别为 M_{i1} 及 M_{i2}，則 $M_{i1}\leqslant M_i$，$M_{i2}\leqslant M_i$。所以

$$M_{i1}(x'-x_{i-1})+M_{i2}(x_i-x')\leqslant M_i(x_i-x_{i-1}).$$

但是在 S' 及 S 中其他的項却沒有变动，所以

$$S'\leqslant S.$$

在加入多个分点时，可以看作把分点一个一个地加进来的。同理可証 $s'\geqslant s$。

定理2 任一个小和 s 总不会超过任一个大和 S，即使是对应于不同分法的大和与小和。

【証明】 对于 $[a, b]$，設有两个完全独立无关的分法，其对应的和数分别記为 s_1 和 S_1，s_2 和 S_2，我們来証明 $s_1\leqslant S_2$。把两种分点并在一起，得到一个第三种分法，对应的和数記为 s_3 和 S_3，于是由定理1知，$s_1\leqslant s_3$，$S_3\leqslant S_2$，但是 $s_3\leqslant S_3$，所以 $s_1\leqslant S_2$。

定理3 对于一切分法，大和的集合 $\{S\}$ 有下界 $m(b-a)$，小和的集合 $\{s\}$ 有上界 $M(b-a)$。这里 M 及 m 分别为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的上确界及下确界。

【証明】 設 M_i 和 m_i 分别是 $f(x)$ 在某一分法的区間 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的上、下确界。那末有 $m_i\leqslant M$，$M_i\geqslant m$。因此这时有

$$S=\sum_{i=0}^{n}{}' M_i(x_{i+1}-x_i)\geqslant\sum_{i=0}^{n}{}' m(x_{i+1}-x_i)=m(b-a).$$

同理可証 $s\leqslant M(b-a)$.

根据定理 3，我們知道小和的集合 $\{s\}$ 有一上确界，記为 l，即 $l=\sup\{s\}$，再由定理 2，可知有 $l\leqslant S$，同理，大和的集合 $\{S\}$ 有一下确界 L，且 $L\geqslant l$，把所有这些事实联系起来，有

$$s\leqslant l\leqslant L\leqslant S.$$

現在我們进一步証明，上面指出的达布大和 $\{S\}$ 的下确界 L 及达布小和 $\{s\}$ 的上确界 l，正好就是这些和数的极限。这就是下面的定理。

定理 4（达布定理） 对任意的有界函数 $f(x)$，恒有

$$\lim_{\lambda\to 0}S=L,\ \lim_{\lambda\to 0}s=l.$$

【証明】 我們就大和的情形加以証明。

由于 L 是 $\{S\}$ 的下确界，所以对于任意 $\varepsilon>0$，可以对 $[a,\ b]$ 作一分法

$$a=x_0'<x_1'<\cdots<x_{p-1}'<x_p'=b,$$

使得对应于这一分法的大和 S' 滿足 $S'\geqslant L,\ S'<L+\frac{\varepsilon}{2}$，即

$$0\leqslant S'-L<\frac{\varepsilon}{2},$$

固定了 p 及 $\{x_i'\}$ 以后，可取

$$\delta=\min\left(x_1'-x_0',\ x_2'-x_1',\ \cdots,\ x_p'-x_{p-1}',\ \frac{\varepsilon}{2(p-1)(M-m)}\right),$$

其中 M 及 m 分別为 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 的上、下确界。

于是，为了得到所需的結論，只要証明，对任意的分法

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

只要 $\lambda<\delta$ 时，就成立

$$|S-L|=S-L<\varepsilon$$

即可。

事实上，合并以上两个分法的分点，作为新分法的分点，这样

得到一个新的分法，設其对应的大和为 S^*，那末，由于任一长度 $x_i - x_{i-1}$ 都要小于任一长度 $x'_j - x'_{j-1}$，所以在每一部分区間 (x_{i-1}, x_i) 内至多只有 $\{x'_j\}$ 中的一个点。又因 x'_0，x'_p 分别与 x_0，x_n 重合，因而它們不在 (x_0, x_1) 及 (x_{n-1}, x_n) 内，因之，含有 x'_j 的部分区間 (x_{i-1}, x_i) 最多只有 $p-1$ 个。另一方面，若 (x_{i-1}, x_i) 中不含有 x'_j 的点，則在 S 及 S^* 中都含有項 $M_i(x_i - x_{i-1})$，从而在差 $S-S^*$ 中只剩下 (x_{i-1}, x_i) 中含有 x'_j 点的那些項的差。設 (x_{i-1}, x_i) 中含有点 x'_j，而 M_{i1}，M_{i2} 分别为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x'_j]$ 及 $[x'_j, x_i]$ 的上确界，那末对于含有 x'_j 的这种部分区間 (x_{i-1}, x_i) 作和，得

$$\begin{aligned}0 \leqslant S - S^* &= \sum M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum[M_{i1}(x'_j - x_{i-1}) + M_{i2}(x_i - x'_j)] \\ &= \sum (M_i - M_{i1})(x'_j - x_{i-1}) + \sum (M_i - M_{i2})(x_j - x'_j) \\ &\leqslant (M-m)[\sum(x'_j - x_{i-1}) + \sum(x_i - x'_j)] \\ &= (M-m)\sum(x_i - x_{i-1}) \leqslant (M-m)(P-1)\lambda \\ &< (M-m)(P-1)\cdot\frac{\varepsilon}{2(P-1)(M-m)} = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

另一方面，由定理 1 有

$$S^* - L \leqslant S' - L < \frac{\varepsilon}{2},$$

于是，将上面的两个不等式相加，得

$$0 \leqslant S - L < \varepsilon.$$

定理从而得証。

类似地可証对于小和的情形。

从定理 4，我們可以得到定积分存在的充要条件，現叙述于下。

定理 5（定积分存在的第一充分必要条件） 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积的充分必要条件是

$$L = l.$$

即
$$\lim_{\lambda\to 0} S=\lim_{\lambda\to 0} s.$$

【証明】 先証必要性。設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积，則按定义，可設

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=I.$$

此处 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，亦即对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使对于任意的分法 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 及 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任意的点 ξ_i，只要 $\lambda=\max\limits_{i=1,2,\cdots,n}\{\Delta x_i\}<\delta$，就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

設 M_i 为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的上确界，按上确界定义，可得 $\eta_i\in[x_{i-1}, x_i]$，使

$$0\leqslant M_i-f(\eta_i)<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

于是

$$\left|S-\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i\right|=\sum_{i=1}^{n}(M_i-f(\eta_i))\Delta x_i$$
$$<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot(b-a)=\frac{\varepsilon}{2}.$$

同时，因为 $\eta_i\in[x_{i-1}, x_i]$，故

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i-I\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是有

$$|S-I|\leqslant\left|S-\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i\right|+\left|\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i-I\right|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

亦即
$$\lim_{\lambda\to 0} S=I.$$

同理可証

$$\lim_{\lambda\to 0} s=I.$$

由此可見，当$f(x)$可积时，L与l相等，而且就是$f(x)$在$[a,b]$上的积分值。

再来証充分性，設

$$\lim_{\lambda\to 0} S = \lim_{\lambda\to 0} s = I.$$

由S及s的定义可知，对任意的分法Δ:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

以及对$[x_{i-1}, x_i]$中任意的ξ_i，作成的积分和皆满足

$$s \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant S,$$

取极限$\lambda\to 0$，卽得

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I.$$

于是定理全部証毕。

由定理4知道，恒有

$$\lim_{\lambda\to 0}(S-s) = L-l.$$

所以积分存在的充要条件也可以叙述成如下的形式:

$f(x)$在$[a, b]$的积分存在的充分且必要条件是

$$\lim_{\lambda\to 0}(S-s) = 0,$$

卽对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，只要$\lambda(\Delta) = \max\limits_{i=1,2,\cdots,n}\{\Delta x_i\}<\delta$时，便有$S-s<\varepsilon$。

有时，我們記$\omega_i = M_i - m_i$，称为$f(x)$在$[x_{i-1}, x_i]$上的振幅。容易看出，$\omega_i = \sup|f(x'')-f(x')|$，$x''$, $x'\in[x_{i-1}, x_i]$，因之，上述充分必要条件$\lim\limits_{\lambda\to 0}(S-s)=0$可写成与之等价的形式

$$\lim_{\lambda(\Delta)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0,$$

这个形式的充要条件应用起来很为方便。

我們再来看一下极限式 $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0$ 的几何解释。如图3–2–5所示，考虑一块由曲綫 CD（設曲綫 CD 的方程为 $y=f(x)$，其中 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上非負的有界函数）和 x 軸以及直綫 $x=a$，$x=b$ 所圍成的曲边梯形 $ABCD$ 的面积 P。

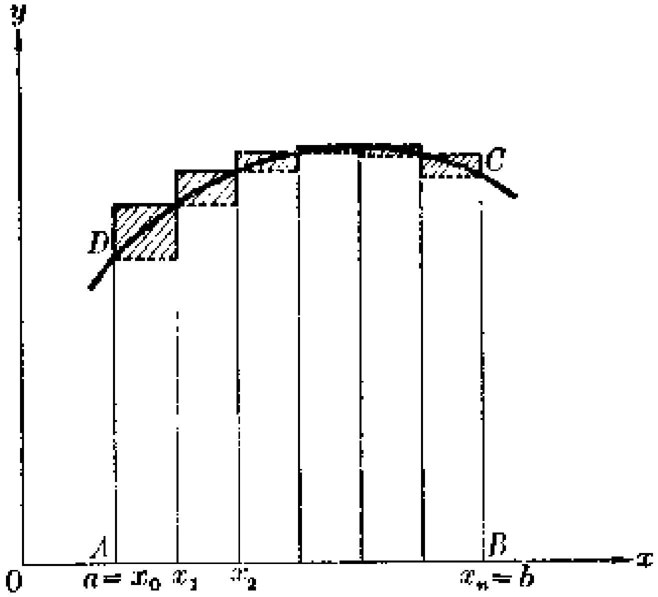


图　3–2–5

在 a 与 b 之間插入分点，将区間 $[a,b]$ 分成若干段，以 m_i 及 M_i 分别表示第 i 个部分区間 $[x_i, x_{i+1}]$ $(i=0,1,2,\cdots,n-1)$ 中 $f(x)$ 的下确界与上确界，組成达布和数

$$s=\sum_i m_i\Delta x_i,\quad S=\sum_i M_i\Delta x_i.$$

显而易見，它們分别是內含与外包的諸矩形所构成的阶梯图形的面积，而 $\sum\limits_i\omega_i\Delta x_i$ 就表示这两部分面积之差，亦即图3–2–5中有阴影部分的面积，定理5就是說，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积的充要条件是：当分点无限增多，分点越来越密时，这一部分面积趋于零。或者用求面积的話来說，就是图形 $ABCD$ 可求面积（即面积存在）的充分必要条件为：当分点无限增多，分点愈分愈密时，阴影部分的面积趋于零。

由此还可以看出，要使和式 $\sum\limits_i\omega_i\Delta x_i$ 趋于零，有两种可能，就是当 λ 充分小时，ω_i 都很小，或者 ω_i 不能很小，但这些有关的 Δx_i 之和很小，利用这一思想，我們可以推出另一个定积分存在的充分必要条件。

定理6（定积分存在的第二充分必要条件）　函数 $f(x)$ 在

$[a,b]$ 上可积的充分必要条件是：对任意給定的两个正数 $\varepsilon>0$ 及 $\sigma>0$，可找到 $\delta>0$，使当任一分法满足 $\lambda(\Delta)=\max\limits_{i=1,2,\cdots,n}\{\Delta x_i\}<\delta$ 时，对应于振幅 $\omega_i'\geqslant\varepsilon$ 的那些区間 $\Delta x_{i'}$ 的长度之和 $\sum\limits_{i'}\Delta x_{i'}<\sigma$。

这个定理說明了一个函数要是可积，对于 λ 充分小的分法，$f(x)$ 在每一个部分区間上的振幅不一定皆很小，但是它的振幅不能任意小的部分区間的长度总和不能太大，或者說函数不連續的范圍不能太广，它揭示了可积函数的本质。

【証明】 必要性：若 $f(x)$ 可积；則对于任一对数 $\varepsilon>0$ 及 $\sigma>0$，(从而 $\varepsilon\sigma>0$)，可找到 $\delta>0$，当 $\lambda(\Delta)=\max\limits_{i}\{\Delta x_i\}<\delta$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\sigma\varepsilon$，于是

$$\varepsilon\sum_{i'}\Delta x_{i'}\leqslant\sum_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\sigma\varepsilon,$$

所以

$$\sum_{i'}\Delta x_{i'}<\sigma,$$

其中 $\Delta x_{i'}$ 表示振幅 $\omega_i'\geqslant\varepsilon$ 的那些部分区間的长度，$\sum\limits_{i'}$ 表示对这些部分区間求和。

充分性：設 $\Delta x_{i''}$ 是使 $\omega_i<\varepsilon$ 的那些部分区間的长度，$\sum\limits_{i''}$ 表示对这些部分区間求和，以 Ω 記 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的振幅，于是有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i&=\sum_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'}+\sum_{i''}\omega_{i''}\Delta x_{i''}\\&<\Omega\sum_{i'}\Delta x_{i'}+\varepsilon\sum_{i''}\Delta x_{i''}\\&<\Omega\sigma+\varepsilon(b-a),\end{aligned}$$

由于 ε，σ 的任意性，所以 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i}\omega_i\Delta x_i=0$。定理由是得証。

現在，我們可以举一个不可积的函数的例子，即狄利克来函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时,}\\0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时,}\end{cases}$$

这函数在 $[0,1]$ 的任何部分区間上，振幅 $\omega=1$，从而就有 $\sum\omega_i\Delta x_i=1$，所以函数 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可积。

同样地，如果[0, 1]上的函数$f(x)$为

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时,}\\ -1, & \text{当 } x \text{ 是无理数时,}\end{cases}$$

这函数在任何部分区間上的振幅为 2，从而 $\sum \omega_i \Delta x_i=2$，所以在[0, 1]上也不可积。

利用定理 6 中的充要条件，也可以証明若有界函数$f(x)$在$[a,b]$内具有无穷多个不連續点，但这些不連續点存在一个极限点，那末$f(x)$在$[a, b]$上可积。例如若有界函数$f(x)$在$[-2, 2]$具有不連續点$x_n=\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, \cdots)$，则$f(x)$在$[-2, 2]$积分存在(参見习題 2)。

§3　可积函数类

利用上节引进的可积的充分必要条件，可以証明下面三类函数是可积的。

一、$[a, b]$上的連續函数在$[a, b]$上必可积

【証明】　在閉区間上連續的函数必定是一致連續的，所以对任意的$\varepsilon>0$，可找到$\delta>0$，使对于$[a, b]$上任意两点x', x''，只要$|x'-x''|<\delta$，就有$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{b-a}$。

把$[a, b]$分成部分区間Δx_i $(i=1, 2, \cdots, n)$，使$\lambda=\max\limits_i\{\Delta x_i\}<\delta$，显然

$$\omega_i<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

所以

$$S-s=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon.$$

这就証明了連續函数一定可积。

二、只有有限个第一类不連續点的有界函数是可积的

【証明】　設$f(x)$有k个不連續点：$x_1', x_2', \cdots, x_k'$，則对于任意的

$\varepsilon>0$ 及 $\sigma>0$，总存在适当小的 $\delta>0$，使 $\delta<\dfrac{\sigma}{2k}$，而对任何分法 Δ，当 $\lambda(\Delta)=\mathrm{Max}\{\Delta x_i\}<\delta$ 时，$f(x)$ 在不含有 x_i' $(i=1, 2, \cdots k)$ 的区間 $[x_{i-1}, x_i]$ 上振幅皆小于 ε，則 $f(x)$ 的振幅不小于 ε 的区間至多有 $2k$ 个，其长度总和小于 σ，按定理 6 便得証明。

只有有限个第一类不連續点的函数常常称为逐段連續函数，上述証明說明逐段連續的有界函数必定是可积的。

推論　用类似的方法可以証明在 $[a,b]$ 上的两个函数，如果只在有限个点处具有不同的函数值，而其中的一个函数可积，那末另一个函数也可积，且积分之值相同。因而，对于一个可积函数变动它的有限个点的值，可积性不变，积分之值也不变(参見习題 3)。

三、单調有界函数必定可积

【証明】　設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 为单調上升的，則 $f(b)>f(a)$，对任意的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$，对 $[a, b]$ 作一分法 Δ，使得 $\lambda(\Delta)=\max\{\Delta x_i\}<\delta$，記 M_i 及 m_i 分別为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 的上、下确界，由于 $f(x)$ 为单調上升的，所以 $M_i=f(x_i)$，$m_i=f(x_{i-1})$，于是：

$$S-s=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_i-1)]$$

$$=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}[f(b)-f(a)]=\varepsilon,$$

这就証明了 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 为可积。

現在我們再举一个可积函数的例子，即黎曼函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & \text{当 } x \text{ 为既約眞分数 } \dfrac{p}{q} \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为 } [0, 1] \text{ 上其他点时}.\end{cases}$$

先考察 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 的連續性。設 x_0 是 $[0, 1]$ 中任一点，可以証明，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，即对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-0|<\varepsilon$。

事实上，若 $x\neq\dfrac{p}{q}$，即 x 为无理数时，那末由于此时 $f(x)=0$，所以显然有

$|f(x)-0|<\varepsilon$;

若 $x=\dfrac{p}{q}$，那末由于 q 是正整数，所以对于任意的 $\varepsilon>0$，使 $\dfrac{1}{q}>\varepsilon\left(\text{即 } q<\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$的 q 值只可能是有限个，設为 m 个；同时因为 $\dfrac{p}{q}<1$，从而以小于 $\dfrac{1}{\varepsilon}$ 的正整数 q 为分母的有理点 $\dfrac{p}{q}$ 也只可能是有限个，設为 $x_1, x_2, \cdots, x_l$；于是在$[0, 1]$中除了这有限个点之外，都使 $f(x)=\dfrac{1}{q}<\varepsilon$，因之对于$[0, 1]$中的任一点 x_0，如果取 $\delta=\min(|x_1-x_0|, |x_2-x_0|, \cdots, |x_l-x_0|)$，那末从上面的討論可知，对任意的 $\varepsilon>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，就有

$$|f(x)|=|f(x)-0|<\varepsilon,$$

这样就証实了 $f(x)$ 在$[0, 1]$中每一点的极限値是零。这一事实，从图形上可以更容易明了，图 3-2-6 中仅画出一部分点的情况。

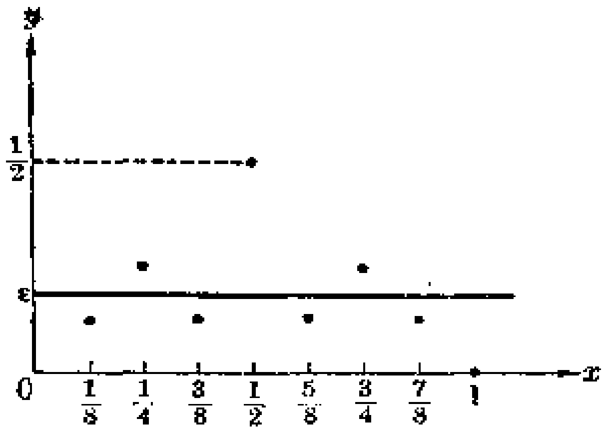


图　3-2-6

由此可見，$f(x)$在所有 $x=\dfrac{p}{q}$ 的点不連續$\left(\text{因为此时 } f\left(\dfrac{p}{q}\right)=\dfrac{1}{q}\neq 0\right)$，而在$[0,1]$中的其他点連續。或者說，黎曼函数在所有无理点处为連續，在有理点处为不連續。

我們还可以証明一个有趣的事实，虽然这个函数具有无穷多个不連續点，但在$[0, 1]$仍然是可积的。

这是因为对任意正数 $\varepsilon>0$ 由剛才的討論知道，使得 $f(x)\geqslant\varepsilon$的那些 x 只有有限多个，設为 $x_1', x_2', \cdots x_k'$ 共 k 个，这里 k 与 ε 有关。今取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{k}$，那么对$[0, 1]$上的任何分划 Δ，当 $\lambda(\Delta)=\max\limits_i\{\Delta x_i\}<\delta$ 时，那些使 $\omega_i\geqslant\varepsilon$ 的区間$[x_{i-1}, x_i]$ 也就是包含有 x_i' $(i=1, 2, \cdots, k)$ 的区間，这种区間至多有 $2k$ 个，而每一个区間的长度 $\Delta x_i\leqslant\lambda(\Delta)<\delta=\dfrac{\varepsilon}{k}$，于是，使 $\omega_i\geqslant\varepsilon$ 的区間长度之和

$$\sum_{i'}\Delta x_{i'}<2k\cdot\delta=2\varepsilon,$$

再应用定积分存在充要条件(定理 6)，証明了黎曼函数的可积性。

此外，由于黎曼函数在$[0, 1]$上的小和 $s=0$，于是有：

$$\int_0^1 f(x)\,dx=0.$$

§4 可积函数的性质

以上我們討論了积分存在的充分必要条件以及几个可积函数类，它們可以用来判断函数在給定区間上的可积性。这一节中，我們将进而考察可积函数具有那些性质，它們对于判定可积性及积分計算常常是很有帮助的。

定理 1 若$f(x)$在$[a, b]$上可积，k为实数，則$kf(x)$也可积，且有

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

【証明】 由于$\int_a^b f(x)\,dx$存在，故有

$$\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

由是

$$\begin{aligned} k\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) &= k\left(\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum f(\xi_i)\,\Delta x_i\right) \\ &= \lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum[kf(\xi_i)]\,\Delta x_i \\ &= \int_a^b kf(x)\,dx. \end{aligned}$$

这就是說，当$\lambda(\Delta)\to 0$时，和式$\sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\,\Delta x_i$的极限也存在，且等于

$$k\int_a^b f(x)\,dx.$$

定理 2 若$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上可积，則$f(x)\pm g(x)$在$[a,b]$上也可积，且

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

类似于定理 1，可由定积分的定义証得。

定理 3 若$f(x)$，$g(x)$在$[a, b]$上可积，則$f(x)\cdot g(x)$在$[a, b]$上也可积。

【証明】 由假設 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 均可积，所以必为有界，設 $|f(x)|\leqslant M$, $|g(x)|\leqslant M$, M 为常数，在区間 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取两点 x', x''，考虑

$$f(x'')g(x'')-f(x')g(x')$$
$$=[f(x'')-f(x')]g(x'')+[g(x'')-g(x')]f(x').$$

我們分別用 ω_i 及 ω_i' 表示 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅，則

$$|f(x'')g(x'')-f(x')g(x')|\leqslant\omega_iM+\omega_i'M,$$

若 $f(x)g(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅为 Ω_i，就有

$$\Omega_i\leqslant\omega_iM+\omega_i'M,$$

从而有

$$\sum_i\Omega_i\Delta x_i\leqslant M\sum_i\omega_i\Delta x_i+M\sum_i\omega_i'\Delta x_i.$$

由于 $f(x)$, $g(x)$ 可积，有

$$\sum_i\omega_i\Delta x_i\to0,\ \sum_i\omega_i'\Delta x_i\to0\quad(\lambda(\Delta)\to0),$$

所以
$$\sum_i\Omega_i\Delta x_i\to0\quad(\lambda(\Delta)\to0).$$

这就証明了 $f(x)\cdot g(x)$ 在 $[a, b]$ 上的可积性。

对复合函数可积性的討論，参見习題 6。

定理 4 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，則 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上也可积。

$|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上可积时，我們称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上为絕对可积的。

【証明】 分別把函数 $f(x)$ 与 $|f(x)|$ 在区間 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅記作 ω_i 与 ω_i^*。因为对属于 $[x_{i-1}, x_i]$ 的任意两点 x', x''，有

$$||f(x')|-|f(x'')||\leqslant|f(x')-f(x'')|,$$

因而有 $\omega_i^*\leqslant\omega_i$，所以

$$\sum_i\omega_i^*\Delta x_i\leqslant\sum_i\omega_i\Delta x_i.$$

由 $\sum_i\omega_i\Delta x_i\to0\quad(\lambda(\Delta)\to0)$，可推得 $\sum_i\omega_i^*\Delta x_i\to0\quad(\lambda(\Delta)\to0)$，所

以 $|f(x)|$ 也可积。

但是，本定理之逆不一定成立，也就是説，絕对值可积的函数，其本身不一定可积。例如 $[0, 1]$ 上的函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数时},\\ -1, & x\text{ 为无理数时}\end{cases}$$

就是这样的函数。

定理 5 若 $a<c<b$，$f(x)$ 在 $[a, c]$，$[c, b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上也可积，并成立

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

反之，若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a, c]$ 与 $[c, b]$ 上也同时可积，并成立上面的等式。

【証明】 如果 c 是分法 Δ 的一个分点，显然 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的黎曼和就是 $f(x)$ 分别在 $[a, c]$，$[c, b]$ 上的黎曼和之和。如果 c 不是分点，因为 $f(x)$ 有界，所以对任意 $\varepsilon>0$，一定可以找到 c 点的一个小邻域 $O(c, \delta)$，使得 $|f(x)|$ 在 $O(c, \delta)$ 内的上确界与 2δ 之积小于 ε，此时，对于 $\max\limits_i\{\Delta x_i\}<\dfrac{\delta}{2}$ 的任一种分法，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的黎曼和与 $f(x)$ 分别在 $[a, c]$，$[c, b]$ 上的黎曼和的和之差不超过 ε，所以，取极限后有

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

定理 5 由是得証。

定理 6 若可积函数 $f(x)\geqslant 0$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx\geqslant 0.\quad (\text{这里 } a<b)$$

【証明】 可由 $\int_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum\limits_i f(\xi_i)\Delta x_i\geqslant 0$ 証得。

由此可知，若函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a, b]$ 均为可积，且有 $f(x)$

$\leqslant g(x)$，則

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx.$$

进一步尙有：若$f(x)$在$[a, b]$非負且連續，$f(x)\not\equiv 0$，那么其积分必大于零（参見习題7）。

定理7　若$f(x)$在$[a, b]$上可积，則

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

【証明】　事实上，$-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant |f(x)|$，所以

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b |f(x)|dx, \qquad (*)$$

从而就得
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

注意，这里是假定$a<b$的，如果$a>b$，則不等式$(*)$要反向，一般地，有

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \left|\int_a^b |f(x)|dx\right|.$$

定理8（积分第一中値定理）　若$f(x)$在$[a, b]$上連續，$g(x)$在$[a, b]$上不变号，而在$[a, b]$上可积，則在(a, b)中存在一点ξ，使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

【証明】　設$g(x)\geqslant 0$，記$f(x)$在$[a, b]$上的上、下确界分别为M，m，則对任意的x，都有

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x),$$

所以
$$m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx.$$

因之在m，M中有一个μ，使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx.$$

由$f(x)$的連續性，可知在$[a, b]$上必存在一点ξ，使$f(\xi)=\mu$。所以

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

定理証毕。

作为特殊情况，当 $g(x)=1$ 时，定理变成：若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續，则在 $[a, b]$ 中存在一点 ξ，使

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a).$$

这个定理的几何意义为可求得一个以 $\overline{ab}$ 为一边的矩形 $abCD$，使其面积和曲边梯形 $abBF$ 的面积相等（如图 3-2-7）。

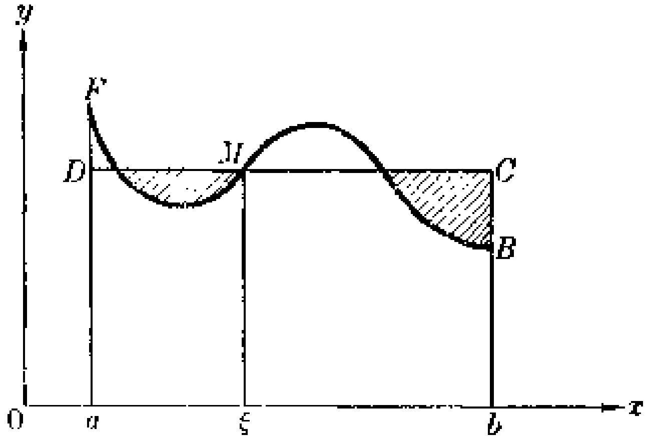


图 3-2-7

通常称 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 为函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上的平均值，这个概念可以看为有限个数的平均值概念的拓广。

定理 9 設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 是在 $[a, b]$ 上的連續函数。

【証明】 設 x 是 $[a, b]$ 上任一点，同时由假設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，所以 $f(x)$ 有界，設 $|f(x)|\leqslant M$（M 为常数），于是

$$\begin{aligned}|F(x+\Delta x)-F(x)|&=\left|\int_a^{x+\Delta x}f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\right|\\&=\left|\int_x^{x+\Delta x}f(t)\,dt\right|\\&\leqslant\left|\int_x^{x+\Delta x}|f(t)|\,dt\right|\leqslant M|\Delta x|,\end{aligned}$$

从而当 $\Delta x\to 0$ 时，$|F(x+\Delta x)-F(x)|\to 0$，这就証明了 $F(x)$ 的連續性。

§5　定积分的計算

一、牛頓-莱伯尼兹公式

現在，我們来研究怎样計算定积分。当然，定积分作为和式的极限，从定义出发，通过求极限，也可以算出定积分之値，例如計算

$$I=\int_a^b x\,dx,$$

由于 $f(x)=x$ 在 $[a,\ b]$ 連續，所以由 §3 知道它在 $[a,\ b]$ 可积，因而对任一分法 Δ 和任取的 ξ_i，任一个积分和式 $\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 均以 I 为极限，因之，我們不妨把 $[a,\ b]$ n 等分：$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，$\Delta x_i=\dfrac{b-a}{n}$，幷取 ξ_i 为 x_i 或 x_{i-1}，則按定义有

$$\begin{aligned}I&=\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^n x_i(x_i-x_{i-1})=\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^n x_{i-1}(x_i-x_{i-1})\\&=\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n(x_i+x_{i-1})(x_i-x_{i-1})\\&=\frac{1}{2}\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^n(x_i^2-x_{i-1}^2)=\frac{1}{2}(b^2-a^2).\end{aligned}$$

亦即

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{2}(b^2-a^2).$$

由此可見，利用定义来計算定积分，即使象 x 那样簡单的初等函数，已經是如此冗繁，幷且看来对每一个函数还須建立一种特殊的計算方法，因此有必要建立一个計算定积分的簡便而統一的方法。

从定积分的定义，可以知道，由已知速度来求物体在某一段时間內走过的路程的問題，可以化为定积分的問題。事实上，如果已知物体运动的速度为 $v(t)$，則这一物体由 0 到 T 这段时間中所走

的路程就是

$$S(T)=\int_0^T v(t)\,dt.$$

另一方面，在第二篇第一章中，我們已經知道物体运动时路程关于时間的导数就是它的运动速度，換句話說，在积分 $S(T)=\int_0^T v(t)dt$ 中，如果把 T 看作变量，它是 T 的函数，从而应該有 $\frac{dS(T)}{dT}=\frac{d}{dT}\int_0^T v(t)dt=v(T)$，从这里似乎說明这样一个事实：若把定积分的上限看作变量，則它关于这一变量的导数就等于被积函数中以其上限变量代入后之值。那末，是否对一般的函数来說，积分与导数之間都有这样的关系呢？事实正是这样，这就是下面的定理。

定理 1 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积，且在 $[a, b]$ 上某点 x_0 連續，則函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

在点 x_0 处的导数存在且等于 $f(x_0)$.

【証明】 因为

$$\left[\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt\right]_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_a^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^{x_0} f(t)\,dt}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x},$$

設 $f(x)$ 在 $[x_0, x_0+\Delta x]$ （若 $\Delta x>0$）或 $[x_0+\Delta x, x_0]$ （若 $\Delta x<0$）上的上、下确界分别为 M 及 m，μ 为 M 及 m 之間的某一值，則由积分第一中值定理，有

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt=\mu\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt=\mu\Delta x,$$

因为 $f(x)$ 在 x_0 連續，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\mu=f(x_0),$$

于是代入上式，即得

$$F'(x_0)=\left[\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt\right]_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mu\Delta x}{\Delta x}=f(x_0).$$

定理証毕。

于是，若 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的連續函数，則对 $[a, b]$ 上每一点 x，均有

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x).$$

从这里可以看到，計算定积分的問題就是对一个給定的函数 $f(x)$，要求一个函数 $F(x)$，使得 $F'(x)=f(x)$，这就自然地与求原函数的問題結合起来了。

如果已經知道 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$，就很容易計算 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的定积分，而不需要經过极限运算，因为定积分 $\int_a^x f(t)dt$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，所以

$$\int_a^x f(t)dt=F(x)+C,$$

其中 C 是一个确定的常数，可如下所述来确定它，在上式中令 $x=a$，于是左端为零，即得 $C=-F(a)$，从而有

$$\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a).$$

当 $x=b$ 时，得到

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a),$$

它通常称为牛頓-萊伯尼茲(Newton-Leibniz)公式，有时也記为

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b,$$

記号 $F(x)\Big|_a^b$ 就是 $F(b)-F(a)$ 的一种表示法。这一公式建立了定积分与不定积分之間的联系，由是定积分的計算就归結为寻求

原函数的問題，使我們有可能利用上一章的简单积分表及积分法求得定积分之值。

[例 1] 計算 $\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}$.

我們容易求得

$$\int_1^2 \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\ln|2x-1|\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\ln 3.$$

[例 2] 求曲綫 $y=x^2$, x 軸和直綫 $x=1$ 之間所圍的曲边形面积 S(图 3-2-8)。

由上面指出的定积分的几何意义，并利用牛頓-萊伯尼茲公式，容易求得

$$S=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

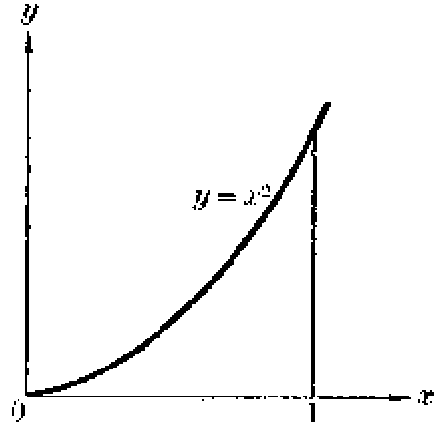


图 3-2-8

[例 3] 火箭在空中飞行时，以常速度 c 噴出气体，火箭的质量为 m(要注意到因为不断地排出气体，从而火箭的质量是不断地减少着的)。在火箭剛开始飞行时它的质量是 m_0，求在飞行过程中火箭的质量和速度的关系。

火箭飞行时，每一时刻都将排出气体，若在 Δt 时間内排出的气体质量是 Δm，也就是火箭质量的改变量，因此，在每一瞬时的质量变化率为 $\left|\frac{dm}{dt}\right|$，而以速度 c 排出气体，所以推力为 $\left|c\frac{dm}{dt}\right|$，火箭向前飞行的加速度为 $\frac{dv}{dt}$，所以

$$\left|c\frac{dm}{dt}\right| = m\frac{dv}{dt}, \quad 即 -c\frac{dm}{dt} = m\frac{dv}{dt}$$

$\left(因为火箭质量 m 总是不断减少的，所以 \frac{dm}{dt}<0\right)$. 由此得到

$$\frac{dm}{m}=-\frac{dv}{c}.$$

把等式两边求定积分，并注意到由假設当 $m=m_0$ 时 $v=0$，于是有

$$\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m}=\int_0^v-\frac{dv}{c},$$

算出之，得
$$\ln\frac{m}{m_0}=\frac{-v}{c},$$

所以
$$\frac{m_0}{m}=e^{\frac{v}{c}}.$$

这就是火箭飞行学中的一个基本公式。

有了牛頓-萊伯尼玆公式，再利用不定积分的换元法及分部积分法，就可以建立定积分的换元公式及分部积分公式，現分別叙述于下。

二、定积分的换元公式

定理 2 設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 連續，$x=\varphi(t)$；$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，同时 $\varphi'(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上連續且 $\varphi'(t)$ 在 (α, β) 内保持定号，則

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

【証明】 若 $\int f(x)dx=F(x)+C$，按照上一章 §2 的定理 1，則有

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+C.$$

所以
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx&=F(b)-F(a)\\&=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))\\&=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,\end{aligned}$$

定理証毕。

（注） $\varphi'(t)$ 保号的条件說明当 x 从 a 单調地变到 b 时，t 单調地从 α 变到 β；同样地，如果 $\varphi'(t)\geqslant 0$ 或 $\varphi'(t)\leqslant 0$ 但等号只在

有限个 t 之值成立时，换元法仍然成立。

作代换时，通常 α,β 由 $a=\varphi(\alpha)$，$b=\varphi(\beta)$ 决定，当 $\varphi^{-1}(x)$ 非单值时，α,β 不一定是唯一的，但我們可以选取 $\varphi^{-1}(x)$ 的一个单值支来計算，只要它們满足定理的条件即可，例如以下的例 4 所表明的。

[例 4] 計算 $\int_1^4\sqrt{x}\,dx$.

这个积分很容易直接計算，但为了表明如何作代换，我們用代换 $x=t^2$ 来計算它。此时反函数为 $t=\pm\sqrt{x}$，不是单值的，但我們可任取其一支 $t=\sqrt{x}$，故有

$$\int_1^4\sqrt{x}\,dx=2\int_1^2 t\sqrt{t^2}\,dt=2\int_1^2 t^2dt=\frac{2}{3}t^3\Big|_1^2=\frac{14}{3};$$

如果所选一支为 $t=-\sqrt{x}$，須要注意的是当 $t<0$ 时 $\sqrt{t^2}=-t$. 故应有

$$\int_1^4\sqrt{x}\,dx=2\int_{-1}^{-2}t(-t)dt=-\frac{2}{3}t^3\Big|_{-1}^{-2}=\frac{14}{3}.$$

下面我們再举若干利用换元法計算定积分的例。

[例 5] 計算 $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

此处必須 $|x|\leqslant a$，所以作代换 $x=a\sin t$，当 t 由 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，x 由 0 变到 a，所以

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

[例 6] 計算 $\int_a^{2a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\,dx$.

作代换 $x=a\sec t$，于是当 t 由 0 变到 $\frac{\pi}{3}$ 时，x 由 a 变到 $2a$，所以

$$\int_a^{2a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx=\frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2t\cos tdt$$

$$=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\sin^3t}{3}\bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{8a^2}.$$

[例 7] 計算

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}dx.$$

在后一积分中作代換 $x=\pi-t$，于是可改写为：

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2t}dt.$$

因此所求积分为：

$$\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\cos^2t}dt=-\pi\,\mathrm{arc\,tg}(\cos t)\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

三、定积分的分部积分公式

对于定积分的分部积分法可叙述如下：

若 $u'(x)$，$v'(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續，則

$$\int_a^b uv'dx=[uv]\bigg|_a^b-\int_a^b u'vdx.$$

[例 8] 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx.$

記此积分为 I_n，則有

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x(\cos x)'dx$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x(\sin^{n-1}x)'dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2xdx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,dx$$

$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

于是有
$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

同理可推得
$$I_{n-2} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

現在分两种情况来討論:

1. n 是偶数:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2} I_{n-4} = \cdots$$

$$= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} I_0$$

$$= \frac{(n-1)(n-3)\cdots3\cdot1}{n(n-2)\cdots4\cdot2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot dx$$

$$= \frac{(n-1)(n-3)\cdots3\cdot1}{n(n-2)\cdots4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

2. n 是奇数:

$$I_n = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot I_1$$

$$= \frac{(n-1)(n-3)\cdots4\cdot2}{n(n-2)\cdots5\cdot3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$$

$$= \frac{(n-1)(n-3)\cdots4\cdot2}{n(n-2)\cdots5\cdot3}.$$

四、杂例

这里再举几个有关定积分計算的例子。

下面的第一个例子表明，既然定积分是一种特殊的和式的极限，那么，当我們要計算某一类特殊的和式极限时，亦可以把它化为定积分来計算。

[例 9] 計算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$.

作出函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$，易知它在[0, 1]上是可积的，因而，对[0, 1]的任一分法及任意选取 ξ_i 所作的黎曼和 $\sum\limits_i f(\xi_i)\Delta x_i$ 当 $\lambda(\Delta)=\max\limits_i\{\Delta x_i\}\to 0$ 时，极限总是存在的，因此，我們不妨把[0, 1]作 n 等分，記分点为 $x_i=\frac{i}{n}$ $(i=0, 1, \cdots, n)$，此时 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$，同时，特别地把 ξ_i 选取为 x_i，于是

$$f(\xi_i)\Delta x_i=f(x_i)\Delta x_i=\frac{n}{n+i}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n+i},$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

当 $\lambda(\Delta)\to 0$ 时，$n\to\infty$，于是，在上式两边取极限 $n\to\infty$，則左边应趋于 $f(x)$ 在[0, 1]上的定积分，于是有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\&\qquad=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2.\end{aligned}$$

下面我們再举几个利用积分第一中值定理以估計定积分之值，以及利用被积函数的性质以簡化定积分計算的例子，在今后的运算中，我們将会常常用到它們。

[例 10] 利用积分第一中值定理估計积分 $\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}dx$.

由第一中值定理，存在 $0<\xi<100$，使

$$\begin{aligned}\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}dx&=e^{-\xi}\int_0^{100}\frac{dx}{x+100}\\&=e^{-\xi}[\ln 200-\ln 100]\\&=e^{-\xi}\ln 2<\ln 2.\end{aligned}$$

[例 11] 应用第一中值定理求极限值

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx.$$

由第一中值定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{n\to\infty}\sin\xi\ln\frac{n+p}{n}=0.$$

[例 12] 若 $f(x)$ 是偶函数，则

$$\int_{-l}^{+l}f(x)dx=2\int_0^l f(x)dx;$$

若 $f(x)$ 是奇函数，则

$$\int_{-l}^{+l}f(x)dx=0.$$

証明是很容易的，由于

$$\int_{-l}^{+l}f(x)dx=\int_{-l}^{0}f(x)dx+\int_0^{+l}f(x)dx,$$

在右端的第一个积分中作代换 $x=-t$，則有

$$-\int_l^0 f(-t)dt=\int_0^l f(-t)dt,$$

于是当 $f(x)$ 是偶函数时，由于 $f(-t)=f(t)$，从而得到第一个等式；当 $f(x)$ 是奇函数时，由于 $f(-t)=-f(t)$，从而得到第二个等式。

讀者不难从图形上看出这两个等式的几何意义。

[例 13] 若 $f(x)$ 是周期为 T 的連續函数，則

$$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx,$$

其中 a 为任意常数，这一等式指出，周期为 T 的函数，在任一长度为 T 的区間上的积分值都相等。

为了証明这一等式，把积分改写成如下形式：

$$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)dx+\int_T^{a+T}f(x)dx.$$

在右端最后一項积分作代换，令 $x=t+T$，于是变成

$$\int_T^{a+T} f(x)dx=\int_0^a f(t+T)dt \quad \int_0^a f(t)dt=-\int_a^0 f(t)dt,$$

代入上式即得証。

[例 14] 周期为 T 的可积函数 $f(x)$ 的积分 $\int_a^x f(t)\,dt$，仅当 $\int_a^{a+T} f(t)dt=0$ 时才是周期函数(参見习題 15)。

事实上：

$$\int_a^{x+T} f(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+T} f(t)dt.$$

而后一积分为零。

§6 椭圓积分

我們知道，当单摆的振幅甚小时，它的周期可以用公式

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (l\text{ 是摆长}, g\text{ 是重力加速度})$$

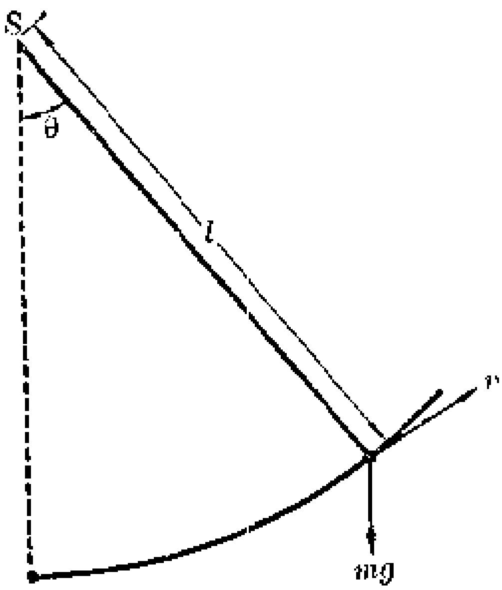


图 3-2-9

来計算，但是，为什么要假定振幅甚小呢？如果我們作一番細致的分析，就可以回答这个問題。設单摆的偏角为 θ 时，摆錘的速度为 v，此时，它的动能是 $\frac{1}{2}mv^2$，位能是 $l(1-\cos\theta)\cdot mg$，根据能量守恒定律有

$$\frac{1}{2}mv^2+l(1-\cos\theta)\cdot mg=C \quad (C\text{ 常数}).$$

令 α 表示单摆的最大偏角（即振幅为 α），那末，当 $\theta=\alpha$ 时有

$$v=0,\ \text{因此}\ C=lmg(1-\cos\alpha),$$

从而
$$\frac{1}{2}mv^2=lmg(\cos\theta-\cos\alpha),$$

但 $$v=\frac{d}{dt}(l\theta)=l\frac{d\theta}{dt},$$

故有 $$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{2g}{l}(\cos\theta-\cos\alpha).$$

两边开平方,有

$$\frac{d\theta}{dt}=2\sqrt{\frac{g}{l}}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

或写成 $$dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}.$$

設 t 从摆錘的平衡位置 0 时算起,則有

$$t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^\theta\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}.$$

假如作代換 $$\sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\varphi,$$

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\varphi d\varphi,$$

于是

$$t=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\cos\frac{\theta}{2}}=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi}}.$$

显然,积分 $$\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi}}$$

是积分

$$F(k,\varphi)=\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\quad(0<k<1)$$

当 $k=\sin\frac{\alpha}{2}$ 时的特殊情况。我們通常称 $F(k,\varphi)$ 为第一类椭圓积分,k 称为它的模。

注意到当 $\theta=\alpha$ 时，$\varphi=\frac{\pi}{2}$，故单摆的准确周期 T 应为

$$T=4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi}}.$$

由此可以看出，只有在 α 甚小时，$\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi}\approx 1$，从而

$$T\approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

在以后，我們求椭圆的弧长时，还会遇到属于下面这种类型的积分，即

$$E(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\ d\varphi\quad(0<k<1),$$

我們通常称 $E(k,\varphi)$ 为第二类椭圆积分，k 称为它的模。

在上述两种椭圆积分中，假如作代换

$$x=\sin\varphi\quad(|x|<1),$$

就可化为

$$F(k,\sin^{-1}x)=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$E(k,\sin^{-1}x)=\int_0^x\frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

除了这两类最常遇到的椭圆积分之外，还有第三类椭圆积分

$$K(k,h,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

或者，通过与上面相同的代换 $x=\sin\varphi$，而写成

$$K(k,h,\sin^{-1}x)=\int_0^x\frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

可以証明，对于具有以下类型的积分

$$\int R(x,\ \sqrt{ax^3+bx^2+cx+d})\,dx,$$

$$\int R(x,\ \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e})\,dx, \tag{*}$$

(其中 a, b, c, d, e 等均为常数)，总能用上述的三类椭圓积分来表示，因此，通常把具有类型(*)的积分都叫做椭圓积分。

椭圓积分不可能用初等函数来表示它的值，必須利用近似积分法或者展开成无穷級数来求出。不过，已經有人把椭圓积分的数値編造成表，因此，当 k，φ 知道时，我們可以通过查表得出椭圓积分之値（例如徐桂芳編譯的"积分表"第 123～125 頁就有这种表）。

[例] 計算定积分

$$J=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{-(x-1)(x-2)(x-3)}}$$

之値。

作代换 $u=\sqrt{1-x}$，由于 $x=0$ 时 $u=1$，$x=\frac{1}{2}$ 时 $u=\frac{1}{\sqrt{2}}$，因而积分化为

$$J=2\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{du}{\sqrt{(1+u^2)(2+u^2)}}.$$

再令 $t=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$，那末 $u=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$，$du=\frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}$，于是有

$$J=2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(2-t^2)}}$$

$$=\sqrt{2}\left[\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1-\frac{1}{2}t^2\right)}}\right.$$

$$-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1-\frac{1}{2}t^2\right)}}\Bigg]$$

$$=\sqrt{2}\Big[F\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{4}\right)$$

$$-F\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Big].$$

但是，在椭圆积分的数値表中通常是用 $\alpha=\sin^{-1}k$ 及 φ 来表示，且都用度数表出。

現在，

$$\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 35°,\ k=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \alpha=\sin^{-1}k=45°,$$

由査表可得

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{\pi}{4}\right)=0.8260,\quad F\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0.6300,$$

于是，最后即可求得积分 J 之値为：

$$J=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{-(x-1)(x-2)(x-3)}}$$

$$=\sqrt{2}\,(0.8260-0.6300)=0.2771.$$

习　題

1. 利用定积分定义計算积分：

(1) $\int_0^B f(x)\,dx$，其中 $f(x)=ax+b$；

(2) $\int_0^1 a^x\,dx\quad(a>0)$。

2. 判别下列函数的可积性：

(1) $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界，有不連續点 $\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots)$；

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right], & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\quad 0\leqslant x\leqslant 1;$

(3) $D(x)=\begin{cases}0, & x=\text{有理数},\\ x, & x=\text{无理数},\end{cases}\quad 0\leqslant x\leqslant 1;$

(4) $d(x)=\begin{cases}-1, & x=\text{有理数},\\ 1, & x=\text{无理数},\end{cases}\quad a\leqslant x\leqslant b;$

(5) $R(x)=\begin{cases}0, & x=\text{无理数},\\ \dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{m}{n}\text{为既約分数},\end{cases}\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$

这个函数称为黎曼函数；

(6) $f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)\quad -1<x<1.$

3．若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积，其积分为 I，今在 $[a, b]$ 内有限个点上改变 $f(x)$ 的値使它成为另一个函数 $f^*(x)$．証明 $f^*(x)$ 也在 $[a, b]$ 可积，且其积分仍为 I.

4．开区間 (a, b) 内的有界連續函数是否可积？

5．試討論 f, f^2, $|f|$ 三者間可积性的关系。

6．若函数 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 皆可积，那么复合函数 $f[\varphi(x)]$ 是否可积？又設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积而 $\varphi(y)$ 在 $[A, B]$ 上連續且 $A\leqslant f(x)\leqslant B$，証明复合函数 $\varphi[f(x)]$ 在 $[a, b]$ 上可积。

7．若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續，$f(x)\geqslant g(x)$，但 $f(x)\not\equiv g(x)$，則

$$\int_a^b f(x)\,dx>\int_a^b g(x)\,dx.$$

8．判别下列积分的大小：

(1) $\displaystyle\int_0^1 x\,dx,\ \int_0^1 x^2\,dx;$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx;$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)^x dx,\ \int_0^1 3^x\,dx.$

9．計算下列定积分：

(1) $\displaystyle\int_1^2\frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}\,dx;$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin x+b\cos x)\,dx;$

(3) $\displaystyle\int_0^1\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 dx;$　　(4) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx;$

(5) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} x^3(1-5x^2)^{10}dx$;　　(6) $\int_0^1 x^2(2-3x^2)^2dx$;

(7) $\int_{-\frac{1}{5}}^{\frac{1}{5}} x\sqrt{2-5x}\,dx$;　　(8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin mx \cos nx\,dx$;

(9) $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{18x-4}{\sqrt{9x^2+6x+5}}\,dx$;　　(10) $\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^3 e^{-x^2}dx$;

(11) $\int_0^1 x \operatorname{arc\,tg} x\,dx$;　　(12) $\int_0^{2\pi} x\cos^2 x\,dx$.

10. 求下列积分:

(1) $\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$;　　(2) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$;

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2x}\sin^2 x\,dx$;　　(4) $\int_0^a \frac{dx}{\cos x+\cos a}$;

(5) $\int_0^1 \frac{dx}{(1+e^x)^2}$;　　(6) $\int_0^{\frac{1}{2}} x\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$.

11. 檢驗对下列积分应用牛頓-萊伯尼兹公式的正确性:

(1) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$;　　(2) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$;

(3) $\int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x}{2+\operatorname{tg}^2 x}\,dx$.

12. 檢驗下列定积分變数变換的正确性:

(1) $\int_{-1}^1 dx,\ t=x^{\frac{2}{3}}$;　　(2) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2},\ x=\frac{1}{t}$;

(3) $\int_0^\pi \frac{dx}{1+\sin^2 x},\ \operatorname{tg}x=t$;　　(4) $\int_0^3 x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx,\ x=\sin t$;

(5) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\int_\pi^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,d\sin t,\ x=\sin t$.

13. 証明若函数 $f(x)$ 在閉区間 $[0, 1]$ 連續，則:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$;

(2) $\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$;

由此計算 $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

14. 証明奇函数的一切原函数皆为偶函数，偶函数的原函数中有一为奇函数。

15. 举例說明周期为 T 的可积函数 $f(x)$ 的积分 $\int_a^x f(t)\,dt$ 不一定是周期函数。

16. 若 $f(x)$ 关于 $x=T$ 对称，且 $a<T<b$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx=2\int_T^b f(x)\,dx+\int_a^{2T-b} f(x)\,dx.$$

17. 証明：$\int_0^a x^3 f(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)\,dx \quad (a>0)$.

18. 利用分部积分法証明：

$$\int_0^x f(u)\,(x-u)\,du=\int_0^x\left\{\int_0^u f(x)\,dx\right\}du.$$

19. 計算下列定积分：

(1) $\int_0^a (a^2-x^2)^n dx$;　　(2) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$;

(3) $\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x}\,dx$;　　(4) $\int_{-1}^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx$.

20. 証明不等式：

(1) $\frac{2}{5}<\int_1^2 \frac{x\,dx}{x^2+1}<\frac{1}{2}$;　　(2) $1<\int_0^1 e^{x^2}dx<e$;

(3) $1<\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx<\frac{\pi}{2}$.

21. 利用中值定理估計积分 $\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx$ 之值。

22. 应用中值定理求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

23. 利用定积分計算，求下列和式的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$;　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

(注：本題計算时可能出現在积分限的端点处函数无界，此时可应用对其原函数取极限的方法求得結果，其理論根据以后在广义积分中討論。)

第三章　定积分的应用和定积分的近似計算

§1 曲綫的弧长

一根直綫的长度是可以直接度量的。但計算一条曲綫段的"长度"，一般却不能直接度量。也不能把曲綫"拉直"再来作直接度量，因此需要用另一种办法来度量它。

設一条以 A, B 为端点的曲綫段 (l)，我們在曲綫段 (l) 上从 A 到 B 任意取 $n+1$ 个分点，$M_0=A$, M_1, M_2, $\cdots$, $M_n=B$. 然后用弦将相邻的两点联結起来（图 3-3-1）。这样就作出了曲綫段 (l) 的一条内接折綫，这条折綫的长度是能够直接度量的。我們定义：当分点无限增加同时弦的长度都各趋于零时，这折綫的长度如果趋于某一极限，此极限值就定义为曲綫段 (l) 的长度。也称曲綫段 (l) 为可求长的。

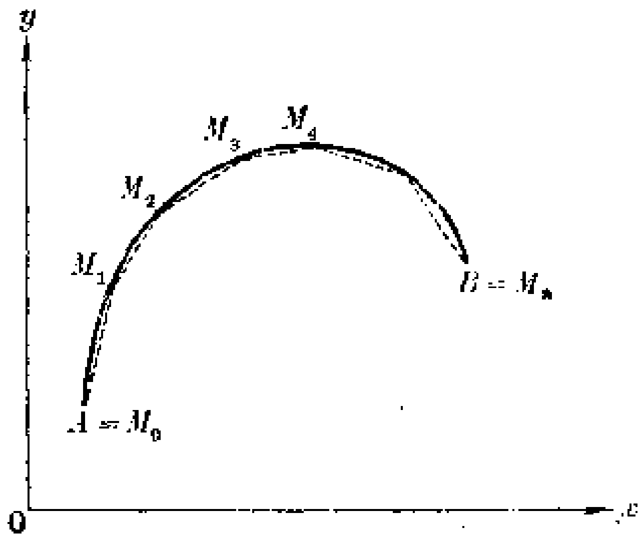


图 3-3-1

讀者在初等几何学中早已遇到这种方法了，例如在那里曾把圓周的长度作为圓内接（或外切）正多边形的周长当边数无限增加时的极限。

从定义出发，我們可以得到以下公式。

弧长公式：設曲綫(l)的參数方程为：

$$x=x(t),\quad y=y(t).$$

当$t=\alpha$, $t=\beta$时，$(\alpha<\beta)$所給出的点就是A, B点。还假設$x(t)$, $y(t)$在$[\alpha,\beta]$上都有連續导数。則曲綫(l)上以A, B为端点的一段弧长s为：

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt.$$

現在推导如下：

在弧段上自A到B取一列分点$A=M_0, M_1, M_2, \cdots, M_n=B$，設它們的坐标为$M_i(x_i, y_i)$，这里$x_i=x(t_i)$, $y_i=y(t_i)$ $(i=0, 1, 2, \cdots, n)$，因此对应于这一列点就有一列t_i：

$$\alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=\beta,$$

联結M_{i-1}与M_i两点間的弦的长度为

$$\overline{M_{i-1}M_i}=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2},$$

因此折綫的总长度为：

$$s'=\sum_{i=1}^{n}\overline{M_{i-1}M_i}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x(t_i)-x(t_{i-1})]^2+[y(t_i)-y(t_{i-1})]^2}.$$

由微分学的中值定理，有

$$s'=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i^*)]^2}\cdot\Delta t_i$$

（其中ξ_i, ξ_i^*都是(t_{i-1}, t_i)中的数，$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$），

令

$$\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta t_i\},$$

于是，按定义，弧长

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i^*)]^2}\,\Delta t_i$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\{\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\cdot\Delta t_i+\eta_i\Delta t_i\},$$

这里，$\eta_i=\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i^*)]^2}-\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}$。

下面我們来估計 η_i，

$$|\eta_i|=|\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i^*)]^2}-\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}|$$

$$=\left|\frac{[y'(\xi_i^*)]^2-[y'(\xi_i)]^2}{\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+y'(\xi_i^*)^2}+\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}}\right|$$

$$=\frac{|y'(\xi_i^*)+y'(\xi_i)|\cdot|y'(\xi_i^*)-y'(\xi_i)|}{\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i^*)]^2}+\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}}$$

$$\leqslant|y'(\xi_i^*)-y'(\xi_i)|.$$

因为 $y'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 連續，因而是一致連續的。即对任意正数 ε，存在正数 δ，当 $\lambda=\max_i\{\Delta t_i\}<\delta$ 时，由于 ξ_i 及 ξ_i^* 皆属于 (t_{i-1},t_i)。所以有

$$|\eta_i|\leqslant|y'(\xi_i^*)-y'(\xi_i)|<\varepsilon,$$

从而
$$\left|\sum_{i=1}^{n}\eta_i\Delta t_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|\Delta t_i\leqslant\varepsilon(\beta-\alpha).$$

这样一来就得到：

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\,\Delta t_i.$$

再因为右端极限后面的和式正是 $\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}$ 的黎曼和，而 $\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 連續，所以 $\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 可积，按照可积定义最后得到：

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi)]^2}\,\Delta t_i$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt.$$

（注）　在弧长公式的推导过程中，遇到了必須处理和式

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i^*)]^2}\,\Delta t_i$$

的极限問題，但这个和式不是积分和数(黎曼和数)，如何将它化为黎曼和数并进一步处理之，这是定积分应用中的典型原理之一。一般的，設須处理下列和数 s 的极限。

$$s=\sum_{i=1}^{n} F[f(\xi_i), g(\xi_i^*)]\Delta t_i,$$

它不是黎曼和，但可以将它改写为

$$s=\sum_{i=1}^{n} F[f(\xi_i), g(\xi_i)]\Delta t_i+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\Delta t_i,$$

右端第一項是一个黎曼和，第二項称为尾項。于是我們的問題就是，在某些假設之下(例如設 $f(t)$ 及 $g(t)$ 皆連續，$F(x, y)$ 为二元連續函数)証明：

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} F[f(\xi_i), g(\xi_i)]\Delta t_i=\int_{\alpha}^{\beta} F[f(t), g(t)]dt,$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\eta_i\Delta t_i=0.$$

这样就得到积分公式

$$s=\int_{\alpha}^{\beta} F[f(t), g(t)]dt.$$

对于空間曲綫

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t) \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta),$$

假設 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上都有連續导数。亦有同样的計算曲綫段的弧长公式

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt.$$

下面考虑两个特別的情形：

(1) 由 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 所給出的一个曲綫段弧长的公式，我們可以用参数方程来表示这个曲綫段，参数为 x，卽此曲綫段的参数方程为：

$$\begin{cases} x=x, \\ y=f(x), \end{cases} \quad a\leqslant x\leqslant b.$$

按照已經推导出的弧长公式得:

$$s=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

(2) 由极坐标方程所給出的曲綫段

$$r=r(\theta)\quad (\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta),$$

假設 $r(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有連續导数。因为

$$\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta, \\ y=r(\theta)\sin\theta, \end{cases}\quad (\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta),$$

所以弧长公式为:

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta \sqrt{[r'(\theta)]^2+[r(\theta)]^2}\,d\theta.$$

【例 1】 計算星形綫

$$x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t$$

的弧长(图 3-3-2)。

由曲綫的对称性,只須求它位在第一象限的弧长,即曲綫总长 s 的 $\frac{1}{4}$.

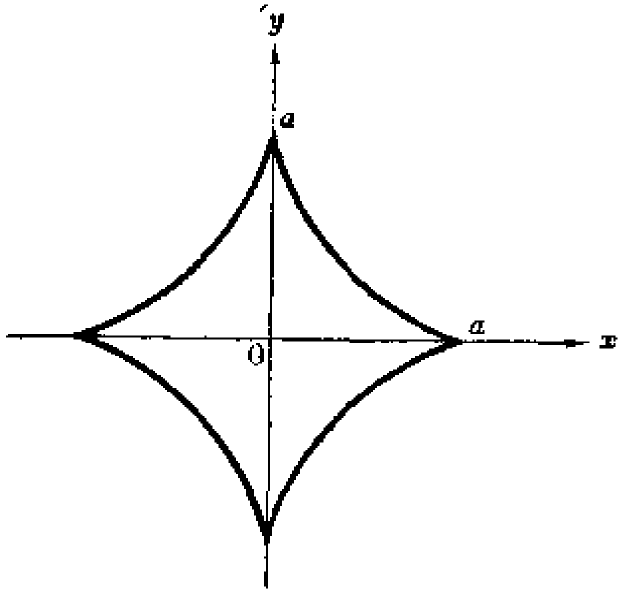


图 3-3-2

$$\frac{s}{4}=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t}\,dt$$

$$=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt$$

$$=3a\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}a,$$

所以 $$s=6a.$$

［例 2］ 求阿基米德螺线 $r=a\theta$ 最初一圈的弧长（图 3-3-3）。

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{(a\theta)^2+a^2}\,d\theta$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta$$

$$=\frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})\right].$$

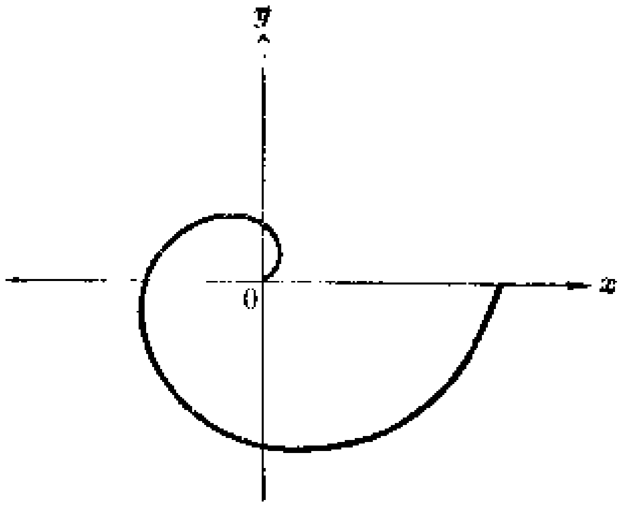


图 3-3-3

［例 3］ 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b)$ 的弧长。为方便起见，将椭圆方程用参数式

$$\begin{cases} x = a\sin t, \\ y = b\cos t \end{cases}$$

表示。易見

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2} = \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}$$
$$= \sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2 t}$$
$$= a\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t},$$

这里，$\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 为椭圓离心率，于是椭圓弧长为

$$s = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\, dt.$$

这就是第二类型的椭圓积分。这一事实也正是"椭圓"积分这个名称的由来。

在第二篇的最后一节中已經粗略地也相当直观地給出弧长的微分。

設曲綫的参数方程为：

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

并且 $x(t)$ 及 $y(t)$ 具有連續导数。那么弧长的微分为：

$$ds = \sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\, dt.$$

这里我們可以給以严格推导：首先考虑曲綫 $x=x(t)$，$y=y(t)$。从某个固定点 $M_0[x(t_0), y(t_0)]$ 到一变动点 $M[x(t), y(t)]$ 間的弧长，它应該是 t 的函数，可表示为：

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\, dt.$$

因为 x_t' 及 y_t' 連續，則式中被积函数亦連續，于是：

$$\frac{ds(t)}{dt} = \sqrt{x_t'^2+y_t'^2}.$$

这样便获得了弧长的微分公式

$$ds = \sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\, dt.$$

我們注意，这里弧长的量度应朝参数 t 增加的方向量过去，因此取正的。否则应有：

$$ds=-\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt.$$

再注意到：

$$dx=x_t'\,dt,\quad dy=y_t'\,dt,$$

弧长的微分公式又可写为

$$ds^2=dx^2+dy^2.$$

此式有明确的几何意义，我們知道，在一个直角三角形中，它的斜边 Δs 和两个直角边 Δx，Δy 有着以下的简单关系：

$$\Delta s^2=\Delta x^2+\Delta y^2,$$

而在一定条件下又有

$$\Delta s\sim ds,\quad \Delta x\sim dx,$$

$$\Delta y\sim dy,$$

于是当分点甚密时，每段弧长可近似地視为由 Δx 及 Δy 为直角边的直角三角形的斜边长(图 3-3-4)。

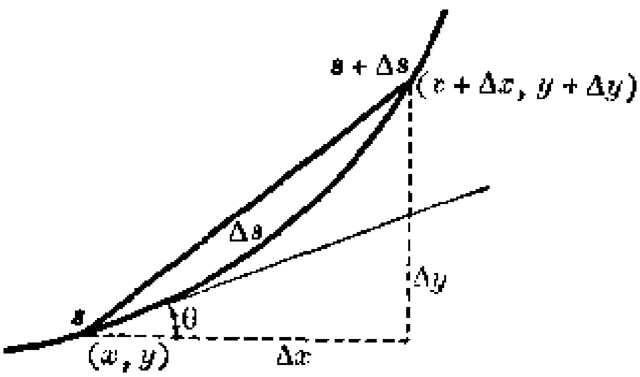


图 3-3-4

如果 x 为参数，也就是在直角坐标中，曲綫方程以显式 $y=f(x)$ 給出时，則点 $(x_0, f(x_0))$ 和点 $(x, f(x))$ 間的一段弧长 $s=s(x)$ 应为 x 的函数：

$$s(x)=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+y_x'^2}\,dx,$$

$$ds=\sqrt{1+y_x'^2}\,dx.$$

又設 θ 是曲綫在 x 点的切綫与 x 軸正向之間的夹角，則有

$$ds=\sqrt{1+y_x'^2}dx=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}\,dx$$
$$=\sec\theta\,dx,$$

这就得到

$$\frac{dx}{ds}=\cos\theta,$$

$$\frac{dy}{ds}=\sin\theta.$$

同样地，我們可以导出在极坐标方程时，弧长的微分：

$$s(\theta)=\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{r_\theta'^2+r^2}\,d\theta,$$

$$ds=\sqrt{r_\theta'^2+r^2}\,d\theta.$$

最后，还要注意这样一个事实：一段可以求长度的弧，其长度是客观存在的，它不依賴我們所选取的坐标系。也就是說，不論我們选擇怎样的坐标系，是直角坐标系也好，是极坐标系也好，以及其他的什么坐标系也好，所計算出来的弧长都应該是同一个值。虽然这一事实对于求弧长以及以下各节中求面积、求体积等等都是显而易見的，但它却是相当重要的。有許多的物理量和力学量必須用到这一事实。例如在本課程的場論部分中，将会叙述和論証到某些量与坐标的选擇无关。

§2　平面图形的面积

設一块由連續曲綫 $y=f(x)$ $(f(x)\geqslant 0)$ 和横坐标 OX 以及两根直綫 $x=a$，$x=b$ $(a<b)$ 所圍成的曲边梯形(图 3-3-5)。我們要計算这块图形的面积 A，由定积分的引进及其定义知道，面积 A 的公式为：

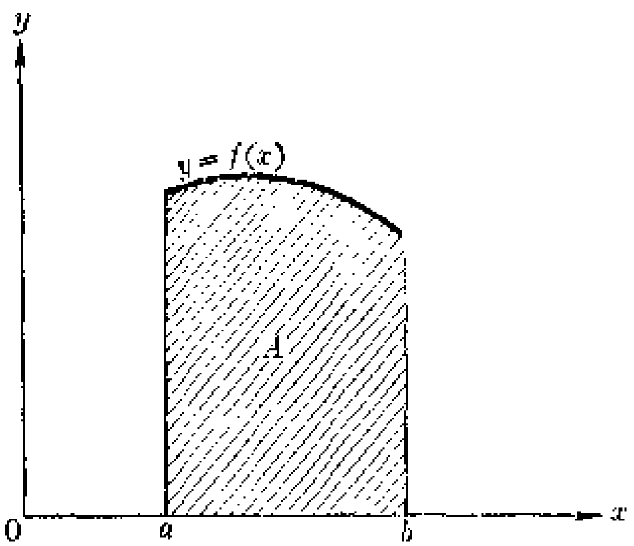


图　3-3-5

$$A=\int_a^b f(x)\,dx.$$

有时还会遇到这样的情形，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續，但会变号(图 3-3-6)，我們要求由曲綫 $y=f(x)$，x 軸以及直綫 $x=a$，$x=b$ $(a<b)$ 所圍成的曲边梯

形的面积 A。由于面积总是非负的数,所以面积 A 的公式应該是:

$$A=\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

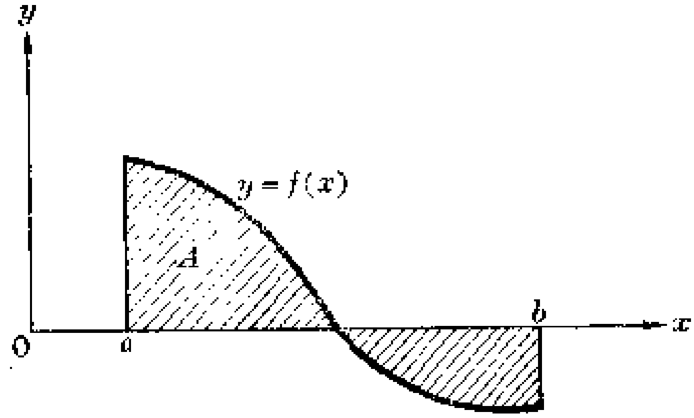


图 3-3-6

如果一块图形是由連續曲綫 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ 以及 $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ 所圍成,并且在 $[a, b]$ 上 $0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)$ (图 3-3-7),那么这块图形的面积 A:

$$A=\int_a^b f_2(x)\,dx-\int_a^b f_1(x)\,dx$$

$$=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]\,dx.$$

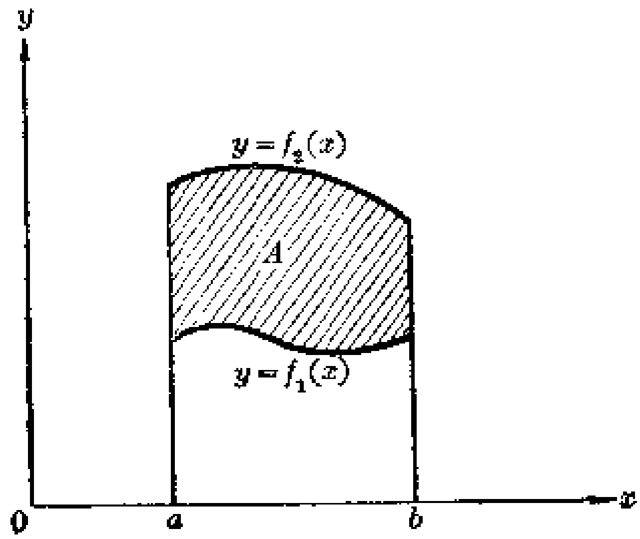


图 3-3-7

在上面的情形中，如果在 $[a, b]$ 上有时 $f_1(x) < f_2(x)$，也有时 $f_1(x) > f_2(x)$（图 3-3-8），那么由連續曲綫 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$ 及直綫 $x=a$, $x=b$ 所圍成的面积 A：

$$A=\int_a^b |f_1(x)-f_2(x)|\,dx.$$

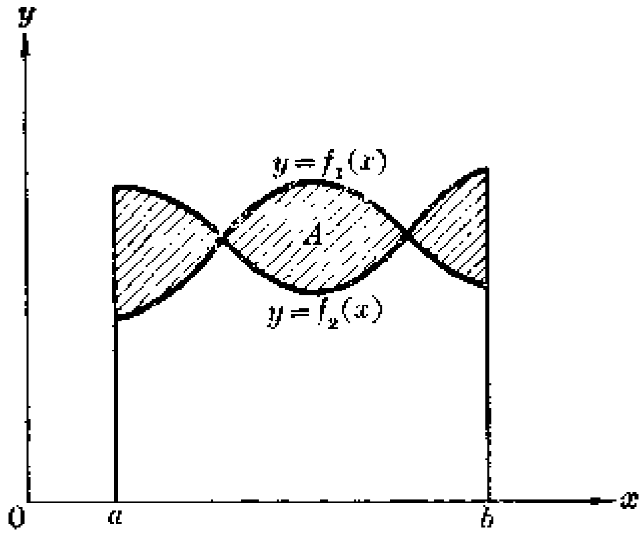


图　3-3-8

［例 1］　試求由抛物綫 $y^2=2px$ 与 $x^2=2py$ 所夹的图形面积 A（图 3-3-9）。

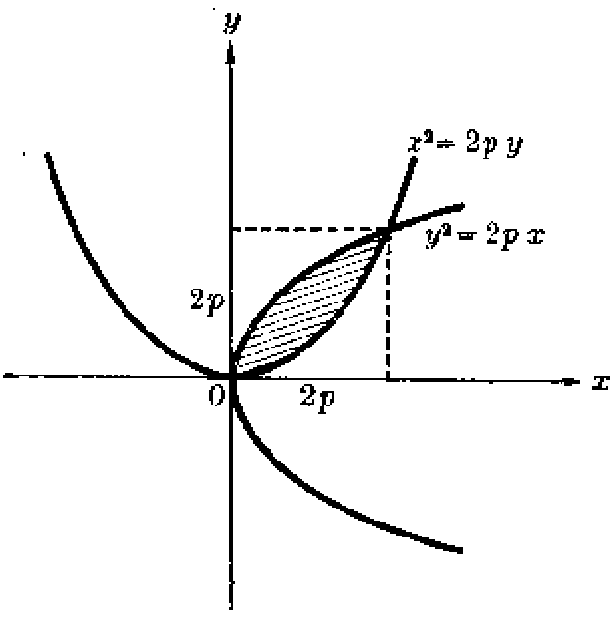


图　3-3-9

为了确定积分区間，首先求出两条曲綫 $y=\frac{x^2}{2p}$ 与 $y=\sqrt{2px}$ 的交点的横坐标。它等于 0 及 $2p$。

我們有 $$A=\int_0^{2p}\left(\sqrt{2px}-\frac{x^2}{2p}\right)dx=\frac{4}{3}p^2.$$

最后，还要討論由参数方程表示和由极坐标方程表示的两种情形：

若所給的曲綫方程为参数形式的

$$x=x(t),\quad y=y(t),$$

并且設 $x(t)$ 隨 t 的增加而增加，并且 $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$，而 $x(t)$ 及 $y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 連續，$x'(t)$ 存在且 $x'(t)$ 不变号，$x'(t)\geqslant 0$。那么由曲綫 $x=x(t)$, $y=y(t)$, x 軸以及直綫 $x=a$, $x=b$ 所圍成的图形面积 A 的公式为：

$$A=\int_\alpha^\beta |y(t)|\,x'(t)\,dt.$$

如果 $x(t)$ 隨 t 的增加而减少，公式仍成立，但这时 $x'(t)\leqslant 0$ 同时 $\alpha>\beta$。这个公式容易由

$$A=\int_a^b |y|\,dx$$

得到，为此只要在上面这个公式中作代換 $x=x(t)$ 卽得（参見习題 8）。

［例 2］ 求椭圓

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}\qquad (a>0,\ b>0)$$

的面积 A（图 3-3-10）。我們只要求这面积的四分之一，这面积等于

$$\frac{1}{4}A=\int_0^a y\,dx.$$

在这問題中 $x=x(t)=a\cos t,\quad y=y(t)=b\sin t,$

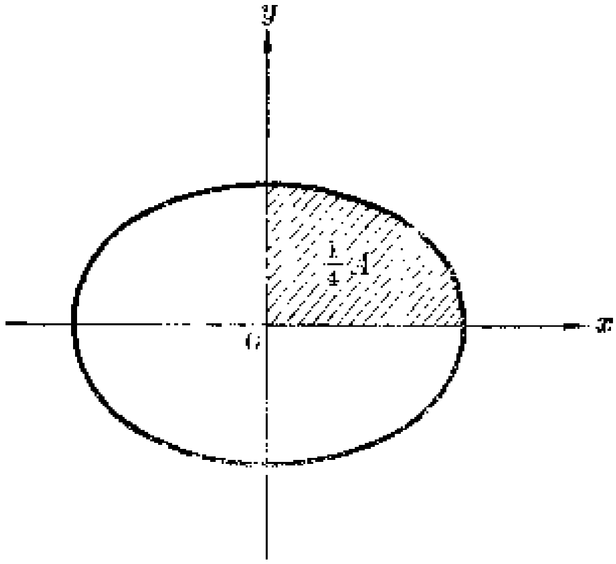


图 3-3-10

又：

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, \quad x(0)=a,$$

所以

$$\frac{1}{4}A=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt$$

$$=ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt=\frac{1}{4}\pi ab,$$

即

$$A=\pi ab.$$

若所給的曲綫方程是极坐标方程

$$r=r(\theta),$$

假設 $r(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上連續，$r(\theta)\geqslant 0$，現在我們要求由两根向徑 $\theta=\alpha$ 和 $\theta=\beta$，以及曲綫 $r=r(\theta)$ 所圍成的图形的面积。則可由定积分的定义出发来推导这个面积的公式。

将区間 $[\alpha, \beta]$ 分为 n 个部分区間，設其分点为：

$$\alpha=\theta_0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_n=\beta,$$

記

$$\Delta\theta_i=\theta_i-\theta_{i-1} \quad (i=1, 2, \cdots, n),$$

$$\lambda=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\theta_i\},$$

作 $n-1$ 根射綫 $\theta=\theta_1$, $\theta=\theta_2$, $\cdots$, $\theta=\theta_{n-1}$，将图形分为 n 个小块，

設每块的面积为 ΔA_i $(i=1, 2, \cdots, n)$，于是

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i.$$

又設 $r(\theta)$ 在每一个部分区間 $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 上的上确界为 M_i，下确界为 m_i。再以 M_i 及 m_i 为半徑在 $\theta=\theta_{i-1}$ 和 $\theta=\theta_i$ 之間分別作两个小扇形(图 3-3-11)。按扇形面积公式它們的面积分别等于

$$\frac{1}{2}M_i^2\Delta\theta_i \text{ 及 } \frac{1}{2}m_i^2\Delta\theta_i.$$

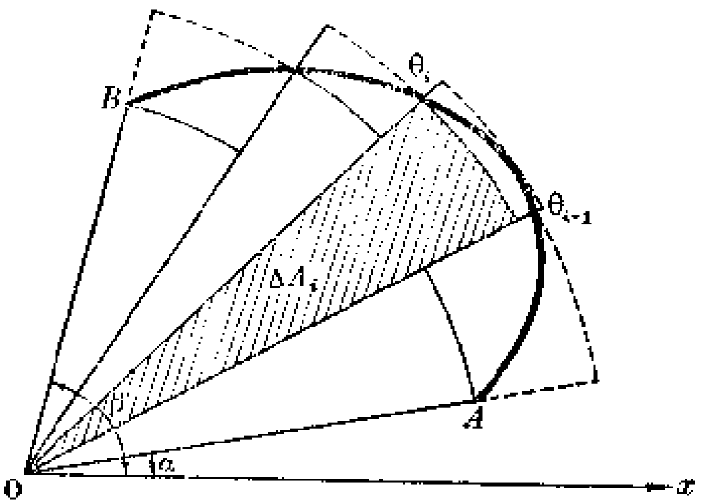


图 3-3-11

容易知道
$$\frac{1}{2}m_i^2\Delta\theta_i\leqslant\Delta A_i\leqslant\frac{1}{2}M_i^2\Delta\theta_i,$$

因之
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i^2\Delta\theta_i\leqslant A\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}M_i^2\Delta\theta_i,$$

而 $\sum_{i=1}^{n}m_i^2\Delta\theta_i$ 和 $\sum_{i=1}^{n}M_i^2\Delta\theta_i$ 正好是函数 $r^2(\theta)$ 在区間 $[\alpha, \beta]$ 上的达布小和数和大和数，按照达布定理，当 $\lambda=\max_i\{\Delta\theta_i\}\to 0$ 时这两个和数的极限皆存在，又由函数 $r(\theta)$ 的連續性，这两个和数的极限必須相同，并且等于

$$\int_{\alpha}^{\beta}r^2(\theta)\,d\theta,$$

所以
$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2(\theta)\,d\theta.$$

如果要求出由
$$\theta=\alpha,\ \theta=\beta\quad(\alpha<\beta)$$
及两条連續曲綫 $r=r_1(\theta)$，$r=r_2(\theta)$ $(r_2(\theta)\leqslant r_1(\theta))$ 所圍成的面积，則这图形的面积(图 3-3-12)
$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[r_1^2(\theta)-r_2^2(\theta)]\,d\theta.$$

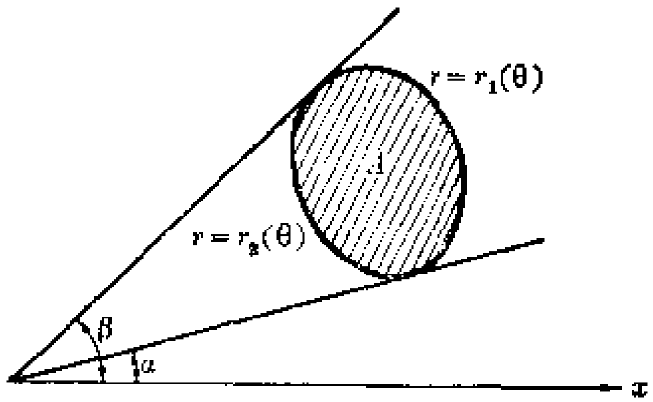


图　3-3-12

［例 3］　求双紐綫 $\rho^2=a^2\cos 2\theta$ 所圍成的面积(图 3-3-13)。当 $\frac{3}{4}\pi>|\theta|>\frac{1}{4}\pi$ 时 $\cos 2\theta<0$，則 ρ 为虛值，卽无定义。由对称性

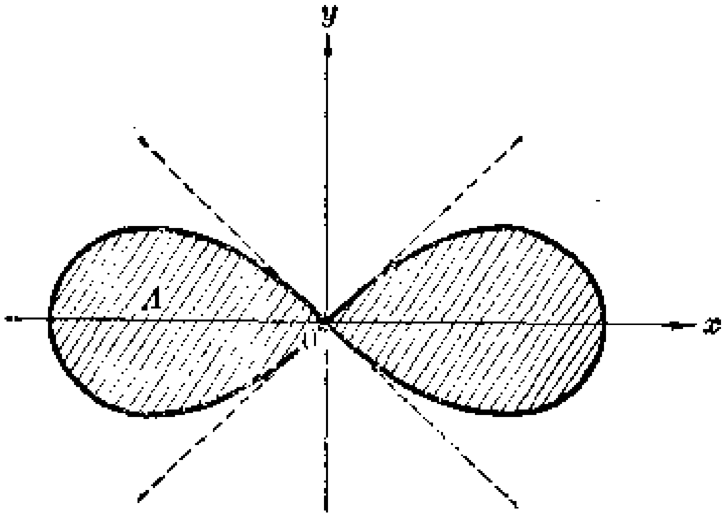


图　3-3-13

$$A=2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\theta\,d\theta=a^2.$$

[例 4] 計算心脏綫 $r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 所圍成的面积(图 3-3-14)。

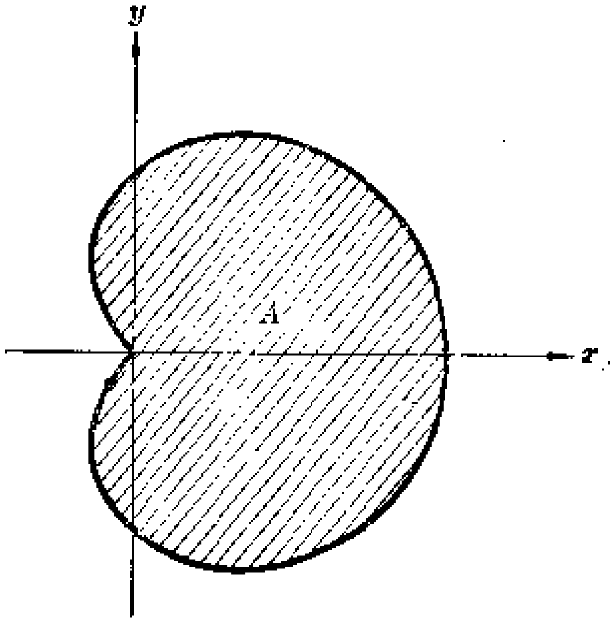


图 3-3-14

由对称性得

$$A=\int_0^{\pi}r^2d\theta=\int_0^{\pi}a^2(1+\cos\theta)^2d\theta=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

§3 体　　积

在本节中我們只考虑两种情况，一种是已知几何体的截面积而求此几何体的体积，另一种是求旋轉体的体积。至于較一般的几何体的体积的求法将在重积分中給出。

先考虑第一种情况。

設有一物体，它被垂直于某一直綫(設为 x 軸)的截面所截的面积 $A(x)$ 为 x 的連續函数。这物体的位置是居于 $x=a$ 和 $x=b$ $(a<b)$ 之間的(图 3-3-15)。

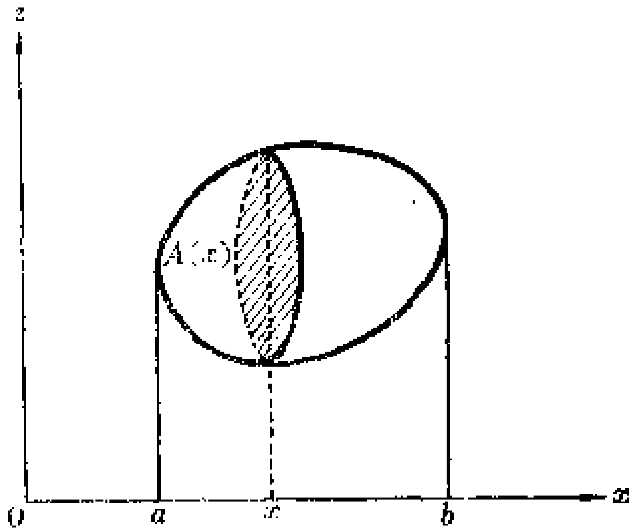


图 3-3-15

分 $[a, b]$ 为 n 份，其分点为

$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$,

記 $\lambda(\Delta)=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$,

以平面 $x=x_i$ 截此体积为 n 个小部分，取任一点 $\xi_i\in[x_i, x_{i+1}]$.

作和式极限

$$\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^{n}A(\xi_i)\Delta x_i.$$

这个和式的极限的几何意义是很明显的，即用 n 个小柱体体积之和逼近所求体积。由于 $A(x)$ 是連續函数，所以这个和式的极限存在，它就是所要求的体积，

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}A(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b A(x)dx.$$

这样就获得了在已知几何体截面积 $A(x)$（連續函数）的情况下，該物体的体积公式：

$$V=\int_a^b A(x)dx.$$

有了这个公式以后，我們再来考慮一种特殊情况——求旋轉体的体积。

設有一块以連續曲綫 $y=f(x)$, $f(x)\geqslant 0$ 以及两条直綫 $x=a$, $x=b(a<b)$ 和 x 軸所圍繞成的面积（图 3-3-16）。将这块面积繞 x 軸旋轉而生成一个旋轉体，易知这个旋轉体的垂直于 x 軸的截面积为：

$$A(x)=\pi y^2=\pi f^2(x).$$

代入体积公式，即得旋轉体体积公式：

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

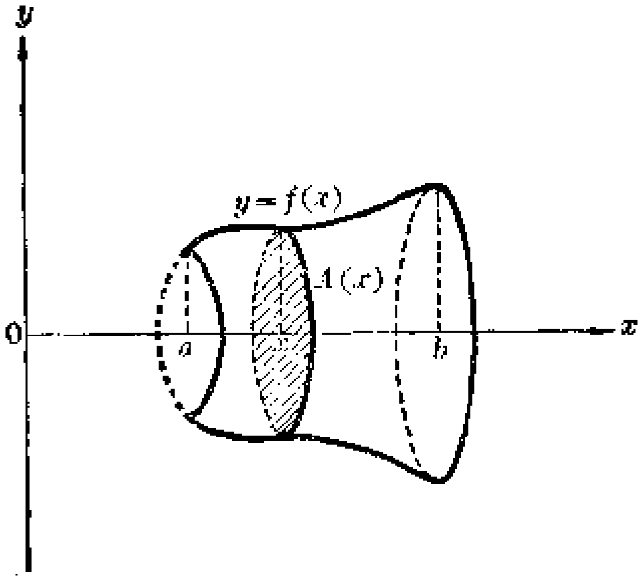


图 3-3-16

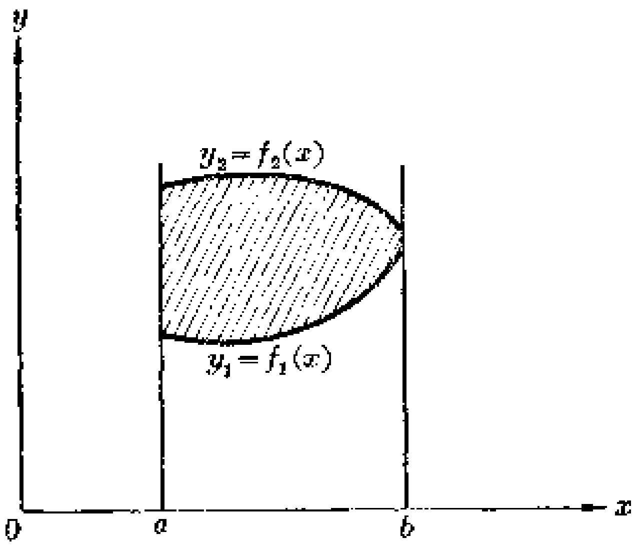


图 3-3-17

将上述面积繞 y 軸旋轉所成体积的公式参見习題 4。

設有一块由两条連續曲綫 $y_1=f_1(x)$, $y_2=f_2(x)$ $(0\leqslant f_1\leqslant f_2)$ 以及两条直綫 $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ 所圍成面积 (图 3-3-17)，将这块面积繞 x 軸旋轉所生成旋轉体的体积 V 有

$$V=\pi\int_a^b[f_2^2(x)-f_1^2(x)]dx.$$

在极坐标的情形下有类似的旋轉体体积公式，参見习題 4(6)。

[例 1]　求 $x^2+y^2=a^2$ 及 $x^2+z^2=a^2$ 两柱面所圍之体积。图 3-3-18 为所求体积的 $\frac{1}{8}$，过点 $(x, 0, 0)$ 作垂直于 x 軸的截面，得一正方形，其边长为 $\sqrt{a^2-x^2}$，所以

$$V=8\int_0^a (a^2-x^2)\,dx=\frac{16}{3}a^3.$$

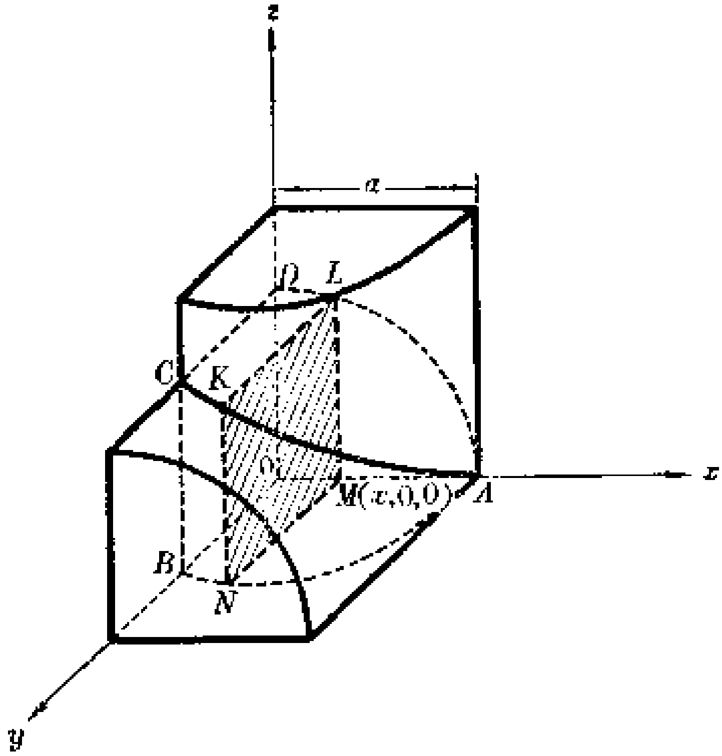


图　3-3-18

[例 2]　曲綫 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$　$(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 繞 x 軸旋轉的体积。

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 a(1-\cos t)\,dt$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}[1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t]\,dt$$

$$=5\pi^2 a^3.$$

[例 3]　求 $x^2+(y-b)^2=a^2$　$(0<a\leqslant b)$ 繞 x 軸旋轉的体积（图 3-3-19）。

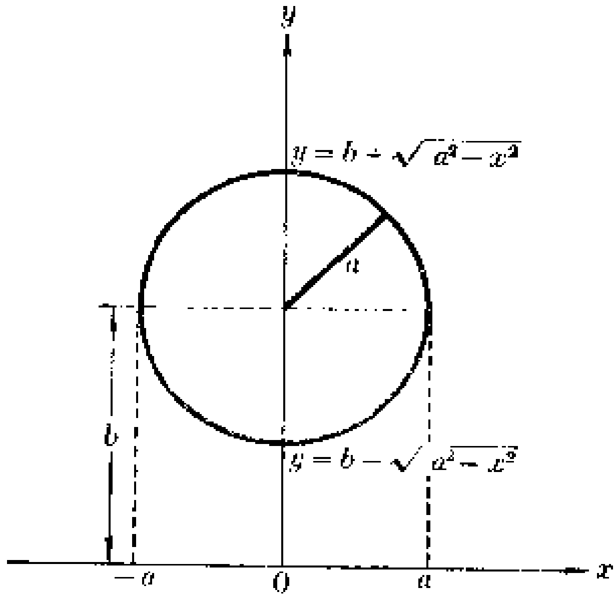


图 3-3-19

$$V=\pi\int_{-a}^{a}(b+\sqrt{a^2-x^2})^2dx-\pi\int_{-a}^{a}(b-\sqrt{a^2-x^2})^2dx$$

$$=\pi\int_{-a}^{a}4b\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=2\pi^2a^2b.$$

我国古代数学家在計算体积时，早就得到一个重要原理，那就是：

“冪势旣同則积不容异”（冪势的意思就是截面积）。这就是本节中所依据的原理，这一原理直到一千多年以后才被意大利数学家提出来。

§4 旋轉体的側面积

下面計算一种特殊的面积，即旋轉体的側面积（图 3-3-20）。設将平面曲綫 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ $(f(x)\geqslant 0,\ f'(x)$ 連續) 繞 x 軸旋轉，得一旋轉面。定义其面积 F 如下：分 $[a,b]$ 为 n 分，其分点为 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，記 $(x_i, f(x_i))$ 点为 M_i，作曲綫的内接折綫 $\overline{M_{i-1}M_i}$，将 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 繞 x 軸旋轉，得一截錐体。設其面积

为 ΔF_i，作和式极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta F_i,$$

这里
$$\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}\quad(\Delta x_i=x_i-x_{i-1}),$$

若此极限存在，称它为旋轉体之側面积。

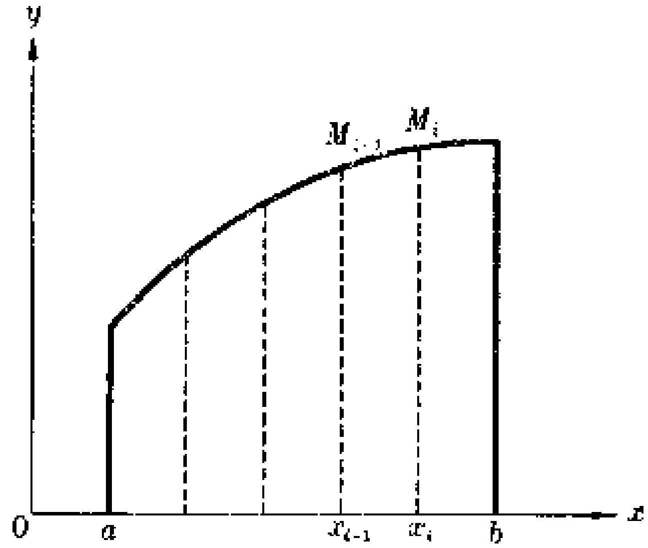


图 3-3-20

我們先来計算 ΔF_i：由錐面的面积公式 $A=\pi rl$，这里 l 为錐体的斜高，r 为錐体的半徑。于是(图 3-3-21)

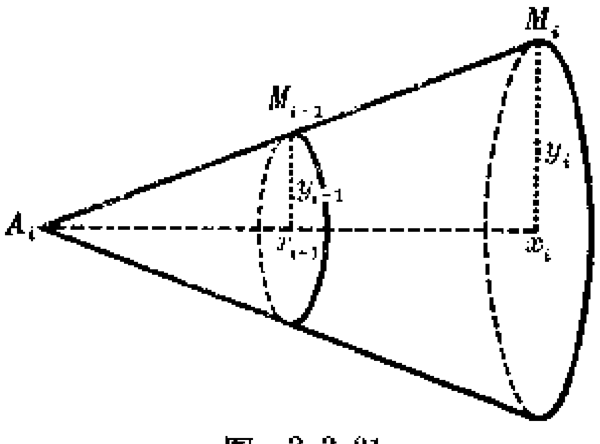


图 3-3-21

$$\begin{aligned}\Delta F_i&=\pi y_i\overline{A_iM_i}-\pi y_{i-1}\overline{A_iM_{i-1}}\\&=\pi y_i\overline{A_iM_i}-\pi y_{i-1}(\overline{A_iM_i}-\overline{M_iM_{i-1}})\end{aligned}$$

$$=\pi y_i \overline{A_iM_i}-\pi y_{i-1}\overline{A_iM_i}+\pi y_{i-1}\overline{M_iM_{i-1}}$$

$$=\pi \overline{A_iM_i}(y_i-y_{i-1})+\pi y_{i-1}\overline{M_iM_{i-1}}.$$

由于三角形 $\triangle A_iM_{i-1}x_{i-1}$ 相似于三角形 $\triangle A_iM_ix_i$，

所以有
$$\frac{\overline{A_iM_i}}{\overline{M_iM_{i-1}}}=\frac{y_i}{y_i-y_{i-1}}.$$

因而
$$\Delta F_i=\pi\overline{M_{i-1}M_i}\,(y_i+y_{i-1}),$$

然后，与求弧長公式时的同样理由，就有

$$F=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta F_i$$

$$=\pi\cdot\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)+f(x_{i-1}))\sqrt{\Delta x^2+[f(x_i)-f(x_{i-1})]^2}$$

$$=\pi\cdot\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)+f(x_{i-1}))\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i,\ \xi_i\in(x_{i-1},x_i)$$

$$=\pi\cdot\lim_{\lambda\to 0}\left\{\sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i)+f(\xi_i))\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\Delta x_i\right\}.$$

其中 $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$再进一步証明 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i\Delta x_i=0$，那么卽得

$$F=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

$$=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

这里只讲述了旋轉体的侧面积，至于一般曲面的面积将在第六章中給出。但对柱面面积的計算，亦可化为定积分的計算（参見习題 5 (7)）。

［例］　求球面的面积。

球半徑为 r，现仅需求 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 繞 x 軸旋轉所得之面积。代入公式，卽得

$$F=2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=4\pi r^2.$$

§5 重　心

在物理学中已經知道有限个质点的重心位置的求法。例如在平面上設有 n 个质点 (x_i, y_i) $(i=1, 2, \cdots, n)$，每一个质点的质量为 m_i，則这个质点系的重心的坐标 $(\bar{x}, \bar{y})$ 为

$$\bar{x}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \quad \bar{y}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}.$$

現在我們将这个概念加以拓广，利用定积分来計算弧的重心和面积的重心。为了簡便起見，設它們的质量为均匀的，即密度为常数 ρ，这时重心由图形的形状完全决定，所以称重心为形心。

設有一段弧 $(l): y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$，$f(x)$ 在此区間上有連續导数。将区間 $[a, b]$ 分为 n 个小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，亦即

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

并記

$$\lambda=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\} \quad (\Delta x_i=x_i-x_{i-1}),$$

相应地得到 n 个小弧段 Δs_i $(i=1, 2, \cdots, n)$，每个小弧段的弧长仍記为 Δs_i，按弧长公式及积分的第一中值定理，

$$\begin{aligned}\Delta s_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \\ &= \sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \\ &= \sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\cdot\Delta x_i \quad (x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i),\end{aligned}$$

因此，此小弧段 Δs_i 的质量为

$$m_i=\rho\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i.$$

但当 λ 甚小时，此小弧段几乎凝聚成一点，我們就以在 $(\xi_i, f(\xi_i))$ 点处的质点来代表它，这里 $x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$，那么 n 个小弧段 Δs_i 就近似地为 n 个这样的质点 $(\xi_i, f(\xi_i))$，在每一点上具有质量

$$m_i=\rho\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i.$$

代入上面的公式，得到以下两个值：

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i},$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}=\frac{\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i}.$$

由于 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 连續，所以当 $\lambda\to 0$ 时，上述两值的极限是存在的。这两个极限就分别为弧的形心的坐标 $\bar{x}$ 及 $\bar{y}$. 亦即

$$\bar{x}=\frac{\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx}{s}=\frac{\int_{(l)} x\,ds}{s},$$

$$\bar{y}=\frac{\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx}{s}=\frac{\int_{(l)} y\,ds}{s},$$

这里 $s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$ 为弧 (l) 的长度。$\int_{(l)} x\,ds\left(=\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx\right)$ 是一个記号。如果密度 $\rho=\rho(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 不是常数，而是 x 的連續函数，則和刚才的叙述相仿地得到弧的重心坐标 $\bar{x}$ 及 $\bar{y}$ 公式：

$$\bar{x}=\frac{\int_a^b x\rho(x)\,ds}{\int_a^b\rho(x)\,ds}=\frac{\int_{(l)} x\,dm}{M},$$

$$\bar{y}=\frac{\int_a^b y\rho(x)\,ds}{\int_a^b\rho(x)\,ds}=\frac{\int_{(l)} y\,dm}{M},$$

其中 $dm=\rho(x)ds$, $M=\int_a^b\rho(x)\,ds$ 为弧 (l) 的质量。dm 的直观意义是这样的，当小弧段 Δs_i 充分小时，它的质量近似地为 $\Delta m_i=\rho(\xi_i)\Delta s_i$ $(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i)$，再令 $\lambda\to 0$，就得到微分式 $dm=\rho(x)\,ds$.

以下再叙述和推导面积的形心公式。

設面积是由連續曲綫 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$ 及直綫 $x=a$，$x=b$ $(a<b)$ 所圍成的，并且不妨假設 $f_1(x)\geq f_2(x)$，类似地，我們以直綫 $x=x_i$ $(i=0, 1, 2, \cdots, n)$ 分面积为 n 个小块 ΔA_i，这里

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

并記
$$\lambda=\max_{1\leq i\leq n}\{\Delta x_i\} \quad (\Delta x_i=x_i-x_{i-1}),$$

按面积的积分公式及第一中值定理，我們得 ΔA_i 的面积（这块面积仍記为 ΔA_i）

$$\begin{aligned}\Delta A_i&=\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f_1(x)-f_2(x)]\,dx\\&=[f_1(\xi_i)-f_2(\xi_i)]\Delta x_i \quad (x_{i-1}\leq\xi_i\leq x_i).\end{aligned}$$

故 ΔA_i 的质量为

$$\Delta m_i=\rho\Delta A_i=\rho[f_1(\xi_i)-f_2(\xi_i)]\Delta x_i.$$

我們知道矩形的形心是其中心，而当 λ 甚小时，ΔA_i 近似于一矩形，因此当 λ 甚小时，ΔA_i 的形心可近似地认为在点 $\left[\xi_i, \frac{f_1(\xi_i)+f_2(\xi_i)}{2}\right]$ 上，也可以认为当 λ 甚小时，ΔA_i 的质量全部集中在点 $\left[\xi_i, \frac{f_1(\xi_i)+f_2(\xi_i)}{2}\right]$ 上，代入公式得两个值：

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Delta m_i}{\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\rho[f_1(\xi_i)-f_2(\xi_i)]\Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n}\rho[f_1(\xi_i)-f_2(\xi_i)]\Delta x_i},$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{f_1(\xi_i)+f_2(\xi_i)}{2}\Delta m_i}{\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{f_1(\xi_i)+f_2(\xi_i)}{2}\rho[f_1(\xi_i)-f_2(\xi_i)]\Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n}\rho[f_1(\xi_i)-f_2(\xi_i)]\Delta x_i}.$$

当 $\lambda\to0$ 时，这两值的极限是存在的，它們分别为上述面积的形心坐标 $\bar{x}$，$\bar{y}$，亦即：面积的形心坐标 $\bar{x}$ 及 $\bar{y}$ 为：

$$\bar{x}=\frac{\int_a^b x[f_1(x)-f_2(x)]\,dx}{A},$$

$$\bar{y}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b [f_1^2(x)-f_2^2(x)]\,dx}{A},$$

这里 $A=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]dx$ 为上述图形的面积。

[例1] 求以 r 为半徑的半圓弧及半圓的形心。設此半圓弧的方程为(图 3-3-22)

$$y=\sqrt{r^2-x^2},$$

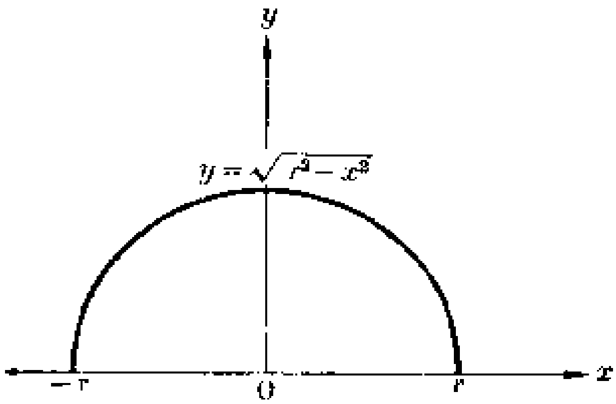


图 3-3-22

由对称性知道 $\bar{x}=0$，因此只要求 $\bar{y}$。对半圓弧而言

$$\bar{y}=\frac{\int_{-r}^{r} y\sqrt{1+y'^2}\,dx}{s}=\frac{2\pi\int_{-r}^{r} y\sqrt{1+y'^2}\,dx}{2\pi s}=\frac{F}{2\pi s},$$

此处 F 为将半圓弧繞 x 軸旋轉而成的旋轉体之側面积，也就是以 r 为半徑的球的表面积，所以

$$\bar{y}=\frac{4\pi r^2}{2\pi\cdot\pi r}=\frac{2r}{\pi}.$$

对半圓而言也有 $\bar{x}=0$，而：

$$\bar{y}=\frac{\frac{1}{2}\int_{-r}^{r} y^2dx}{A}=\frac{\pi\int_{-r}^{r} y^2dx}{2\pi A}=\frac{V}{2\pi A},$$

此处 V 为将半圓繞 x 軸旋轉而成的旋轉体的体积，也就是以 r 为半徑的球的体积，所以

$$\bar{y}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi\cdot\frac{1}{2}\pi r^2}=\frac{4r}{3\pi}.$$

这个例子也給出了两个公式：

$$\bar{y}=\frac{F}{2\pi s}\quad 及\quad \bar{y}=\frac{V}{2\pi A}.$$

这两个公式对于不取負值的 $f(x)$ 总是成立的，前者給出弧的形心的纵坐标 $\bar{y}$，和由該弧繞 x 軸旋轉而成旋轉体的側面积 F 以及弧长 s 三者之間的关系。后者給出了曲綫段下曲边梯形的形心纵坐标 $\bar{y}$，和由該曲綫段繞 x 軸旋轉而成的旋轉体体积 V 以及此曲边梯形面积 A 三者之間的关系。这两个公式也称为古鲁金(Guldin)定理。

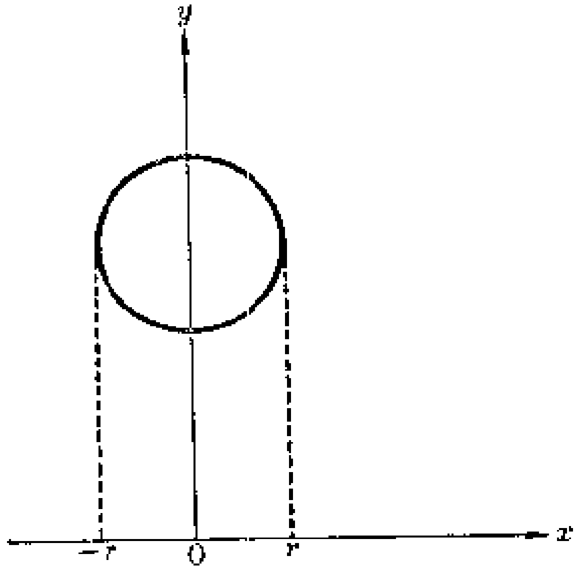


图 3-3-23

［例 2］ 求 $x^2+(y-b)^2=r^2$ $(b>r>0)$ 繞 x 軸旋轉所成旋轉体之側面积(图 3-3-23)。

由于这圓弧的形心 $\bar{y}=b$，而圓周长 $s=2\pi r$，利用公式，旋轉体側面积

$$F=2\pi s\bar{y}=4\pi^2 rb.$$

§6 定积分的近似計算

在許多实际問題中往往会遇到"不可求原函数"的积分，或者虽然原函数可求但計算很复杂的一类积分。例如概率积分

$$H(x)=\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

椭圓积分

$$K(x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-K^2\sin^2 t}} \quad \left(0\leqslant x<\frac{\pi}{2},\ K^2<1\right).$$

以上这些被积函数的原函数是存在的，但不能以显式表示出来，当然就不能依賴于原函数来計算某一 $x-x_0$ 的积分数值，我們的問題是如何近似地求出积分的数值。

在本节中，只介紹两种相当有效的而常用的同时也是比較簡单的近似公式。

黎曼积分的定义实质上是用帶直角的折綫来无限地逼近被积函数后得到的。在一些积分近似公式中其实质也是寻求被积函数的近似函数，然后对这个近似函数积分，并且，这个近似函数的积分应当是容易計算而精确度較高的。

(1) 梯形公式

梯形公式实质上就是将曲綫弧换为直綫，再計算直边梯形的面积。假設要計算积分

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

将积分区間 $[a,\ b]$ n 等分（也可以不要求等分，原理是一样的）

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

現在来考察每一个小区間 $[x_{i-1},\ x_i]$（图 3-3-24），我們知道以 $y_{i-1}=f(x_{i-1})$，$y_i=f(x_i)$ 为两底并以 $h=\dfrac{b-a}{n}$ 为高的梯形 $x_{i-1}x_iM_iM_{i-1}$ 的面积 S_i 为：

$$S_i=\frac{h}{2}[y_{i-1}+y_i] \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

由这 n 个小梯形面积之总和，就得到积分的近似公式：

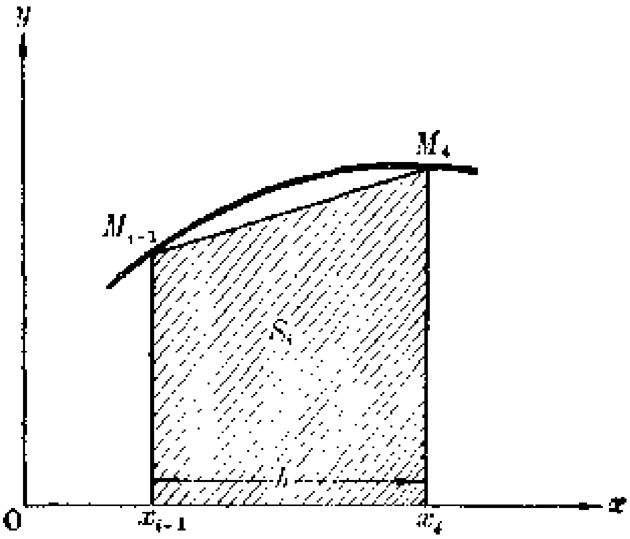


图 3-3-24

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \sum_{i=1}^{n} S_i$$

$$=\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}[y_{i-1}+y_i]$$

$$=\frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+y_3+\cdots+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right].$$

这就是梯形公式。

(2) 辛浦生公式

辛浦生公式实质上就是将曲綫弧换为二次抛物綫弧，再对抛物綫弧积分。

首先我們考虑一个簡单情形：

計算积分

$$\int_0^{2h} f(x)\,dx.$$

記 $f(0)$，$f(h)$ 和 $f(2h)$ 分别为 y_0，y_1，y_2，过 $M_0(0,\ y_0)$，$M_1(h,\ y_1)$，$M_2(2h,\ y_2)$ 三点作一个二次抛物綫(图 3-3-25)，

$$y=ax^2+bx+c,$$

a，b，c 是待定系数，决定如下，并且它們是唯一决定的。

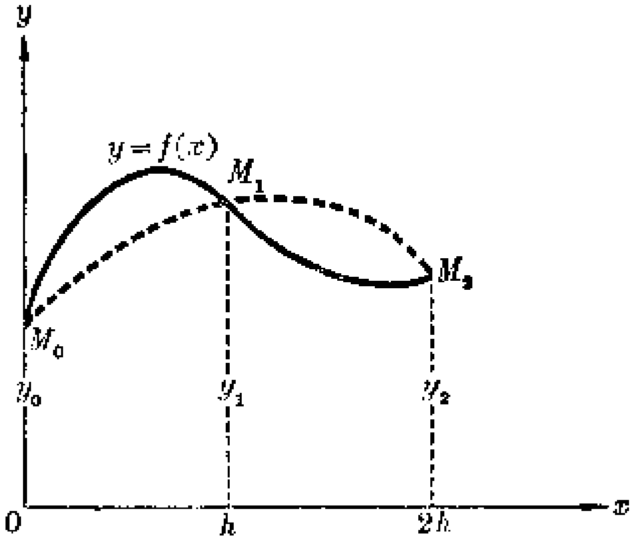


图 3-3-25

$$
\begin{cases}
y_0 = c, \\
y_1 = ah^2 + bh + c, \\
y_2 = 4ah^2 + 2bh + c,
\end{cases} \tag{*}
$$

但是我們不必把 a, b, c 解出来，我們考察：

$$
\int_0^{2h} (ax^2 + bx + c)\,dx = \frac{8}{3} ah^3 + 2bh^2 + 2ch
$$

$$
= \frac{h}{3}(8ah^2 + 6bh + 6c),
$$

由方程組(*)知道

$$
8ah^2 + 6bh + 6c = y_0 + 4y_1 + y_2,
$$

于是就得到近似公式：

$$
\int_0^{2h} f(x)\,dx \doteq \int_0^{2h} (ax^2 + bx + c)\,dx
$$

$$
= \frac{2h}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2),
$$

立即知道对于形如 $\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx$ 的积分，有如下的近似公式

$$
\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \doteq \frac{x_2 - x_0}{6}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right],
$$

这里 x_1 为 $[x_0, x_2]$ 的中点，$x_1=\frac{x_0+x_2}{2}$.

一般地我們就得到辛浦生公式。将积分区間$[a, b]$ $2n$ 等分，

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{2n}=b,$$

在每一小段 $[x_0, x_2][x_2, x_4]\cdots[x_{2n-2}, x_{2n}]$ 上应用上面的近似公式得

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{6n}\{y_0+4(y_1+y_3+y_5+\cdots+y_{2n-1})$$

$$+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2})+y_{2n}\}.$$

［例］　我們已經知道

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}=0.785398\cdots.$$

依梯形公式，取 $n=10$，計算到 4 位小数

$x_0=0.0$	$y_0=1.0000$	$x_1=0.1$	$y_1=0.9901$
$x_{10}=1.0$	$y_{10}=0.5000$	$x_2=0.2$	$y_2=0.9615$
	和数 1.5000	$x_3=0.3$	$y_3=0.9174$
		$x_4=0.4$	$y_4=0.8621$
		$x_5=0.5$	$y_5=0.8000$
		$x_6=0.6$	$y_6=0.7353$
		$x_7=0.7$	$y_7=0.6711$
		$x_8=0.8$	$y_8=0.6098$
		$x_9=0.9$	$y_9=0.5525$
			和数 7.0998

得近似值　　$\frac{1}{10}\left(\frac{1.5000}{2}+7.0998\right)=0.7849.$

按辛浦生公式取 $n=2$，計算到 5 位小数

$x_0=0$　　　　$y_0=1.00000$

$x_1=\frac{1}{4}$　　　　$4y_1=3.76471$

$x_2=\frac{1}{2}$　　　　$2y_2=1.60000$

$x_3=\frac{3}{4}$　　　　$4y_3=2.56000$

$x_4=1$　　　　$y_4=0.50000$

　　　　和数 9.42471

得近似值　　$\frac{1}{12}\times 9.42471=0.78539$.

习　　题

1．求下列曲綫的弧长:

(1) $y=x^{\frac{3}{2}}\quad(0\leqslant x\leqslant 4)$;

(2) $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y\quad(1\leqslant y\leqslant e)$;

(3) $y=\ln\cos x\quad\left(0\leqslant x\leqslant a,\ a<\frac{\pi}{2}\right)$;

(4) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\quad(a>0)$;

(5) $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(6) $x=a(\cos t+t\sin t),\ y=a(\sin t-t\cos t)\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(7) $r=a(1+\cos\theta)\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$;

(8) $r=\frac{p}{1+\cos\theta}\quad\left(|\theta|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

2．計算由下列曲綫圍成的平面图形面积:

(1) $y=|\ln x|,\ y=0\quad(0.1\leqslant x\leqslant 10)$;

(2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

(3) $y=x,\ y=x+\sin^2 x\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$;

(4) 封閉在二条拋物綫:

$$y^2=2px,\quad x^2=2py$$

之内的图形;

(5) 蚶綫 $r=a\cos\theta+b$ $(b\geqslant a)$ 当 $b=a$ 时即为心脏綫;

(6) 笛卡儿叶形綫 $x^3+y^3-3xy=0$;

(7) $r=\dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}$　$(0<\varepsilon<1)$ (注:計算时可能出現无界情况处理方法,見前注);

(8) 証明对于由参数方程:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\quad (t_0\leqslant t\leqslant T),$$

繪出的曲綫所圍成的面积公式为:

$$S=\int_{t_0}^{T}\varphi(t)\psi'(t)\,dt=-\int_{t_0}^{T}\varphi'(t)\psi(t)\,dt,$$

其中当参数增加时曲綫是反时針方向描繪的,

或　$$S=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}|\varphi(t)\psi'(t)-\varphi'(t)\psi(t)|\,dt;$$

(9) $x=2t-t^2,\ y=2t^2-t^3$;

(10) 星形綫 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$;

(11) $x^4+y^4=ax^2y$.

(提示: 令 $y=tx$, 計算时可能出現无界情况見前注。)

3. 几何体体积:

(1) 求截錐体体积,其上下底为軸长分别等于 A, B 和 a, b 的橢圓,而高为 h;

(2) 求橢球体体积:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

(3) 求由下列两曲面

$$x^2+y^2+z^2=a^2,\quad x^2+y^2=ax$$

所圍成的体积;

(4) 求用通过底面直徑的平面从直圓柱上切下的弓形体体积,設圓柱的底半徑为 a, 底面方程为 $x^2+y^2\leqslant a^2$, 截面通过 x 軸上的直徑且与底面成 α 角。

4. 求旋轉体的体积:

(1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 繞 x 軸;

(2) $y=\sin x$, $y=0$　$(0\leqslant x\leqslant\pi)$,

(i) 繞 x 軸,　　　　(ii) 繞 y 軸;

(3) $x=a\sin^3 t,\ y=b\cos^3 t\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，

(i) 繞 x 軸，　　(ii) 繞 y 軸；

(4) 証明由 $a\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant y\leqslant y(x)$（其中 $y(x)$ 是連續函数）所圍成的面积繞 y 軸旋轉所成的旋轉体体积为：

$$V=\int_a^b 2\pi xy(x)\,dx;$$

(5) $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi),\ y=0$

(i) 繞 x 軸，　(ii) 繞 y 軸，　(iii) 繞直綫 $y=2a$；

(6) 証明把面积 $0\leqslant\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\leqslant\pi,\ 0\leqslant r\leqslant r(\theta)$ 繞极軸旋轉所成的体积等于：

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta\,d\theta;$$

(7) $r=a(1+\cos\theta)$ 繞极軸；

(8) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 繞 x 軸。

5．求旋轉体的側面积：

(1) 旋輪綫 $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 繞 x 軸；

(2) 星形綫 $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$ 繞 x 軸；

(3) $y^2=2px\ (0\leqslant x\leqslant a)$ 繞 x 軸及 y 軸；

(4) $x^2=2py+a\ (0\leqslant x\leqslant a)$ 繞 x 軸及 y 軸；

(5) $r=a(1+\cos\theta)$ 繞极軸；

(6) 双紐綫 $r^2=2a^2\cos 2\theta$，

(i) 繞极軸，　(ii) 繞軸 $\theta=\frac{\pi}{2}$，　(iii) 繞軸 $\theta=\frac{\pi}{4}$；

(7) 証明由 $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t)\ (t_0\leqslant t\leqslant T)$ 与 Oxy 平面間所限的柱面面积等于

$$S=\int_{t_0}^T \chi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

6．物理应用：

(1) 求圓弧 $x=a\cos\theta,\ y=a\sin\theta\ (|\theta|\leqslant\alpha\leqslant\pi)$ 的形心座标；

(2) 求由拋物綫 $ax=y^2,\ ay=x^2\ (a>0)$ 所圍成的图形的形心座标；

(3) 証明：曲綫繞某一不与其相交的軸旋轉所得的曲面面积的大小，等于曲綫的弧長乘上形心座标繞同一軸所描出的圓周（Guldin 第一定理）；

(4) 求旋輪綫 $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 与 x 軸所圍成

的图形的形心座标；

(5) 証明：平面图形繞不与其相交的軸旋轉所得的旋轉体体积，等于此图形的面积与重心座标繞同一軸所描出的周长乘积 (Guldin 第二定理)；

(6) 求椭圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

在第一象限部分的形心座标；

(7) 应用 Guldin 第二定理推导 4.(6)。关于极座标下旋轉体体积的公式；

(8) 求半徑为 a 的半球

$$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2,\quad z\geqslant 0$$

的形心座标；

(9) 軸长为 $l=10$ 米，密度分布为 $\rho=\rho(x)=(6+0.3x)$ 千克/米，其中 x 为距軸的一个端点的距离，求軸之质量；

(10) 求水对于垂直壁上的压力，这壁的形状为半球形，半徑为 a，且其直徑位于水表面；

(11) 半徑为 R 密度为 ρ 的球壳以角速度 ω 繞其直徑旋轉，求此球的动能；

(12) 半徑为 a 的球沉入密度为 ρ 的液体中，深度(距球心)为 $h(h\geqslant a)$，求在球表面上方和下方所受液体压力的表达式。

7. 近似計算：

(1) 应用梯形公式計算(取 $n=12$)

$$\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx;$$

(2) 利用梯形公式計算：

(i) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x}\quad(n=8)$，　　(ii) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x^3}\quad(n=12)$；

(3) 应用辛浦生公式計算：

(i) $\displaystyle\int_1^2\sqrt{x}\,dx\quad(n=4)$，　　(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\,dx\quad(n=10)$，

(iii) $\displaystyle\int_0^1\frac{x\,dx}{\ln(1+x)}\quad(n=6)$，　　(iv) $\displaystyle G=\int_0^1\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx\quad(n=10)$，

第四章　含参变量的积分

若函数 $f(x, y)$ 在矩形 $[a, b; c, d]$ 上有界，如果把 y 固定为 $[c, d]$ 上的一点 y_0 时，函数 $f(x,y_0)$ 就成为一个变量 x 的函数了。若这个函数在 $[a, b]$ 上可积，则 $\int_a^b f(x, y_0)dx$ 就是一个唯一确定的数。这个数当然与 y_0 有关。当 y_0 在 $[c, d]$ 上变动时所得到的积分值，一般說来是不同的，記为

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx,$$

它是 y 的函数，定义域为 $[c, d]$. 被积函数 $f(x, y)$ 所依赖的变量 y，它在积分过程中保持某一个固定的值，通常我們称它为参变量。积分 $\int_a^b f(x,y)\,dx$ 称为含参变量的积分。

$I(y)$ 是一个由含一个参变量的积分所确定的函数，它是一种新形式的函数，是通过定积分来确定的。这种形式的函数在数学的理論和应用上占有重要地位，有許多很有用的特殊函数就是这种形式的函数。

下面我們从已有的关于二元函数的性质来討論这种由积分所确定的函数的性质——連續性，可微性与可积性。

定理 1　設 $f(x,y)$ 在矩形 $[a, b; c, d]$ 上連續，则

$$I(y)=\int_a^b f(x, y)dx$$

是 $[c, d]$ 上的連續函数。

【証明】　只要 y 及 $y+\Delta y$ 都属于 $[c, d]$ 就有

$$I(y+\Delta y)-I(y)=\int_a^b [f(x, y+\Delta y)-f(x, y)]\,dx,$$

因为 $f(x, y)$ 在 $[a, b; c, d]$ 上連續，从而就一致連續，因此对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对于这个矩形内任何两点 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2)，只要 $|x_1-x_2|<\delta$，$|y_1-y_2|<\delta$ 就有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon.$$

而在我們这个定理中，只要 $|\Delta y|<\delta$，那么，对一切 x 恒成立

$$|f(x,y+\Delta y)-f(x,y)|<\varepsilon,$$

于是
$$|I(y+\Delta y)-I(y)|<\varepsilon\int_a^b dx=\varepsilon(b-a),$$

所以 $I(y)$ 在 $[c, d]$ 上連續。

（注） 这个定理的結論也可以改写为

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x, y)\,dx=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x, y)dx,$$

也就是极限运算可以通过积分号。

定理的条件还可以减弱，参見习題 5。

定理 2 設 $f(x, y)$ 及 $f'_y(x, y)$ 都在矩形 $[a, b; c, d]$ 上連續，则

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\,dx=\int_a^b f'_y(x, y)\,dx=\int_a^b \frac{\partial}{\partial y}f(x, y)dx,$$

也就是微分运算可以通过积分号的定理。

【証明】 对于 $[c, d]$ 上任何一点 y，設 $y+\Delta y$ 也属于 $[c, d]$，那么

$$\frac{I(y+\Delta y)-I(y)}{\Delta y}=\int_a^b \frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y}\,dx.$$

利用拉格郎日定理，

$$\frac{I(y+\Delta y)-I(y)}{\Delta y}=\int_a^b f'_y(x, y+\theta\Delta y)\,dx \quad (0<\theta<1).$$

令 $\Delta y\to 0$，右端的积分再利用定理 1 的結果，得

$$\frac{dI(y)}{dy}=\int_a^b f'_y(x, y)\,dx.$$

这就是所要証明的結果。

以上所給的积分其积分限 a 与 b 都是常数，但在实际应用上还会遇到积分限也含有参变量 y，卽形如

$$F(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\,dx$$

的积分。我們来考虑这种函数 $F(y)$ 的性质。

定理 3 若 $f(x, y)$ 在矩形 $[a, b; c, d]$ 上連續，函数 $a(y)$ 及 $b(y)$ 都在 $[c, d]$ 上連續，并且

$$a \leqslant a(y) \leqslant b, \quad a \leqslant b(y) \leqslant b \quad (c \leqslant y \leqslant d),$$

则

$$F(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\,dx$$

在 $[c, d]$ 上連續。

与定理 1 的証明相仿地我們考虑

$$\begin{aligned} F(y+\Delta y)-F(y) &= \int_{a(y+\Delta y)}^{b(y+\Delta y)} f(x, y+\Delta y)\,dx-\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\,dx \\ &= \int_{a(y+\Delta y)}^{a(y)} f(x, y+\Delta y)\,dx+\int_{a(y)}^{b(y)} [f(x, y+\Delta y)-f(x, y)]\,dx \\ &\quad +\int_{b(y)}^{b(y+\Delta y)} f(x, y+\Delta y)\,dx, \end{aligned}$$

当 $\Delta y \to 0$ 时右端第一个和第三个积分趋于零，而第二个积分正象定理 1 的証明中那样，也趋于零，于是定理得証。

定理 4 若函数 $f(x, y)$ 及 $f'_y(x, y)$ 都在 $[a, b; c, d]$ 上連續，同时在 $[c, d]$ 上 $a'(y)$ 及 $b'(y)$ 皆存在，并且

$$a \leqslant a(y) \leqslant b, \quad a \leqslant b(y) \leqslant b \quad (c \leqslant y \leqslant d),$$

则

$$\begin{aligned} F'(y) &= \frac{d}{dy}\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\,dx \\ &= \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y)\,dx+f[b(y), y]\,b'(y)-f[a(y), y]\,a'(y). \end{aligned}$$

这个式子称为萊伯尼茲公式。

【証明】 考虑函数 $F(y)$ 在 $[c, d]$ 上任何一点 y_0 处的导数。由于

$$F(y)=\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y)\,dx+\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y)\,dx-\int_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,y)dx$$
$$=F_1(y)+F_2(y)-F_3(y),$$

現在分别考虑 $F_i(y)$ $(i=1, 2, 3)$ 在点 y_0 处的导数。由定理 2 得

$$F'_1(y_0)=\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f'_y(x, y_0)\,dx,$$

此外，由于 $F_2(y_0)=0$，所以

$$F'_2(y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{F_2(y)-F_2(y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{F_2(y)}{y-y_0}$$
$$=\lim_{y\to y_0}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\frac{f(x, y)}{y-y_0}\,dx.$$

应用积分中值定理

$$F'_2(y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{b(y)-b(y_0)}{y-y_0}\cdot f(\bar{x}, y),$$

这里 $\bar{x}$ 在 $b(y)$ 和 $b(y_0)$ 之間。

再注意到 $f(x, y)$ 的連續性及 $b(y)$ 可微，于是得

$$F'_2(y_0)=b'(y_0)f[b(y_0), y_0].$$

同样可以証明：

$$F'_3(y_0)=a'(y_0)f[a(y_0)\cdot y_0].$$

这样就証明了定理 4。

[例 1] 設 $F(y)=\int_y^{y^2}\frac{\sin yx}{x}\,dx$，求 $F'(y)$.

应用莱伯尼兹公式，容易知道定理 4 的条件是滿足的，所以有：

$$F'(y)=\int_y^{y^2}\cos yx\,dx+2y\cdot\frac{\sin y^3}{y^2}-1\cdot\frac{\sin y^2}{y}$$
$$=\frac{\sin yx}{y}\Big|_y^{y^2}+\frac{2\sin y^3}{y}-\frac{\sin y^2}{y}$$
$$=\frac{3\sin y^3-2\sin y^2}{y}.$$

[例 2]　求 $I(\theta)=\int_0^\pi \ln(1+\theta\cos x)dx$，其中 $|\theta|<1$。

我們利用积分号下求导数来求这个积分。对 $|\theta|<1$ 中任一定值 θ，常可以取到 b，使 $|\theta|<b<1$，这时 $f(x,\theta)$ 和 $f_\theta(x,\theta)$ 在 $0\le x\le\pi$，$-b\le\theta\le b$ 上是連續函数，利用定理 2 求 $I'(\theta)$：

$$I'(\theta)=\int_0^\pi \frac{\cos x}{1+\theta\cos x}dx=\frac{1}{\theta}\int_0^\pi\left(1-\frac{1}{1+\theta\cos x}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{\theta}-\frac{1}{\theta}\int_0^\pi\frac{dx}{1+\theta\cos x}.$$

作代換 $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$，求得一个原函数

$$\int\frac{dx}{1+\theta\cos x}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{1+\theta\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt=\int\frac{2dt}{(1+\theta)+(1-\theta)t^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-\theta^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right),$$

所以

$$I'(\theta)=\frac{\pi}{\theta}-\frac{2}{\theta\sqrt{1-\theta^2}}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\theta\sqrt{1-\theta^2}}\right).$$

这个結論对于 $-1<\theta<1$ 中一切 θ 是成立的。

再对 θ 积分，得

$$I(\theta)=\pi\left(\ln\theta+\ln\frac{1+\sqrt{1-\theta^2}}{\theta}\right)+c$$

$$=\pi\ln(1+\sqrt{1-\theta^2})+c.$$

現在再来确定常数 c，由原来的定义知 $I(0)=0$，再由上面的式子得

$$c=-\pi\ln 2=\pi\ln\frac{1}{2},$$

最后得

$$I(\theta)=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\theta^2}}{2}.$$

下面我們考虑 $I(y)$ 的可积性。若 $f(x, y)$ 在矩形 $[a, b; c, d]$ 上連續，那么由定理1，以下两个函数将分别在 $[a, b]$ 及 $[c, d]$ 上連續

$$J(x)=\int_c^d f(x, y)dy,\quad I(y)=\int_a^b f(x, y)dx,$$

因此 $J(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，$I(y)$ 在 $[c, d]$ 上可积，記为：

$$\int_a^b J(x)\,dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x, y)dy,$$

$$\int_c^d I(y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x, y)dx.$$

我們要問这两个积分数値是否相同。

定理5　若 $f(x, y)$ 在矩形 $[a, b, c, d]$ 上連續，則

$$\int_c^d dy\int_a^b f(x, y)\,dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x, y)dy,$$

也就是积分順序可以交换的定理。

【証明】　記 $I_1(u)=\int_c^u dy\int_a^b f(x, y)dx,$

$$I_2(u)=\int_a^b dx\int_c^u f(x, y)dy\quad(c\leqslant u\leqslant d).$$

首先証明 $I_1'(u)=I_2'(u)$ 如下：

对于变动上限的积分 $\int_c^u dy\int_a^b f(x, y)\,dx=\int_c^u I(y)dy$ 而言，因为被积函数 $I(y)$ 連續，所以关于上限 u 的导数为

$$I_1'(u)=I(y)=\int_a^b f(x, y)dx.$$

对于另一个积分

$$\int_a^b dx\int_c^u f(x, y)\,dy=\int_a^b F(x, u)dx,$$

这里　　$F(x, u)=\int_c^u f(x, y)\,dy.$

应用定理2得

$$I_2'(u)=\int_a^b F_u'(x,u)\,dx=\int_a^b f(x,y)\,dx.$$

于是証明了 $I_1'(u)=I_2'(u)$，所以有

$$I_1(u)=I_2(u)+\alpha\quad(\alpha\text{ 为一常数}).$$

現在来确定常数 α，令 $u=c$，得

$$I_1(c)=0,\ I_2(c)=0,$$

于是 $\alpha=0$，証明了

$$I_1(u)=I_2(u)\quad(c\leqslant u\leqslant d).$$

再令 $u=d$，定理 5 得証。

[例 3] 求 $I=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\quad(a>0,\ b>0)$。

我們知道 $$\int_a^b x^y\,dy=\frac{x^b-x^a}{\ln x}.$$

所以 $$I=\int_0^1 dx\int_a^b x^y\,dy,$$

变换积分順序得(定理 5 的条件是滿足的)

$$I=\int_a^b dy\int_0^1 x^y\,dx=\int_a^b\frac{1}{1+y}\,dy=\ln\frac{1+b}{1+a}.$$

习　　題

1. 設 $F(y)=\int_y^{y^2}e^{-x^2y}\,dx$，計算 $F'(y)$。

2. 設 $F(y)=\int_0^y (x+y)f(x)\,dx$，其中 $f(x)$ 为可微函数，求 $F''(y)$。

3. 若 $F(y)=\int_0^1 \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx$，檢驗应用萊伯尼茲公式計算 $F'(0)$ 的正确性。

4. 求函数

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi\ \text{和}\ F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\quad(0<k<1)$$

的导数且証明 $E(k)$ 滿足方程:

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0.$$

5. 若函数 $f(x, y)$ 在 $[a, A;\ b, B]$ 有界，除去有限条連續曲綫：$y=\varphi_i(x)$ $\left(x\in[\alpha_i, \beta_i]\text{而}[\alpha_i, \beta_i]\subseteq[a, A],\ \varphi_i\in[b, B](i=1, 2, \cdots, n)\right)$ 而外在 $[a, A;\ b, B]$ 連續，証明

$$F(x)=\int_b^B f(x, y)\,dy$$

在 $[a, A]$ 上連續。

6. 研究函数

$$F(y)=\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,dx$$

的連續性，其中 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上連續且为正的函数。

7. 应用按参数微分法計算积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2-\sin^2 x)\,dx\quad(a>1)$（不必定常数，若計算时出現无界情况，同前注一样取极限計算）；

(2) $\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\,dx\quad(|a|<1)$。

8. 应用积分号下求积分方法計算积分：

(1) $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx\quad(a>0, b>0)$；

(2) $\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx\quad(a>0, b>0)$。

（注：若出現无界情况与前面同样处理。）

9. 証明

$$\int_0^1 dx\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\neq\int_0^1 dy\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx.$$

第五章　各种不同形式积分(二重积分、三重积分、第一类曲綫积分、第一类曲面积分)的定义及性质

§1　二重积分、三重积分、第一类曲綫积分、第一类曲面积分的概念

我們先来考虑一个富有启发性的問題，它說明了我們应当研究什么形式的和式的极限。我們的問題是求一个不均匀物体的质量，設該物体的密度函数 $f(M)$ 是点 M 的連續函数。由于被考慮的物体的几何形状不同，我們分下面五种情形分别討論之。

1. 这个物体为一根直綫段(細綫)，也就是质量分布在一根直綫段 AB 上。在本篇第二章定积分的概念和計算中，讀者已經知道，要計算出直綫段 AB 的质量，只要計算一个定积分就可以了，而这个定积分的被积函数为 $f(M)$。

2. 质量分布在一个平面图形 (σ) 上，設这个图形是有确定的面积的，它的密度函数为 $f(M)=f(x, y)$，我們把图形 (σ) 划分成可求面积的 n 个小块 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$，并把这些小块的面积仍記为 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$。在 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i)$，那么每一块 $\Delta\sigma_i$ 的质量将近似地等于 $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i (i=1, 2, \cdots, n)$，因而图形 (σ) 的总质量也就近似地等于下面的和数

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

再令 d 为这 n 个小块 $\Delta\sigma_i$ 的最大直徑，$d=\max\limits_{i=1,2,\cdots,n}\{\Delta\sigma_i \text{ 的直徑}\}$ (所謂几何体 Ω^* 的直徑是指：在 Ω^* 内任意两点間总有一个距离

当这两点在 Ω^* 内变动时，所得到的距离当然随着而有所变化，这些距离中的上确界就称为几何体 Ω^* 的直徑。例如平面上矩形的直徑就是对角綫的长度，圓的直徑就是它本身的直徑等等)，很自然地，我們会想到当 $d\to 0$ 时，上面所給出的和数将会越来越精确地表示出图形(σ)的总质量，也就是說这个总质量 m 应为

$$m=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta\sigma_i$$

$$=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

注意，这个和式的极限是和定积分中黎曼和的极限十分相象！

3．质量分布在一块体积(V)上，密度函数为 $f(M)=f(x,y,z)$，我們把这块体积划分成 n 块小体积 $\Delta V_1,\ \Delta V_2,\ \cdots,\ \Delta V_n$，并在每一块小体积上任取一点 $M_i(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)$，那么每一个小体积 ΔV_i 的质量将近似地等于 $f(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)\ \Delta V_i\ (i=1,2,\cdots,n)$。因此体积$(V)$的总质量将近似地等于

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i.$$

再令 d 表示 n 块体积 $\Delta V_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 的直徑中最大的一个(直徑的意义同上)，于是就自然地会想到，体积 (V) 的总质量应当是下面的和式的极限

$$m=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta V_i$$

$$=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i.$$

这又和定积分中黎曼和的极限多么相象！

4．质量分布在一条可求长的空間曲綫 (l) 上，它的密度函数为 $f(M)=f(x,\ y,\ z)$．这里点 $M(x,\ y,\ z)$为 (l) 上的点。我們将曲綫 (l) 分为 n 段可求长的小弧段 $\Delta s_1,\ \Delta s_2\cdots,\ \Delta s_n$，并記它們的

弧长为 $\Delta s_1, \Delta s_2, \cdots, \Delta s_n$，在每一段小弧段 Δs_i 上任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$，于是这个小弧段的质量将近似地等于 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cdot\Delta s_i$，曲綫 (l) 的总质量也将近似地等于

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i.$$

令 d 表示这 n 段小弧长 $\Delta s_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$ 中最大的一个，那么曲綫的总质量 m 就应該是：

$$\begin{aligned} m &= \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i \\ &= \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i. \end{aligned}$$

这里又遇見了相仿于定积分中黎曼和的极限！

5．质量分布在一块曲面 (S) 上，假設这块曲面有着确定的面积，密度函数为 $f(M)=f(x, y, z)$，这里点 $M(x, y, z)$ 为曲面 (S) 上的点。把曲面 (S) 分为 n 个可求面积的小曲面块 $\Delta S_1, \cdots, \Delta S_n$，并記它們的面积仍为 $\Delta S_1, \cdots, \Delta S_n$。令 d 表示其中最大的一个直徑，在每块上任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$，于是按照同样的理由，曲面 (S) 的总质量就是：

$$\begin{aligned} m &= \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i \\ &= \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i. \end{aligned}$$

仍旧类似于定积分中黎曼和的极限！

在以上的問題中，我們看到，虽然各自具体的对象不同，但归根到底总是要处理同一型式的和的极限。在物理、力学、工程技术上不仅提出了求质量的問題，还提出了大量类似的問題，或者說提出了要求我們处理相仿于定积分中黎曼和的极限問題。这里我們可以概括地給出下面的定义。

几何形体 Ω 上黎曼积分的定义： 設 Ω 为一几何形体（它或者

是直綫段，或者是曲綫段，或者是一块平面图形、一块曲面、一块空間区域等等），这个几何形体是可以度量的（也就是說它是可以求长的，或者是可以求面积的，可以求体积的等等），在这个几何形体 Ω 上定义了一个函数 $f(M)$，$M\in\Omega$。将此几何形体 Ω 分为若干可以度量的小块 $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \cdots, \Delta\Omega_n$，既然每一小块皆可度量，故它們皆有度量大小可言，把它們的度量大小仍記为 $\Delta\Omega_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$．并令

$$d=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\Omega_i \text{ 的直徑}\},$$

在每一块 $\Delta\Omega_i$ 中任意取一点 M_i，作下列和式（也称为黎曼和数，或积分和数）：

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta\Omega_i.$$

如果这个和式不論对于 Ω 的怎样分划以及 M_i 在 $\Delta\Omega_i$ 上如何取法，只要当 $d\to 0$ 时恒有同一极限 I，则称此极限为 $f(M)$ 在几何形体 Ω 上的黎曼积分，記为：

$$I=\int_\Omega f(M)\,d\Omega,$$

也就是

$$I=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta\Omega_i.$$

这个极限是与分法及 M_i 取法无关的。

上面所給出的定义用"$\varepsilon-\delta$"表示如下：

如果对任意 $\varepsilon>0$ 及一定数 I，总存在一个数 $\delta>0$，对于任意的分法，只要 $d<\delta$ 时，不管点 M_i 在 $\Delta\Omega_i$ 上如何选取，恒有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta\Omega_i-I\right|<\varepsilon,$$

则称 I 为 $f(M)$ 在 Ω 上的黎曼积分，記为：

$$I=\int_\Omega f(M)\,d\Omega.$$

現在我們将根据几何形体 Ω 的不同形态，进一步給出 Ω 上积分的

具体表示式及名称。

1. 如果几何形体 Ω 是一块可求面积的平面图形 (σ)，那么 (σ) 上的积分就称为二重积分，在直角坐标下記为

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

这里"可求面积"这一术語的正确理解应該是这样的：設 (σ) 是平面上的一块图形，用平行于坐标軸的一組直綫网划分这个图形（图 3-5-1），这一組正交直綫网将平面划分成許多小矩形，这些小矩形可分为三类：(i) 小矩形上的点全是区域 (σ) 的內点，也就是說，这类小矩形全部被含在区域 (σ) 內，如图中带有阴影的小矩形。(ii) 小矩形的点全是区域 (σ) 的外点，也就是說，这类小矩形全部在区域 (σ) 的外面。(iii) 小矩形上含有区域 (σ) 的境界点，也就是說，这类小矩形恰恰位于区域 (σ) 的境界上。

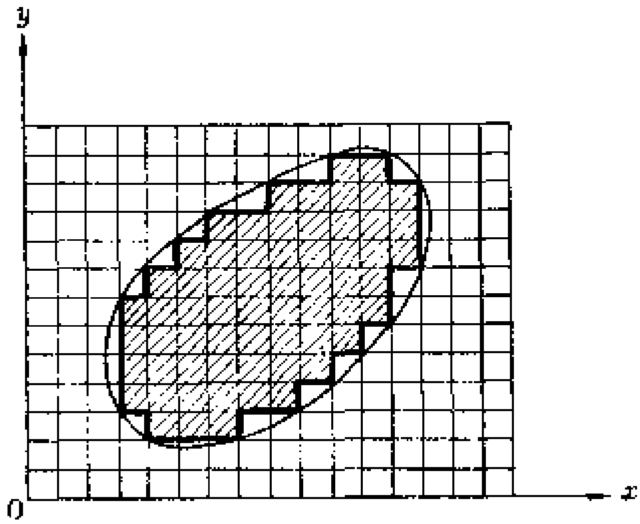


图 3-5-1

我們将所有属于第 (i) 类的小矩形的面积相加起来，記这个和数为 s（即图中阴影部分的面积），将所有属于第 (i) 类和第 (iii) 类的小矩形的面积相加起来，記这个和数为 S. 这两个和数 s 和 S 皆与正交直綫网的分划有关。对于不同的分划，一般所获得的 s（或 S）也将不同。对每一个小矩形，容易知道它的直徑就是它的对角綫长度，并記 d 为这若干个小矩形的直徑中最大的一个。如果当 $d \to 0$ 时，相应地有 $(S-s) \to 0$，我們就称这块平面图形 (σ) 是可以求面积的。

事实上讀者在本篇第二章中已經遇到过"可求面积"这一概念，在那里我們曾經讲述了定积分存在的充要条件，并給充要条件作了几何解釋——叙述了曲边梯形可求面积的概念。这里不过把曲边梯形拓广为一般的平面图形，而所依据的思想及原理却是相同的。

这样一来就不难了解，如果平面区域的境界是一条封閉連續曲綫的話，那么这块区域总是可求面积的。

2. 如果几何形体 Ω 是一块可以求体积的空間几何体 (V)，那么 (V) 上的积分就称为三重积分，在直角坐标下記为

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,\, y,\, z)\; dx\, dy\, dz.$$

3. 如果几何形体 Ω 是一可求长的空間曲綫段 (l)，那么 (l) 上的积分就称为第一类曲綫积分，記为

$$\int_{(l)} f(x,\, y,\, z)\, ds.$$

4. 如果几何形体 Ω 是一可求面积的曲面片 (S)，那么 (S) 上的积分就称为第一类曲面积分，記为

$$\iint\limits_{(S)} f(x,\, y,\, z)\, dS.$$

在下面的一章中，将专門讲述如何来計算这些积分。

特别地，如果被积函数 $f(M)=1$，由定义可以知道 $\int_\Omega d\Omega$ 就是几何形体 Ω 的度量，亦即

$$\int_\Omega d\Omega=\sum_{i=1}^{n}\Delta\Omega_i=(\Omega \text{ 的度量}).$$

正如同定积分中 $\int_a^b dx=b-a$ 正是区間 $[a,\, b]$ 的长度一样。

§2 积分存在的充要条件

本节的叙述方法和結果，都完全仿照本篇第二章定积分存在

的充要条件，因此在本节中，就不再作詳細的論証，而只叙述如下：

設 Ω 为一个可以度量的几何形体，$f(M)$ 为定义在 Ω 上的一个有界函数。我們將 Ω 分划为 n 个可以度量的小块 $\Delta\Omega_1$, $\Delta\Omega_2, \cdots, \Delta\Omega_n$。記这些小块的度量大小仍为 $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \cdots, \Delta\Omega_n$，并記 $d=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{\Delta\Omega_i$ 的直徑$\}$。由于 $f(M)$ 为 Ω 上的有界函数，所以 $f(M)$ 在每一小块 $\Delta\Omega_i$ 上存在上确界和下确界。分別記它們为 M_i 和 m_i，也就是

$$M_i=\sup_{M\in\Delta\Omega_i}\{f(M)\},\quad m_i=\inf_{M\in\Delta\Omega_i}\{f(M)\}.$$

分別作出下列两个和式

$$S=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta\Omega_i,$$

$$s=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta\Omega_i,$$

称 S 为达布大和数，s 为达布小和数。这两个和数显然是与 Ω 的分划有关的。

达布大(小)和数具有以下性质：这些性质的証明与定积分中类似性质的証明沒有任何实质上的不同。

1 在同一种分划下，黎曼和数不小于达布小和数，不大于达布大和数，亦即：

$$s\leq\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta\Omega_i\leq S,$$

这里点 M_i 为 $\Delta\Omega_i$ 上任何一点，并且当 M_i 在 $\Delta\Omega_i$ 上变动时，所获得一切黎曼和(在固定一种分划之下)的上确界和下确界恰好是 S 和 s。

2. 对一种分划添上新分划后，相应所获得的大和数不会增大，小和数不会减小。而对于任何两种分划所得的大、小和数 S_1, s_1 和 S_2, s_2 皆有：

$$s_1\leq S_2,\quad s_2\leq S_1.$$

3．小和数有上界，大和数有下界：

$$m(\Omega\text{ 的度量})\leqslant s\leqslant S\leqslant M(\Omega\text{ 的度量}),$$

这里 M 和 m 为 $f(M)$ 在 Ω 上的上、下确界。所以 $\{S\}$ 存在下确界 L，$\{s\}$ 存在上确界 l.

与定积分中达布定理相同，获得以下定理。

达布定理　当几何体 Ω 的分划无限增加，而使

$$d=\max_i\ \{\Delta\Omega_i\text{ 的直徑}\}\to 0$$

时，大和数和小和数必存在极限，且其极限值分别为 L 和 l. 也就是說：

$$\lim_{d\to 0} S=L,\qquad \lim_{d\to 0} s=l.$$

到此我們便可以給出 Ω 上积分存在的充要条件了。

1°　函数 $f(M)$ 在 Ω 上黎曼可积的充要条件为：

$$L=l,$$

也可以用另一种語言来叙述这个充要条件，如果記 ω_i 为 $f(M)$ 在 $\Delta\Omega_i$ 上的振幅，亦卽：

$$\begin{aligned}\omega_i&=M_i-m_i\\&=\sup_{M\in\Delta\Omega_i}\{f(M)\}-\inf_{M\in\Delta\Omega_i}\{f(M)\},\end{aligned}$$

那么 $f(M)$ 在 Ω 上黎曼可积的充要条件为：

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\Omega_i=0,$$

事实上，这个条件是和 $L=l$ 等价的，因为：

$$\begin{aligned}L-l&=\lim_{d\to 0}(S-s)\\&=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta\Omega_i=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\Omega_i.\end{aligned}$$

2°　函数 $f(M)$ 在 Ω 上可积的充要条件为：对任意两个正数 ε 和 σ，总存在正数 δ，对于任何 $d<\delta$ 的分划（这里 d 为 $\Delta\Omega_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的直徑中最大的一个数），那些 $\omega_{i'}\geqslant\varepsilon$ 的小几何体 $\Delta\Omega_{i'}$ 的

度量的总和 $\sum_i \Delta\Omega_i < \sigma$。

这两个充要条件的証明可以完全仿照定积分存在充要条件的証明。

这样就容易知道，閉区域 Ω 上的連續函数 $f(M)$ 必是黎曼可积的。又若有界函数 $f(M)$ 在 Ω 上不連續点全体构成一个低于 Ω 的維数的图形，函数也可积（参見习題 3）。

§3 各种积分的性质

1. 若函数 $f(M)$ 在 Ω 上可积，k 为实数，则 $kf(M)$ 在 Ω 上也可积，且有

$$\int_\Omega kf(M)d\Omega = k\int_\Omega f(M)d\Omega.$$

【証明】 由极限性质以及积分定义

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} kf(M_i)\Delta\Omega_i = k\cdot\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\Omega_i$$

卽得証明。

2. 若函数 $f(M)$ 和 $g(M)$ 皆在 Ω 上可积，则其和 $f(M)\pm g(M)$，积 $f(M)g(M)$ 也在 Ω 上可积。

利用极限性质及可积条件立卽可得証明。

3. 若函数 $f(M)$ 在 Ω 上可积，将 Ω 分为任何两个部分 Ω_1 和 Ω_2，Ω_1 和 Ω_2 皆可度量，并且不含有公共部分，那么 $f(M)$ 在 Ω_1 和 Ω_2 上皆可积，并且有

$$\int_\Omega f(M)d\Omega = \int_{\Omega_1} f(M)d\Omega + \int_{\Omega_2} f(M)d\Omega.$$

反之亦然。

4. 若函数 $f(M)$ 和 $g(M)$ 皆在 Ω 上可积，并且在 Ω 上成立着 $f(M)\leqslant g(M)$，则

$$\int_{\Omega} f(M)\,d\Omega \leqslant \int_{\Omega} g(M)\,d\Omega.$$

【証明】 由假設，$f(M)$ 和 $g(M)$ 的黎曼和数有以下关系：

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta\Omega_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(M_i)\,\Delta\Omega_i.$$

再令 $d\to 0$，这里 $d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\Omega_i$ 的直徑$\}$，按照积分定义即得証明。

5. 若 $f(M)$ 在 Ω 上可积，則 $|f(M)|$ 亦在 Ω 上可积，并且有

$$\left|\int_{\Omega} f(M)\,d\Omega\right| \leqslant \int_{\Omega} |f(M)|\,d\Omega.$$

但反之不然，也就是說若 $|f(M)|$ 在 Ω 上可积，不能断定 $f(M)$ 也在 Ω 上可积（参見习題 7）。

6. 第一中值定理：若 $f(M)$ 在 Ω 上可积，則存在常数 c，使得

$$\int_{\Omega} f(M)\,d\Omega = c\cdot(\Omega \text{ 的度量}),$$

这里 c 介于 $f(M)$ 在 Ω 上的上确界和下确界之間。

【証明】 設

$$\sup_{M\in\Omega}\{f(M)\} = M,\quad \inf_{M\in\Omega}\{f(M)\} = m.$$

由性质 4，得：

$$m\int_{\Omega} d\Omega \leqslant \int_{\Omega} f(M)\,d\Omega \leqslant M\int_{\Omega} d\Omega,$$

而 $\int_{\Omega} d\Omega$ 即为几何形体 Ω 的度量。于是得知 $\int_{\Omega} f(M)\,d\Omega$ 是介于 $m\cdot(\Omega$ 的度量$)$ 与 $M\cdot(\Omega$ 的度量$)$ 之間的。这样就証明了性质 6。

推論 若 $f(M)$ 在 Ω 上連續，則在 Ω 上至少存在一点 M^*，使

$$\int_{\Omega} f(M)\,d\Omega = f(M^*)\quad(\Omega \text{ 的度量}).$$

与定积分中相似的倘有拓广的第一中值定理（参見习題4）。此外，习題5，6也是两个重要性质，請讀者自行証明。

习　題

1. 証明任何几何形体 Ω 上有界函数 $f(M)$ 的达布定理：

$$\lim_{\lambda\to 0} S=L,\quad \lim_{\lambda\to 0} s=l,$$

其中 S，s 分别为某分划下的大和与小和，λ 为分划区域的直徑中最大者。

由此証明函数 $f(M)$ 在 Ω 上积分存在的充要条件为：

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} w_i \Delta\Omega_i=0,$$

其中 w_i 为在 $\Delta\Omega_i$ 上函数 $f(M)$ 的振幅。这条件与

$$L=l$$

是等价的。

2. 对于几何形体 Ω 上的积分，証明其四則运算的性质。

3. 証明在几何形体 Ω 上連續的函数 $f(M)$ 积分存在。更一般地証明：若有界函数 $f(M)$ 在 Ω 上除去在 Ω 中的有限个低維流形以外是連續的，則 $f(M)$ 在 Ω 上可积。

4. 証明中值定理：若 $f(M)$，$g(M)$ 在 Ω 上可积，$g(M)$ 在 Ω 不变号，則

$$\int_\Omega f(M)g(M)d\Omega=\mu\int_\Omega g(M)d\Omega,$$

其中 $\inf\limits_{M\in\Omega} f(M)\leqslant\mu\leqslant\sup\limits_{M\in\Omega} f(M)$。若 $f(M)$ 在 Ω 連續則成立：

$$\int_\Omega f(M)g(M)d\Omega=f(P)\int_\Omega g(M)d\Omega,$$

其中 $P\in\Omega$。

5. 若 $f(M)$ 在 Ω 上連續，$f(M)\geqslant 0$，但 $f(M)\neq 0$，則

$$\int_\Omega f(M)d\Omega>0.$$

6. 若 $f(M)$ 在 Ω 上連續，在 Ω 的任何部分区域 $\Omega'\subseteq\Omega$ 上

$$\int_{\Omega'} f(M)d\Omega=0,$$

則

$$f(M)\equiv 0.$$

由此証明：若 $f(M)$，$g(M)$ 在 Ω 上連續，在 Ω 的任何部分区域 $\Omega'\subseteq\Omega$ 上成立：

$$\int_{\Omega'} f(M)\,d\Omega=\int_{\Omega'} g(M)\,d\Omega,$$

則在 Ω 上成立：

$$f(M)=g(M).$$

7. 若 $|f(M)|$ 在 Ω 上可积，那么 $f(M)$ 在 Ω 上是否可积？考察函数 $f(x, y)=-1$，当 x 和 y 中至少有一个是无理数时；$f(x, y)=1$，当 x 和 y 皆为有理数时，在 $[0, 1; 0, 1]$ 上的积分。

第六章　各种积分的計算及应用

在第五章中我們引进了各种积分的概念，这些积分有很广泛的应用，許多几何、物理及力学上的量都可用积分来表示。如面积、体积、质量和重心等等。当然我們不可能用求极限的方法来求积分。因此，就有必要来研究如何計算这些积分。本章的目的就是研究如何利用定积分来計算各种积分。

§1　二重积分的計算

一、二重积分化为定积分

先考察一个例题：設 $z=f(x, y)$ 是一曲面，$f(x, y)>0$（图 3-6-1）。考虑以这个曲面为頂，底面为矩形 $[a, b; c, d]$ 的曲頂柱体的体积。这个体积可以用下面的步驟得到：将矩形区域 $[a, b; c, d]$ 分划为若干可求面积的小块 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$。把它們的面积仍記为 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$，并且又記 $d=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{\Delta\sigma_i$ 的直徑$\}$，在每一个小块 $\Delta\sigma_i$ 上任意取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i)$，作和式（黎曼和）

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

如果当区域 $[a, b; c, d]$ 的分划越分越細使得 $d\to 0$ 时，上述黎曼和不論对怎样的分划以及点 M_i 如何取法，恒有同一极限，那么此极限值就定义为以曲面 $z=f(x, y)$ 为頂，以矩形 $[a, b; c, d]$ 为底的长方柱体的体积。而这个和式的极限正好就是第五章中所引进的二重积分，换句話說，所要求的曲頂柱体的体积 V，有着以下的計算公式

$$V=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i)\,\Delta\sigma_i$$
$$=\iint\limits_{[a,b;c,d]} f(x,\ y)\,dx\,dy.$$

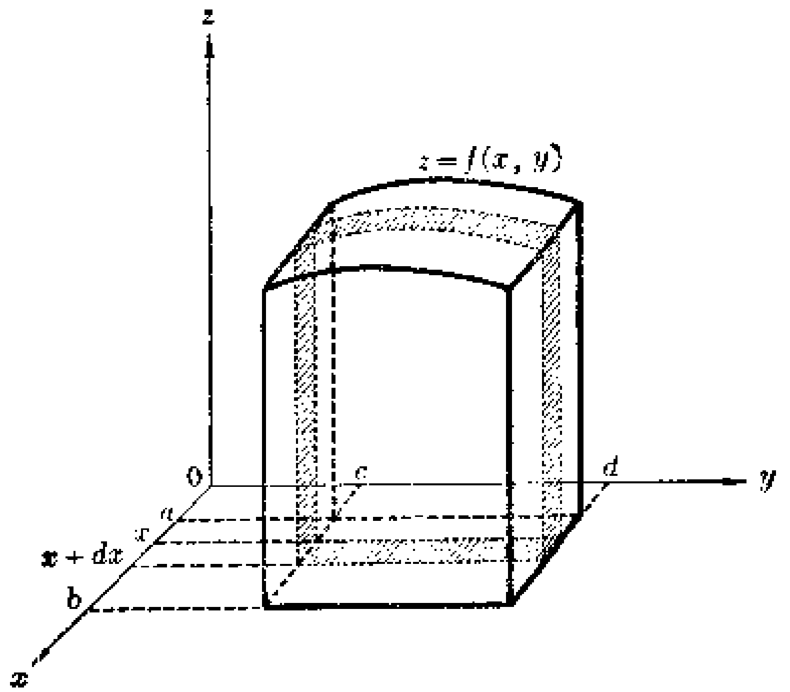


图　3-6-1

下面我們設想用另一种方法来求 V. 将 x 軸上的区間 $[a,\ b]$ 分为若干分，过每一分点作和 x 軸垂直的平面，将体积 V 分成許多薄片(图 3-6-1)。过点 x 所作的平面和体积 V 所截得的面积記为 $S(x)$，根据第三章 §3 就有

$$V=\int_a^b S(x)\,dx,$$

而 $S(x)$ 就是平面 $X=x$ (这里 x 当成固定数)上，由曲綫 $z=f(x,\ y)$ 直綫 $y=c$, $y=d$ 及 $z=0$ 所夹的面积，所以

$$S(x)=\int_c^d f(x,\ y)\,dy.$$

因此体积 V 也可以用积分

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x, y)\,dy\right)dx$$

来計算。这就引起我們提出，对一般的可积函数 $f(x, y)$ 来說，这两个积分

$$\iint\limits_{[a, b; c, d]} f(x, y)\,dx\,dy \text{ 和 } \int_a^b\left(\int_c^d f(x, y)\,dy\right)dx$$

究竟是否相同呢？下面就回答这个問題。

定理 若函数 $f(x, y)$ 在矩形区域 $[a, b; c, d]$ 上的二重积分存在，又对于每一 $x\in[a, b]$，含有参变量 x 的积分

$$\int_c^d f(x, y)\,dy$$

也存在，則

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x, y)\,dy\right)dx$$

存在，并且

$$\iint\limits_{[a, b; c, d]} f(x, y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x, y)\,dy\right)dx.$$

上面这一积分也記为

$$\iint\limits_{[a, b; c, d]} f(x, y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_c^d f(x, y)\,dy.$$

后一积分称为二次积分（先 y 后 x），也称为逐次积分，讀者在本篇第四章含参变量积分中已經遇到过。

【証明】 将区間 $[a, b]$ 插入分点（图 3-6-2）

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_r=b,$$

将区間 $[c, d]$ 也插入分点

$$c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{s-1}<y_s=d,$$

作两組直綫 $x=x_i$ $(i=0, 1, 2, \cdots, r)$ 及 $y=y_k$ $(k=0, 1, 2, \cdots, s)$ 将矩形 $[a, b; c, d]$ 分为若干小矩形。記 Δ_{ik} 为小矩形 $[x_{i-1}, x_i; y_{k-1}, y_k]$ $(i=1, 2, \cdots, r; k=1, 2, \cdots, s)$，又記 $f(x, y)$ 在 Δ_{ik} 的

上确界和下确界分别为 M_{ik} 和 m_{ik}. 在区間 $[x_{i-1}, x_i]$ 中任意取一点 ξ_i, 于是就有不等式

$$m_{ik}\Delta y_k \leqslant \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(\xi_i, y)\,dy \leqslant M_{ik}\,\Delta y_k,$$

这里
$$\Delta y_k = y_k - y_{k-1}.$$

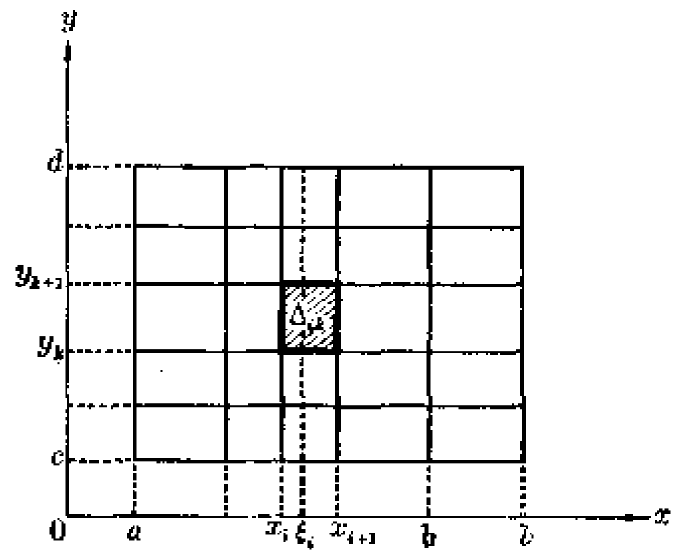


图 3-6-2

記
$$F(\xi_i) = \int_c^d f(\xi_i, y)\,dy,$$

且記 Δ_{ik} 的对角綫长度为 δ_{ik}, 而 $d = \max\limits_{i,k}\{\delta_{ik}\}$, 上面的不等式可以写为

$$\sum_k m_{ik}\,\Delta y_k \leqslant F(\xi_i) \leqslant \sum_k M_{ik}\,\Delta y_k,$$

所以
$$\sum_{i,k} m_{ik}\,\Delta y_k\,\Delta x_i \leqslant \sum_i F(\xi_i)\,\Delta x_i \leqslant \sum_{i,k} M_{ik}\,\Delta y_k\,\Delta x_i,$$

这里
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

根据假設,当 $d \to 0$ 时,按照达布定理及积分存在充分条件,以下两个和式

$$\sum_{i,k} m_{ik}\,\Delta y_k\,\Delta x_i \text{ 和 } \sum_{i,k} M_{ik}\,\Delta y_k\,\Delta x_i$$

有共同的极限,极限值就是二重积分

$$\iint\limits_{[a,b;c,d]} f(x, y)\,dx\,dy,$$

所以 $$\lim\sum_i F(\xi_i)\,\Delta x_i = \iint\limits_{[a,b;c,d]} f(x, y)\,dx\,dy,$$

而等式的左端，按定义就是

$$\lim\sum_i F(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b\left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right]dx.$$

这样就証明了定理。

在通常情况下，遇到的积分区域一般不是长方形的。但对区域的境界可以用連續函数来表示的情形，二重积分还是可以化为二次积分来計算。

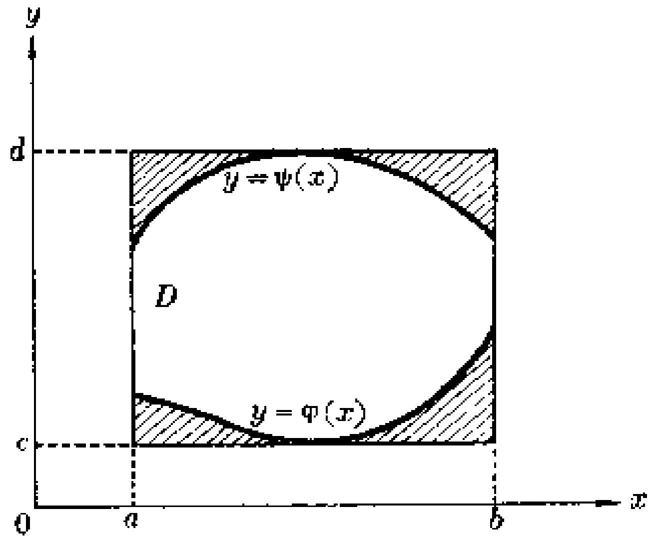


图 3-6-3

如果积分区域 D 是由两条連續曲綫

$y=\varphi(x)$ 和 $y=\psi(x)$

以及两条直綫 $x=a$，$x=b$ 所限制（图 3-6-3），則上述定理依然成立。在这样的情况下，作包含这区域的長方形 $[a, b; c, d]$ 和輔助函数

$$F(x, y)=\begin{cases} f(x, y), & \text{若}(x, y)\text{在区域 } D \text{ 中}, \\ 0, & \text{若}(x, y)\text{不在区域 } D \text{ 中}, \end{cases}$$

于是，由假定，以下积分都存在，并且

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{[a,b;c,d]} F(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b\left(\int_c^d F(x, y)\,dy\right)dx$$

$$= \int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} F(x, y)\,dy\right)dx = \int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy\right)dx.$$

（注 1） 如果区域更复杂，則一般把它分成几个象上面讲过

的区域来討論。例如在图 3-6-4 中将区域分为 P_1, P_2, P_3 分别討論之。

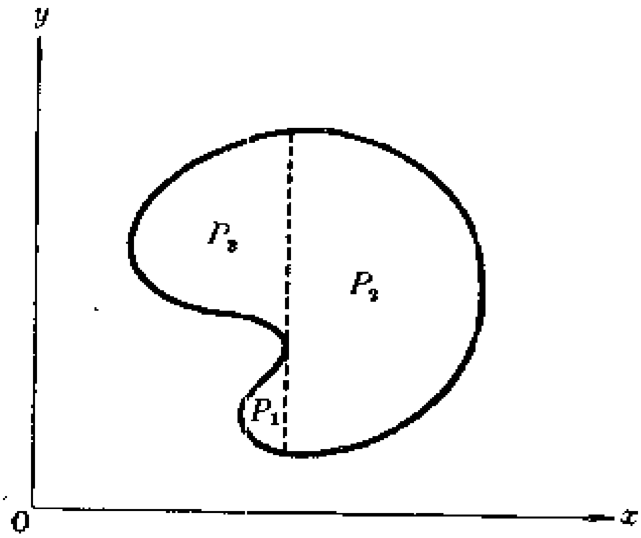


图　3-6-4

（注 2）在定理中是先对 y 求积分，而区域 D 是用不等式

$$\varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x),\quad a\leqslant x\leqslant b$$

来表示的。在相应条件下，重积分計算也可化为先对 x 求积分的逐次积分。

（注 3）特别地当 $f(x, y)$ 在 $[a, b; c, d]$ 上連續时，定理的条件显然是滿足的。因此重积分的計算可化为先 y 后 x 或先 x 后 y 的逐次积分的計算。当 f 在 $[a, b; c, d]$ 上連續时，就有下面定理：

定理　若 $f(x, y)$ 在矩形区域 $[a, b; c, d]$ 上連續，則

$$\iint\limits_{[a,b;c,d]} f(x, y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_c^d f(x, y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x, y)\,dx.$$

（注 4）下面将給出二重积分存在但二次积分不存在的例子。从这里可以看出将二重积分化为定积分的計算是需要一定的条件的。設 (σ) 是正方形 $[0, 1; 0, 1]$，在 (σ) 上定义一个二元函数 $f(x, y)$ 如下：

$$f(x, y)=\begin{cases}0, & \text{当 } x \text{ 和 } y \text{ 皆为无理数时},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 和 } y \text{ 皆为有理数时},\\ \dfrac{1}{p}, & \text{当 } x \text{ 为有理数 } x=\dfrac{r}{p}, \text{而 } y \text{ 为无理数时},\\ \dfrac{1}{q}, & \text{当 } x \text{ 为无理数，而 } y \text{ 为有理数 } y=\dfrac{s}{q} \text{ 时}.\end{cases}$$

我們先来說明，函数 $f(x, y)$ 在 (σ) 可积，并且二重积分

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy = 0,$$

因为对任意 $\varepsilon>0$，使 $\frac{1}{p}\geqslant\varepsilon$，以及 $\frac{1}{q}\geqslant\varepsilon$ 的 p，q 只有有限多个。換句話說，使 $f(x, y)\geqslant\varepsilon$ 的 p，q 只有有限个。由函数 f 的定义，我們知道只有在点 $\left(\frac{r}{p}, y\right)$ 和点 $\left(x, \frac{s}{q}\right)$ 上（这里 x，y 皆为无理数）函数 f 的值才不小于 ε，而这种类型的点皆位于有限条直綫 $x=\frac{r}{p}$ 及 $y=\frac{s}{q}$ 上，如今分正方形区域 (σ) 为許多适当小的小矩形 $\Delta\sigma_i$，这些小矩形中，有一类小矩形包含有直綫 $x=\frac{r}{p}$ 或直綫 $y=\frac{s}{q}$ 上的点，这类小矩形記为 $\Delta\sigma_{i'}$，由于直綫 $x=\frac{r}{p}$ 以及直綫 $y=\frac{s}{q}$ 只有有限多条，因此总可以将区域 (σ) 分得适当地小，使得这一类小矩形 $\Delta\sigma_{i'}$ 的面积和 $\sum_{i'}\Delta\sigma_{i'}$ 任意小。例如 $\sum\Delta\sigma_i^{(1)}<\eta$，$\eta$ 为任意給定的正数。再由可积充要条件便知道函数 $f(x, y)$ 在 (σ) 上可积。此外容易知道 f 在 (σ) 上的小和数 $s=0$，因此有

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy = 0.$$

下面再来說明，函数 $f(x, y)$ 在区域 (σ) 上的二次积分是不存在的。例如先 x 后 y 的积分是不存在的。也就是說积分

$$\int_0^1 dy\int_0^1 f(x, y)\,dx$$

是无意义的。

考虑含有参变量 y 的积分

$$\int_0^1 f(x, y)\,dx,$$

当 y 是有理数，$y=\frac{s}{q}$ 时，被积函数为

$$f(x, y)=\begin{cases} 0, & \text{当 } x \text{ 为有理数时，}\\ \dfrac{1}{q}, & \text{当 } x \text{ 为无理数时。}\end{cases}$$

这是狄利克来型的函数，它在 $[0, 1]$ 上是不可积的。

当 y 为无理数时，被积函数为

$$f(x, y)=\begin{cases} 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时，}\\ \dfrac{1}{p}, & \text{当 } x \text{ 为有理数 } x=\dfrac{r}{p} \text{ 时。}\end{cases}$$

这是黎曼函数，在本篇第二章中已經知道它在 [0, 1] 上的积分存在。

于是我們得到，含参变量 y 的积分(即 y 的函数)

$$J(y)=\int_0^1 f(x, y)\,dx$$

在区間 [0, 1] 上的所有有理点处无定义，所以积分

$$\int_0^1 dy\int_0^1 f(x, y)\,dx$$

不存在。

同样可以說明，先 y 后 x 的二次积分也不存在。

下面我們考慮如何将二重积分化为定积分来計算的例題：

[例 1] 积分区域 (σ) 为直綫 $y=x$ 和抛物綫 $y=x^2$ 所夹部分(图 3-6-5)，求函数

$$f(x, y)=\frac{1}{2}(2-x-y)$$

在 (σ) 上的二重积分。由于被积函数是連續的，故按定理

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy,$$

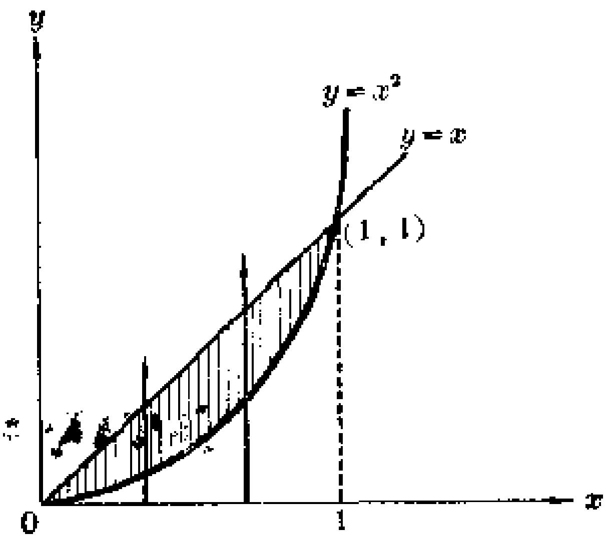


图 3-6-5

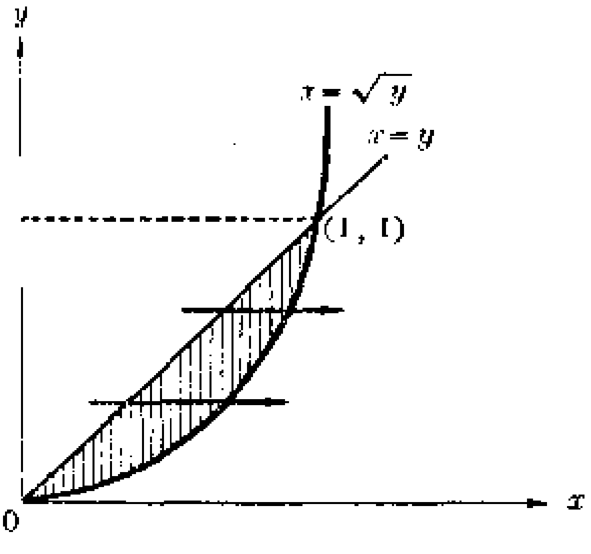


图 3-6-6

在本例中，$[a, b]$ 就是 $[0, 1]$，$\psi(x)$ 是 x，$\varphi(x)$ 是 x^2，亦即积分区域 (σ) 是由不等式 $x^2\leqslant y\leqslant x$，$0\leqslant x\leqslant 1$ 所表示。所以

$$\iint\limits_{(\sigma)}\frac{2-x-y}{2}\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}\frac{2-x-y}{2}\,dy$$
$$=\int_0^1\left(\frac{2-x}{2}y-\frac{y^2}{4}\right)\Big|_{x^2}^{x}dx$$
$$=\int_0^1\frac{1}{4}(4x-7x^2+2x^3+x^4)\,dx$$
$$=\frac{11}{120}.$$

这积分值就是图 3-6-7 所示体积。也就是在区域 (σ) 之上，在平面

$$z=\frac{1}{2}(2-x-y)$$

之下的一块体积。在本例中，由于被积函数在 (σ) 上是連續的，当然也可以将二重积分化为先 x 后 y 的二次积分来計算(图 3-6-6)。这时积分区域 (σ) 是由不等式 $y\leqslant x\leqslant\sqrt{y}$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 所表示

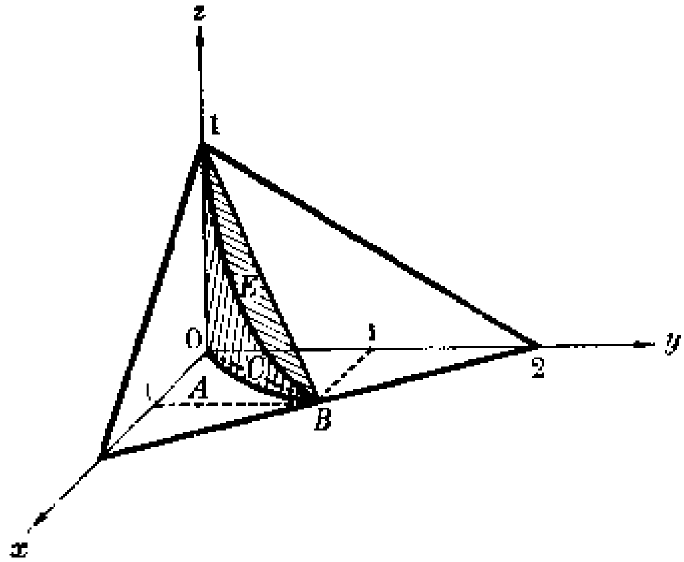


图 3-6-7

$$\iint\limits_{(\sigma)}\frac{2-x-y}{2}\,dx\,dy=\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}\frac{2-x-y}{2}\,dx=\frac{11}{120}.$$

[例 2] 求由下列曲面所界的体积(图 3-6-8)

$$z=x+y,\quad z=xy,\quad x+y=1,$$
$$x=0,\quad y=0.$$

我們有
$$V=\iint\limits_{(\sigma)}(x+y-xy)\,dx\,dy,$$

积分区域 (σ) 是 x 軸，y 軸，$x+y=1$ 三直綫圍成的三角形(图 3-6-9)，即由不等式 $0\leqslant y\leqslant 1-x$，$0\leqslant x\leqslant 1$ 所表示。

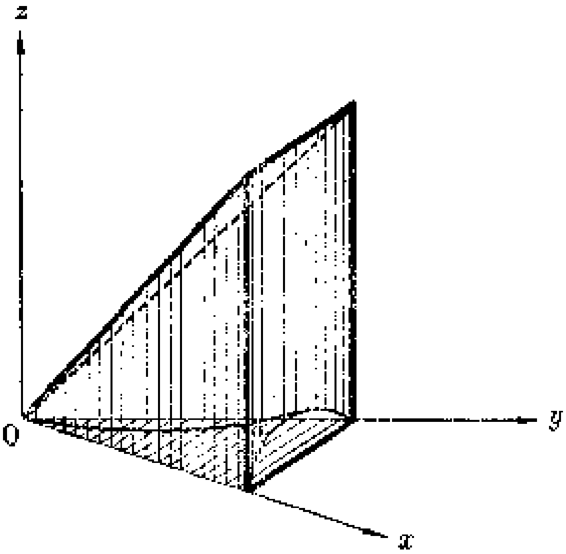


图 3-6-8

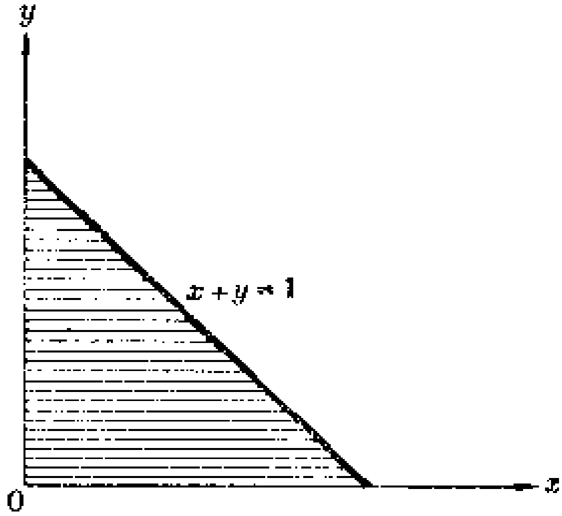


图 3-6-9

所以
$$V=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}(x+y-xy)\,dy\right]dx$$
$$=\int_0^1\left[xy+(1-x)\cdot\frac{1}{2}y^2\right]\Big|_0^{1-x}dx$$
$$=\int_0^1\left[x(1-x)+(1-x)\cdot\frac{1}{2}(1-x)^2\right]dx$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^3dx=\frac{7}{24}.$$

[例 3]　計算 $\iint\limits_{(\sigma)}e^{-y^2}dx\,dy$，这里的积分区域$(\sigma)$是(0, 0)，(1, 1)，(0, 1)为頂点的三角形(图 3-6-10)。

$$\iint\limits_{(\sigma)}e^{-y^2}dy\,dx=\int_0^1\left(\int_0^y e^{-y^2}dx\right)dy$$
$$=\int_0^1 ye^{-y^2}dy=-\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^1$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}.$$

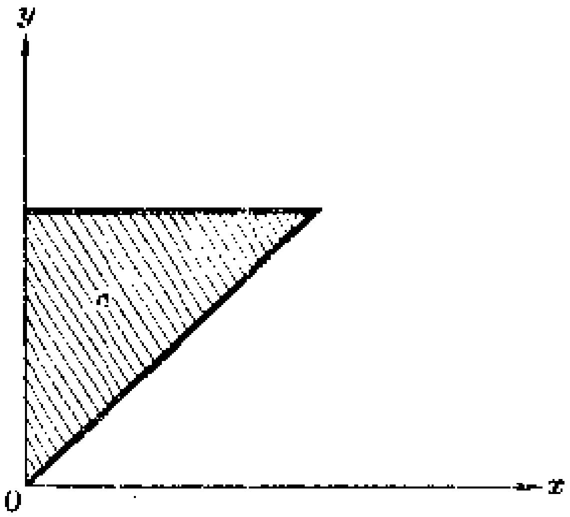


图 3-6-10

在这个例子中，若是用先 y 后 x 的二次积分

$$\int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy$$

来計算重积分，就不能直接求出結果。因此，在求重积分时，究竟先对那个变元求积，应該根据具体情况决定，在一般情况下，例如被积函数在积分区域上連續，两种求法虽然都能用，但是求的时候难易程度可能不同。

二、在极坐标下二重积分的計算

設函数 $f(M)$ 定义在平面区域 (σ) 上。区域 (σ) 的境界曲綫为（图 3-6-11）

$$r=r_1(\theta) \text{ 和 } r=r_2(\theta)$$
$$(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta).$$

又設 $r_1(\theta)$，$r_2(\theta)$ 皆在 $[\alpha, \beta]$ 上連續。用 r = 常数，θ = 常数的曲綫网来划分区域 (σ) 为若干小块 $\Delta\sigma_i$（图 3-6-11）。

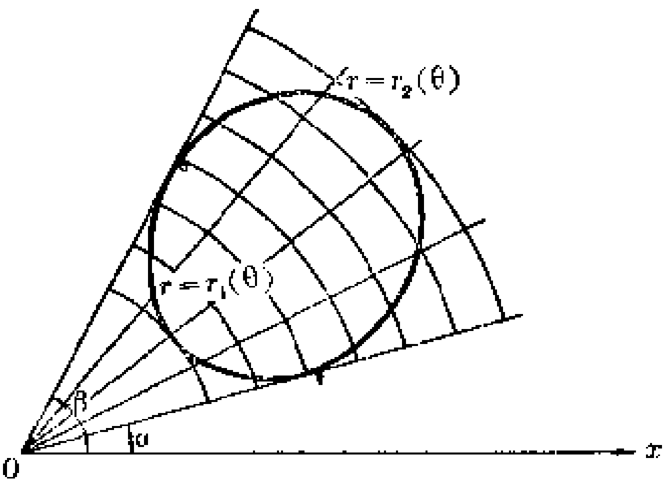


图 3-6-11

它們的面积也記为 $\Delta\sigma_i$。今考虑其中任何一个小块的面积，設这个小块是由 r，$r+\Delta r$，θ，$\theta+\Delta\theta$ 四条綫所圍成（图 3-6-12）。它的面积

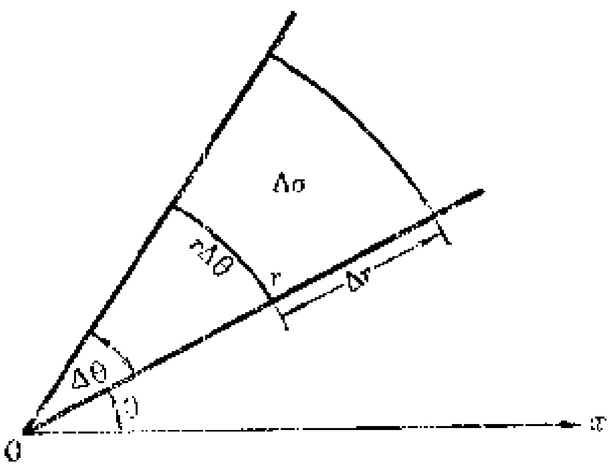


图 3-6-12

$$\Delta\sigma=\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\theta-\frac{1}{2}r^2\Delta\theta=r\Delta r\Delta\theta+\frac{1}{2}(\Delta r)^2\Delta\theta,$$

所以当 Δr 及 $\Delta\theta$ 充分小时，它的面积 $\Delta\sigma$ 应近似地等于

边长为 Δr 及 $r\Delta\theta$ 的矩形面积，亦即，当 Δr 及 $\Delta\theta$ 充分小时，除去一个更高阶的微小量不計外，面积 $\Delta\sigma$ 应等于 $r\Delta\theta\Delta r$，即：

$$\Delta\sigma \doteq r\,\Delta\theta\,\Delta r,$$

那么黎曼和为

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\, r_i\,\Delta\theta_i\,\Delta r_i,$$

这里点 M_i 应该用极坐标来表示。如果原来的函数是在直角坐标下給出的：$f(M)=f(x, y)$，那么点 M_i 就应該是 $M_i(r_i^*\cos\theta_i^*, r_i^*\sin\theta_i^*)$。如果原来的函数 $f(M)$ 就是用极坐标表示出的：$f(M)=f(r, \theta)$，那么点 M_i 就应該是 $M_i(r_i^*, \theta_i^*)$，其中 r_i^* 为 $[r_i, r_i+\Delta r_i]$ 上任意一点，θ_i^* 为 $[\theta_i, \theta_i+\Delta\theta_i]$ 上任意一点。

若 $f(M)$ 在区域 (σ) 上的二重积分存在，那么不論对区域 (σ) 怎样的分划以及点 M_i 怎样取法，只要这些小区域 $\Delta\sigma_i$ 的最大直徑趋于零时，黎曼和恒有同一极限值存在。記它为

$$\iint_{(\sigma)} f(M)\,d\sigma = \iint_{(\sigma)} f(M)\,r\,d\theta\,dr,$$

这里积分区域 (σ) 的境界曲綫是由极坐标方程給出的。

設它的境界曲綫方程为两曲綫弧 $r=r_1(\theta)$，$r=r_2(\theta)$ 及矢徑 $\theta=\alpha$，$\theta=\beta$，也就是說 (σ) 由不等式 $r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta)$，$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ 所描述。而点 M 也是由极坐标所表示出的。

若又設含有参变量 $\theta\in[\alpha, \beta]$ 的积分

$$\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(M)\,r\,dr$$

存在，那么与直角坐标下二重积分化为逐次积分一样，可以得到先 r 后 θ 的二次积分(图 3-6-13)，并且

$$\iint_{(\sigma)} f(M)\,d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(M)\,r\,dr.$$

同样，当区域 (σ) 的境界曲綫方程为(图 3-6-14)

$$\varphi=\varphi_1(r),\ \varphi=\varphi_2(r),\ r=a,\ r=b.$$

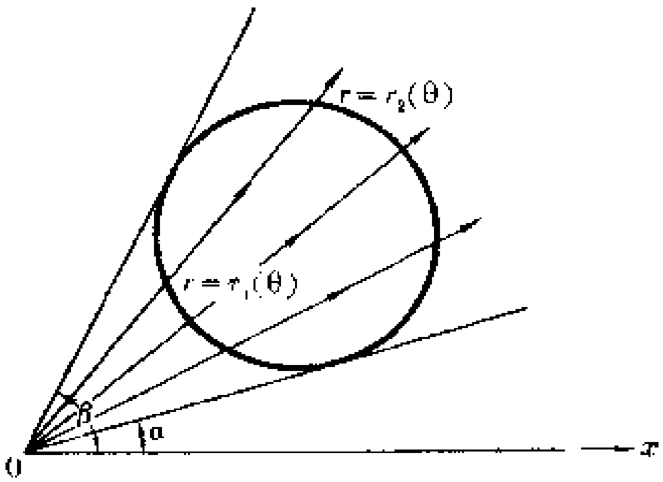


图 3-6-13

(σ) 由不等式 $\varphi_1(r)\leqslant\theta\leqslant\varphi_2(r)$，$a\leqslant r\leqslant b$ 描述，又設含参变量 $r\in[a,b]$ 的积分

$$\int_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)}f(M)d\theta$$

存在，那么得到先 θ 后 r 的积分(图 3-6-14)，并且

$$\iint\limits_{(\sigma)}f(M)d\sigma=\int_a^b rdr\int_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)}f(M)d\theta.$$

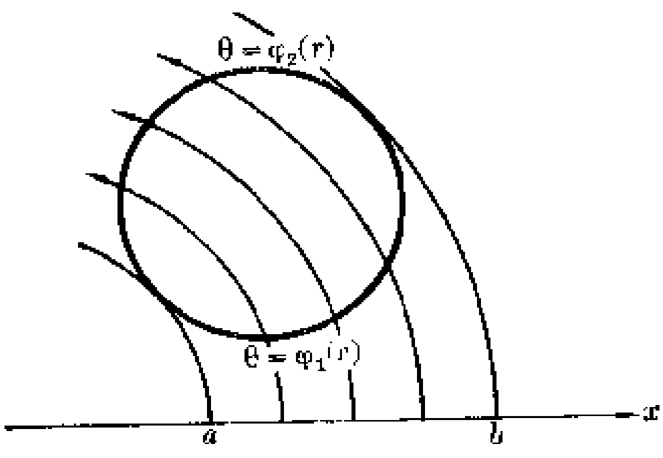


图 3-6-14

在利用极坐标的坐标曲綫划分区域时得到 $\Delta\sigma=r\Delta r\Delta\varphi$。我們称

$r\,dr\,d\varphi$ 为极坐标下的面积单元，而在直角坐标下的面积单元就是 $dx\,dy$。

（注 1）当积分区域(σ)包含极点 O 在内时(图 3-6-15)，則积分限取为

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(M)\,r\,dr.$$

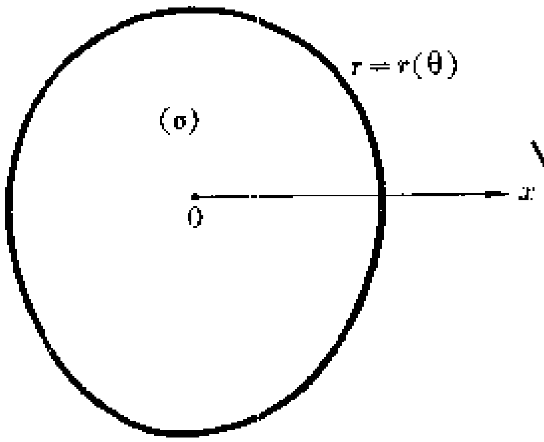


图　3-6-15

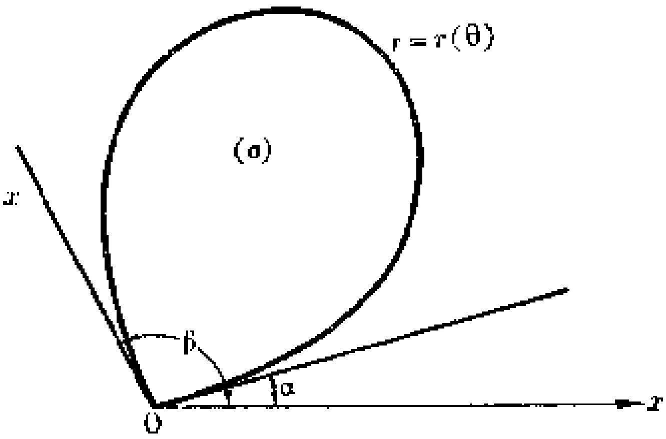


图　3-6-16

（注 2）当积分区域的境界曲綫 $r=r(\theta)$ 通过极点 O 时（图 3-6-16)，我們求出相继使 $r(\theta)=0$ 的两个角度 α 及 β，則积分限应取为：

$$\int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{r(\theta)} f(M)\,r\,dr.$$

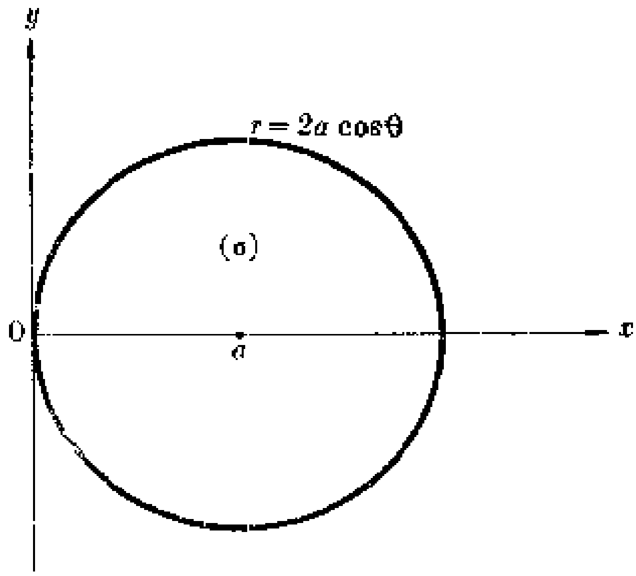


图　3-6-17

［例 1］求

$$\iint\limits_{(\sigma)} (x^2+y^2)\,d\sigma$$

积分区域(σ)是中心在点$(a, 0)$半徑为 a 的圆（图 3-6-17)。利用极坐标来計算这个二重积分，在极坐标下，被积函数为 r^2，而

积分区域(σ)的境界曲綫的方程为

$$r=2a\cos\theta,$$

境界曲綫通过极点O，求出相继使$r(\theta)=0$的两个角度$-\frac{\pi}{2}$及$\frac{\pi}{2}$，于是积分化为

$$\iint\limits_{(\sigma)}(x^2+y^2)\,d\sigma=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^2\,r\,dr$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^4}{4}\Big|_0^{2a\cos\theta}d\theta=4a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta=\frac{3}{2}\pi a^4.$$

[例 2] 求閉曲綫

$$(x^2+y^2)^3=a^2(x^4+y^4)$$

所圍的面积(图 3-6-18)。

图形关于x軸对称，也关于y軸对称，除原点是曲綫的一个孤立点外，是一条封閉的曲綫，在极坐标下，曲綫的方程为:

$$r^2=a^2(\cos^4\theta+\sin^4\theta).$$

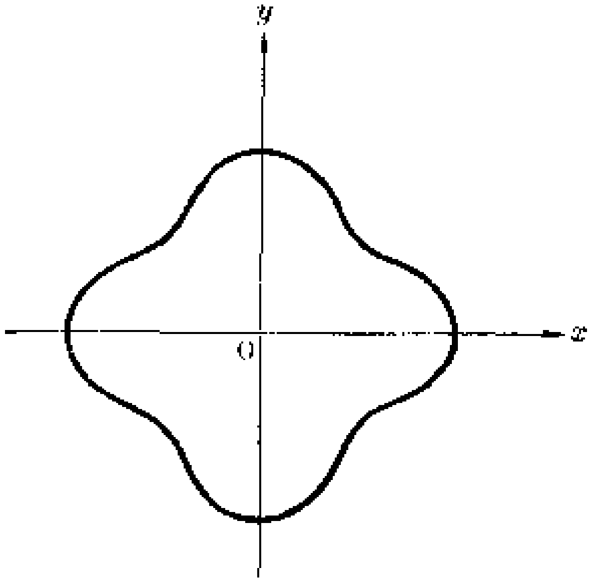


图 3-6-18

所求面积为

$$\iint\limits_{(\sigma)}d\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{a\sqrt{\cos^4\theta+\sin^4\theta}}r\,dr$$

$$=\frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}(\cos^4\theta+\sin^4\theta)\,d\theta=\frac{3}{4}\pi a^2.$$

三、二重积分的換元法則

設函数 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$

在XY平面的某区域$\mathscr{D}$內連續，且具有对x和对y的連續偏导数，并且在$\mathscr{D}$上雅可比行列式

$$J(x, y)=\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

从几何上来看，如果把 u, v 看成 UV 平面上的点的笛卡儿坐标，这变换就表示了两个平面之間的一种对应关系，当 XY 平面上一点 (x, y) 在 $\mathscr{D}$ 上变动时，对应于 UV 平面上的点 (u, v) 也在一个区域 $\mathscr{D}'$ 上变动。由于函数 $u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$ 在 $\mathscr{D}$ 上具有連續偏导数以及在区域 $\mathscr{D}$ 上其雅可比行列式 $J\neq 0$，因此从方程組 $u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$ 中能够将 x, y 解出来

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v),$$

而得到变换 $u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$ 的逆变换。

在未叙述二重积分的換元法則以前，我們先給出一个有用的引理。

引理　設 $u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$ 是 XY 平面上区域 $\mathscr{D}$ 的連續函数，具有对 x 和对 y 的連續偏导数，且在 $\mathscr{D}$ 上雅可比行列式

$$J(x, y)=\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0,$$

則 $\mathscr{D}$ 和在 UV 平面上的对应区域 $\mathscr{D}'$ 之間包含 (x, y) 点的单元面积的放大系数等于 $|J(x, y)|$.

引理的結論可以这样来理解：設在 XY 平面上有一块包含点 (x, y) 的区域 A. 通过变换 $u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$ 将点 (x, y) 变换为 UV 平面上的一点 (u, v)，并且将区域 A 变换为 UV 平面包含点 (u, v) 的一块区域 A^*. 那么当区域 A 无限地向点 (x, y) 收縮时，它們的面积 A^* 与面积 A 之比 $\frac{A^*}{A}$ 的极限正是 $|J|$，亦即是

$$\lim_{A^*\to(x,y)}\frac{A^*}{A}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\Bigg|.$$

这个引理的証明是比較細致的，今将証明的主要步驟叙述如下：在 $\mathscr{D}$ 上任意取一点 $A(x,y)$ 作一矩形 $ABCD$。它的四个顶点的坐标分别为：$A(x,y)$，$B(x+dx,y)$，$C(x+dx,y+dy)$，$D(x,y+dy)$，通过变换

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y),$$

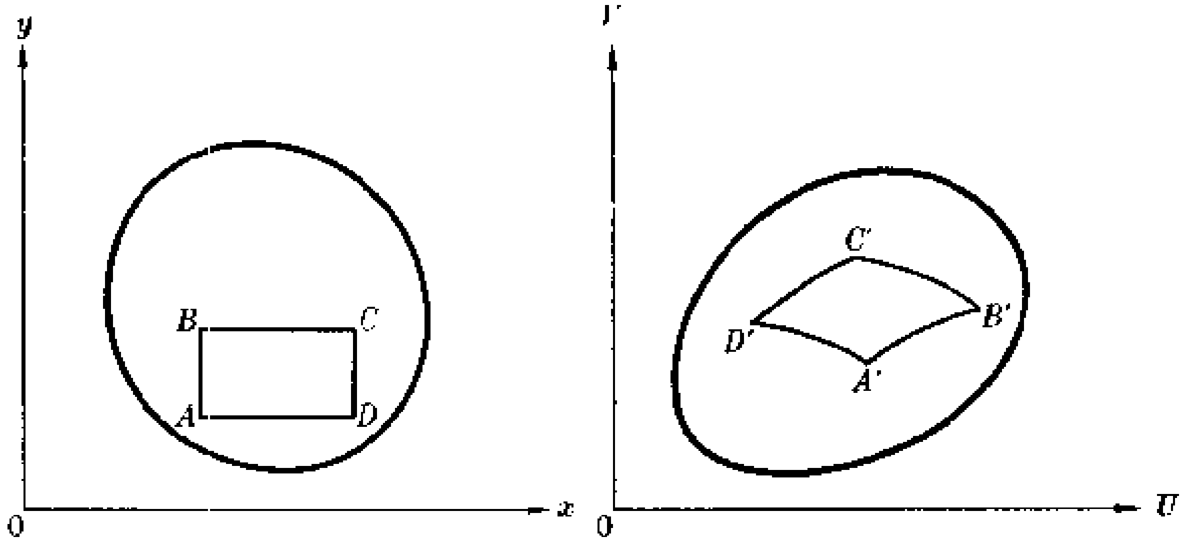


图 3-6-19

相应地在 UV 平面上得到一个曲边四边形 $A'B'C'D'$。它的四个顶点的坐标为：$A'(u_1,v_1)$，$B'(u_2,v_2)$，$C'(u_3,v_3)$，$D'(u_4,v_4)$（图3-6-19），利用泰勒公式导得：

A'：　$u_1=u(x,y)$，

$v_1=v(x,y)$；

B'：　$u_2=u(x+dx,y)=u(x,y)+\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx+o(dx)$，

$v_2=v(x+dx,y)=v(x,y)+\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}+o(dx)$；

C'：　$u_3=u(x+dx,y+dy)=u(x,y)+\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx$

$$+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy+o(dx)+o(dy),$$

$$v_3 = v(x+dx,\ y+dy) = v(x,\ y) + \frac{\partial v(x,\ y)}{\partial x}dx + \frac{\partial v(x,\ y)}{\partial y}dy + o(dx) + o(dy);$$

D':
$$u_4 = u(x,\ y+dy) = u(x,\ y) + \frac{\partial u(x,\ y)}{\partial y}dy + o(dy),$$

$$v_4 = v(x,\ y+dy) = v(x,\ y) + \frac{\partial v(x,\ y)}{\partial y}dy + o(dy).$$

現在討論四頂弧形 $A'B'C'D'$ 的面积，我們将两点 $A'B'$ 之間，$B'C'$ 之間，$C'D'$ 之間以及 $D'A'$ 之間皆用直綫相联，作出一个四边形 $A'B'C'D'$（图 3-6-20 中阴影部分）。可以証明当 dx 及 dy 甚小时，若除去一个更高阶的微小量不計外，曲边四边形 $A'B'C'D'$ 的面积等于四边形 $A'B'C'D'$ 的面积。

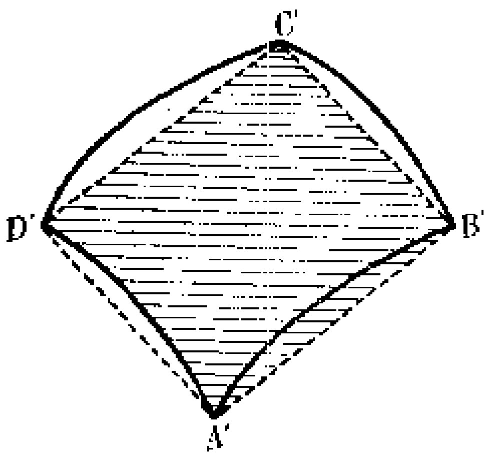


图　3-6-20

再由 u_i 及 $v_i (i=1, 2, 3, 4)$ 的表示，若略去高阶无穷小的項 $o(dx)$ 及 $o(dy)$ 不計外，得

$$u_2 - u_1 = u_3 - u_4,\qquad v_2 - v_1 = v_3 - v_4,$$
$$u_4 - u_1 = u_3 - u_2,\qquad v_4 - v_1 = v_3 - v_2.$$

由这四个等式知道，在四边形 $A'B'C'D'$ 中，两两对边的長度是相等的。因此若不計高阶无穷小，原来的曲边四边形是一个平行四边形，它的面积 $d\Sigma$ 应为三角形 $A'B'C'$ 面积的两倍，依照解析几何学中三角形面积的公式：

$$d\Sigma = \pm\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

行列式前符号的选擇，須保持 $d\Sigma \geq 0$.

将 u_i, v_i $(i=1, 2, 3)$ 的表示代入，不計高阶无穷小得：

$$d\Sigma=\pm\begin{vmatrix} u(x, y) & v(x, y) & 1 \\ u(x, y)+\frac{\partial u}{\partial x}dx & v(x, y)+\frac{\partial v}{\partial x}dx & 1 \\ u(x, y)+\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy & v(x, y)+\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\pm\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x}dx & \frac{\partial v}{\partial x}dx & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}dy & \frac{\partial v}{\partial y}dy & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\left|\frac{D(u, v)}{D(x, y)}\right|dx\,dy,$$

亦即面积之比

$$\frac{d\Sigma}{dxdy}=\left|\frac{D(u, v)}{D(x, y)}\right|,$$

右端取絕对值是因为面积之比总是正的。

（注） 在定积分换元法則中，若把变換函数 $x=g(t)$ 了解为 t 軸与 x 軸上的点的对应关系，那么

$$g'(t)=\frac{dx}{dt}=\lim_{t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t},$$

它也就是对应綫段間的放大系数。

下面，应用引理来給出二重积分的换元法則。

定理 若 $f(x, y)$ 是 XY 平面的閉区域 $\mathscr{D}$ 上的連續函数，又設

$$u=u(x, y),\quad v=v(x, y) \tag{*}$$

是 $\mathscr{D}$ 上的連續函数，且有关于 x 和 y 的連續偏导数，而且

$$J=\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\neq 0,$$

通过(*)，把 $\mathscr{D}$ 变換为 $\mathscr{D}'$. 由于 $J\neq 0$，因此存在

$$x=x(u, v),\quad y=y(u, v),$$

是 $\mathscr{D}'$ 变到 $\mathscr{D}$ 的逆变换，对应关系是一对一的，則

$$\iint\limits_{(\mathscr{D})} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(\mathscr{D}')} f(x(u, v), y(u, v))\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv.$$

【証明】 因
$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\cdot\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1,$$

所以 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$，又因为 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ 是閉区域上連續函数，所以有界。由于

$$\iint\limits_{(\mathscr{D})} f(x, y)\,dx\,dy$$

存在，把 $\mathscr{D}$ 分成小区域 Δ_k，积分等于下面的极限（令 d 为这些小区域的最大直徑）：

$$\lim_{d\to 0}\sum_k f(x_k, y_k)\,\Delta_k,$$

对应于 $\mathscr{D}$ 上的一个分法，$\mathscr{D}'$ 上有对应的分法，相应地将 $\mathscr{D}'$ 分成小区域 Δ'_k，由引理：

$$\Delta'_k = \left|\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right|\Delta_k + o(\Delta_k),$$

即
$$\Delta_k = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|\Delta'_k + o(\Delta_k),$$

$$\sum f(x_k, y_k)\,\Delta_k = \sum f(x_k, y_k)\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|\Delta'_k + o\left(\sum f(x_k, y_k)\,\Delta_k\right).$$

另一方面，由于函数 $u = u(x, y)$，$v = v(x, y)$ 在 D 上一致連續，所以当 $d\to 0$ 时，对应小区域的最大直徑 $\rho(\Delta'_k)$ 也趋向于零。上式左边和式趋向于二重积分

$$\iint\limits_{\mathscr{D}} f(x, y)\,dx\,dy,$$

右边的和式

$$\sum f(x_k, y_k)\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|\Delta'_k + o\left(\sum f(x_k, y_k)\,\Delta_k\right)$$

以
$$\iint\limits_{(\mathscr{D}')} f(x(u, v), y(u, v)) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du dv$$
为极限。定理証毕。

（注） 在定理中，假設变換的行列式 $\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|$ 在积分区域 $(\mathscr{D}')$ 上非零。但有时却会遇到这样的情形，变換的行列式在区域 $(\mathscr{D}')$ 内的个别点上等于零。此时，换元法則仍成立。这是因为，例如在区域 $(\mathscr{D}')$ 内的一点 (u_0, v_0) 上有
$$\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_{(u_0, v_0)} = 0,$$
而在 $(\mathscr{D}')$ 的其他点上行列式非零。我們在 $(\mathscr{D}')$ 内作一个包含点 (u_0, v_0) 的可求面积的小区域 (σ')，于是在 XY 平面上相应地得到点 (x_0, y_0) 及包含該点的小区域 (σ). 将区域 $(\mathscr{D})$ 上的积分写为
$$\iint\limits_{(\mathscr{D})} f(x, y) dx\, dy = \iint\limits_{(\mathscr{D})-(\sigma)} f(x, y) dx\, dy + \iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\, dx\, dy,$$
右端的第一个积分，按定理可以运用换元法則得
$$\iint\limits_{(\mathscr{D})-(\sigma)} f(x, y) dx\, dy = \iint\limits_{(\mathscr{D}')-(\sigma')} f(x(u, v), y(u, v)) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv$$
$$= \iint\limits_{(\mathscr{D}')} f \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv - \iint\limits_{(\sigma')} f \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv,$$
而右端第二个积分，由积分性质
$$\left|\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y) dx\, dy\right| \leqslant M(\sigma \text{ 的面积}),$$
这里 M 为 $f(x, y)$ 在 $(\mathscr{D})$ 上的界：$|f(x, y)| \leqslant M$.

今令小区域 (σ) 无限收縮于一点 (x_0, y_0)，于是就有
$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y) dx\, dy \to 0,$$

并且相应地 UV 平面上的小区域 (σ') 也就无限收縮于点 (u_0, v_0)，同样得到

$$\iint\limits_{(\sigma')} f\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv \to 0.$$

这样就获得了

$$\iint\limits_{(\mathscr{D})} f\, dx\, dy = \iint\limits_{(\mathscr{D}')} f\left|\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right| du dv.$$

因此换元法則仍成立。

如果变換行列式(卽雅可比式)在一条綫上等于零而在其他点上非零，以上結論仍然成立。

在上面的换元法則中，我們把方程組

$$u=u(x, y),\quad v=v(x, y)$$

解釋为由 XY 平面到 UV 平面上的一个变换，在这个变换之下将 XY 平面上的区域 D 变为 UV 平面上的区域 $\mathscr{D}'$. 但也可以将这个变换看为同一平面上点的坐标变换，这时，在换元法則中有关的积分区域 D 在几何图形上仍旧是同一区域 $\mathscr{D}$，仅仅不过是用坐标来表示区域 $\mathscr{D}$ 时，所对应的两种表示法不同。例如区域 $\mathscr{D}$ 为中心在原点半徑为 a 的在第一象限內的圓，对这个区域 D，用直角坐标来表示时为：$0\leqslant y\leqslant \sqrt{a^2-x^2}$；$0\leqslant x\leqslant a$. 而用极坐标来表示則为：$0\leqslant r\leqslant a$, $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$. 在这种情形下，换元法則显然仍成立

$$\iint\limits_{(\mathscr{D})} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{(\mathscr{D})} f[x(u, v) y(u, v)]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du dv.$$

我們并称 $\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv$ 为面积单元。

作为一个有用的特例，我們考虑极坐标变换

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

变換的雅可比式为

$$J=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r,$$

仅仅在极点($r=0$)处雅可比式为零，在其他点上雅可比式皆非零。再按照換元法则中的注解，因而对任何不論是否包含极点的区域 $\mathscr{D}$ 成立

$$\iint\limits_{(\mathscr{D})} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{(\mathscr{D}')} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta,$$

这里 $r\,dr\,d\theta$ 为面积单元。这就是我們已經叙述过的在极坐标变換下二重积分的計算法。

在各个具体問題中，选擇变換公式的依据有两条：

(i) 如同定积分那样使得經过变换后容易积分。

(ii) 使得积分限容易安排。

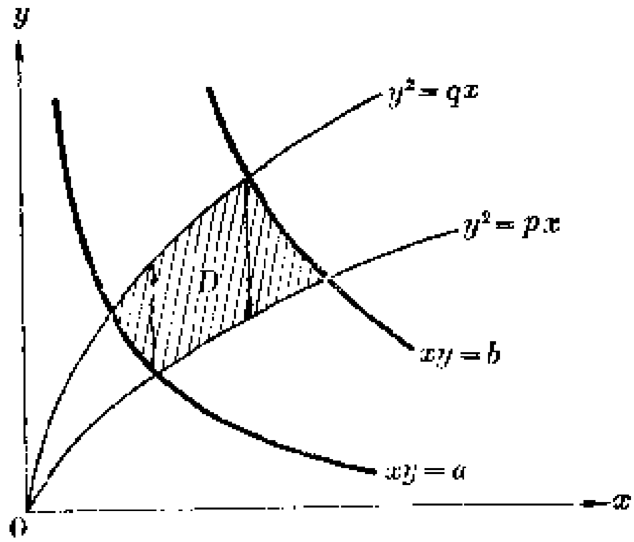


图 3-6-21

[例 3] 求由抛物綫 $y^2=px$, $y^2=qx$ $(0<p<q)$ 及双曲綫 $xy=a$, $xy=b$ $(0<a<b)$ 所圍区域的面积(图 3-6-21)。

作变換
$$\frac{y^2}{x}=u,\quad xy=v,$$

在这个变换下，XY 平面上的区域 $\mathscr{D}$ 变为 UV 平面上的区域 $\mathscr{D}'$ (图 3-6-22)

$$p\leqslant u\leqslant q,$$
$$a\leqslant v\leqslant b,$$

变换的雅可比式

$$|J|=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\frac{1}{\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|}=\frac{1}{\frac{3y^2}{x}}=\frac{1}{3u},$$

于是所求面积为：

$$D=\iint_{(\mathscr{D})}dx\,dy=\iint_{(\mathscr{D}')}\frac{1}{3u}\,du\,dv$$

$$=\int_a^b dv\int_p^q\frac{1}{3u}\,du=\frac{1}{3}(b-a)\ln\frac{q}{p}.$$

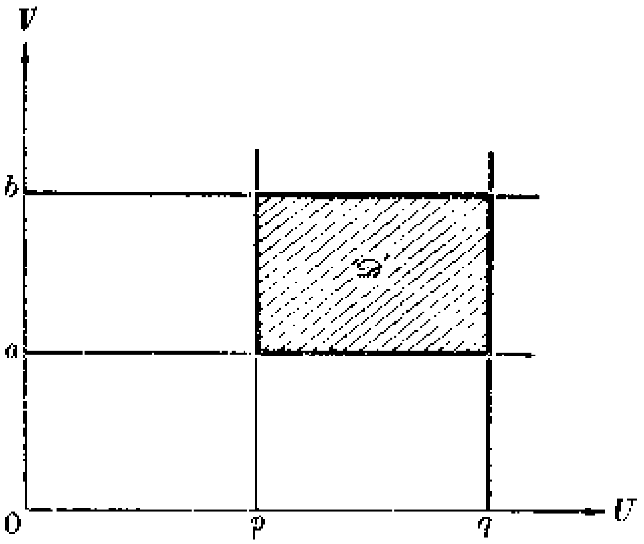


图　3-6-22

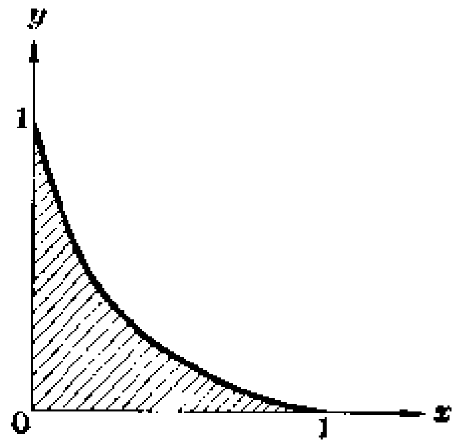


图　3-6-23

[例 4]　求积分 $\iint_{(\mathscr{D})}(\sqrt{x}+\sqrt{y})\,dx\,dy$，

其中积分区域$(\mathscr{D})$是由坐标轴和抛物綫 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 所圍成区域(图 3-6-23)。

作变换：$x=r\cos^4 t$，$y=r\sin^4 t$，变换的行列式为

$$J=4r\cos^3 t\sin^3 t,$$

在这变换下，被积函数为 $\sqrt{r}$，积分区域 $\mathscr{D}$ 为

$$0\leqslant r\leqslant 1,\quad 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

于是 $\iint\limits_{(\mathscr{D})}(\sqrt{x}-\sqrt{y})\,dx\,dy=\iint\limits_{(\mathscr{D})}\sqrt{r}\,4r\cos^3 t\sin^3 t\,dr\,dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt\int_0^1\sqrt{r}\,4\,r\cos^3 t\sin^3 t\,dt=\frac{2}{15}.$$

[例 5] 求曲綫

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{xy}{c^2}$$

所圍面积(图 3-6-24)。

利用广义极坐标变换:

$$x=ar\cos\theta,$$

$$y=br\sin\theta,$$

这时曲綫方程变換为

$$r^2=\frac{ab}{c^2}\sin\theta\cos\theta,$$

而变换的雅可比式

$$J=abr,$$

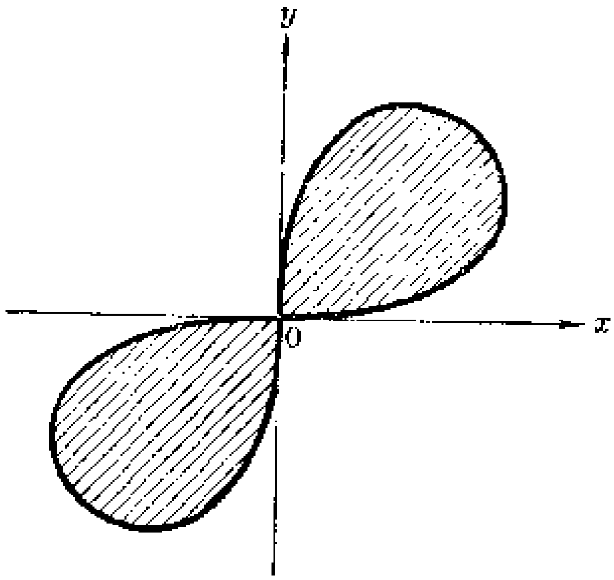


图 3-6-24

因为图形对称于原点,故面积

$$D=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt{\frac{ab}{c^2}\sin\theta\cos\theta}}a\,b\,r\,dr=\frac{a^2b^2}{2c^2}.$$

§2 三重积分的計算

一、三重积分化为定积分和二重积分或化为三次积分的計算

定理 若函数 $f(x, y, z)$ 在长方体 $[a, b; c, d; e, f]$ 上三重积分

$$\iiint\limits_{[a,b;c,d;e,f]}f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

存在,并且对任何 $z\in[e, f]$, 含参变量 z 的积分

$$F(z)=\iint\limits_{[a,b;c,d]} f(x,y,z)\,dx\,dy$$

存在，則积分

$$\int_e^f\left\{\iint\limits_{[a,b;c,d]} f(x,y,z)\,dx\,dy\right\}dz.$$

也存在，并且有

$$\iiint\limits_{[a,b;c,d;e,f]} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_e^f\left\{\iint\limits_{[a,b;c,d]} f(x,y,z)\,dx\,dy\right\}dz.$$

定理的証明和二重积分化为定积分定理的証明相仿。

【証明】 在区間 $[a,b]$, $[c,d]$, $[e,f]$ 中插入分点:

$a=x_0<x_1<\cdots<x_r=b$,

$c=y_0<y_1<\cdots<y_s=d$ 及 $e=z_0<z_1<\cdots<z_n=f$,

作三組平面:

$$X=x_i,\quad Y=y_j,\quad Z=z_k$$

$(i=1,2,\cdots,r;\ j=1,2,\cdots,s;\ k=1,2,\cdots,n)$,

将长方体 $[a,b;c,d;e,f]$ 分为若干小长方体，記为

$$\Delta_{ijk}=[x_{i-1},x_i;\ y_{j-1},y_j;\ z_{k-1},z_k]$$

$(i=1,2,\cdots,r;\ j=1,2,\cdots,s;\ k=1,2,\cdots,n)$

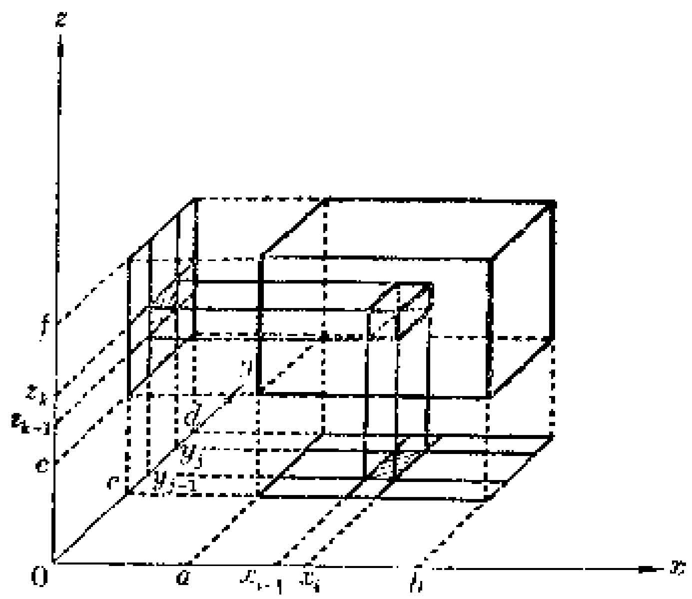


图 8-6-25

(图3-6-25)，記 $f(x, y, z)$ 在 Δ_{ijk} 上的上确界和下确界分别为 M_{ijk} 和 m_{ijk}，那么对 $[z_{k-1}, z_k]$ 上任何一点 ξ_k，有不等式

$$m_{ijk}\Delta x_i \Delta y_j \leqslant \iint\limits_{[x_{i-1}x_i; y_{j-1}y_j]} f(x, y, \xi_k)\,dx\,dy \leqslant M_{ijk}\Delta x_i \Delta y_j,$$

这里 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$，将上式关于 i 及 j 累加得：

$$\sum_{i,j} m_{ijk}\Delta x_i \Delta y_j \leqslant F(\xi_k) = \iint\limits_{[a,b;c,d]} f(x, y, \xi_k) \leqslant \sum_{i,j} M_{ijk}\Delta x_i \Delta y_j,$$

再乘 Δz_k，并且对 k 相加：

$$\sum_{i,j,k} m_{ijk}\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \leqslant \sum_k F(\xi_k)\Delta z_k \leqslant \sum_{i,j,k} M_{ijk}\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k,$$

令 $d = \max\limits_{ijk}\{\Delta_{ijk}$ 的直徑$\}$，当 $d\to 0$ 时，由达布定理以及假設，得：

$$\iiint\limits_{[a,b;c,d;e,f]} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

$$=\int_e^f F(z)\,dz = \int_e^f \left\{\iint\limits_{[a,b;c,d]} f(x, y, z)\,dx\,dy\right\}dz.$$

定理証毕。

这个定理表明了：三重积分的計算可以化为先計算一个二重积分，然后再計算一个定积分。同样地，如果定理的条件改为 $f(x, y, z)$ 在 $[a, b; c, d; e, f]$ 上可积，并且对任何点 $(x, y)\in[a, b; c, d]$ 含有两个参变量 x 和 y 的积分

$$F(x, y) = \int_e^f f(x, y, z)\,dz$$

存在，那么积分

$$\iint\limits_{[a,b;c,d]} \left\{\int_e^f f(x, y, z)\,dz\right\}dx\,dy$$

也存在，并且有

$$\iiint\limits_{[a,b;c,d;e,f]} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{[a,b;c,d]} \left\{\int_e^f f(x, y, z)\,dz\right\}dx\,dy,$$

而将三重积分的計算化为先計算一个定积分，再計算一个二重积分。

在§1中已經讲述了二重积分化为定积分的定理，应用这个定理，容易得到下面的重要結果。

定理　若 $f(x, y, z)$ 在 $[a, b; c, d; e, f]$ 上連續，則

$$\iiint\limits_{[a,b;c,d;e,f]} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx\int_c^d dy\int_e^f f(x, y, z)\,dz$$

$$= \int_e^f dz\int_a^b dx\int_c^d f(x, y, z)\,dy = \int_c^d dy\int_e^f dz\int_a^b f(x, y, z)\,dx,$$

将三重积分的計算化为逐次計算三个定积分，即三次积分。

上面所討論的积分区域都是長方体 $[a, b; c, d; e, f]$。对于一般的区域，有下面的結論，这是經常用到的計算三重积分的一种方法。

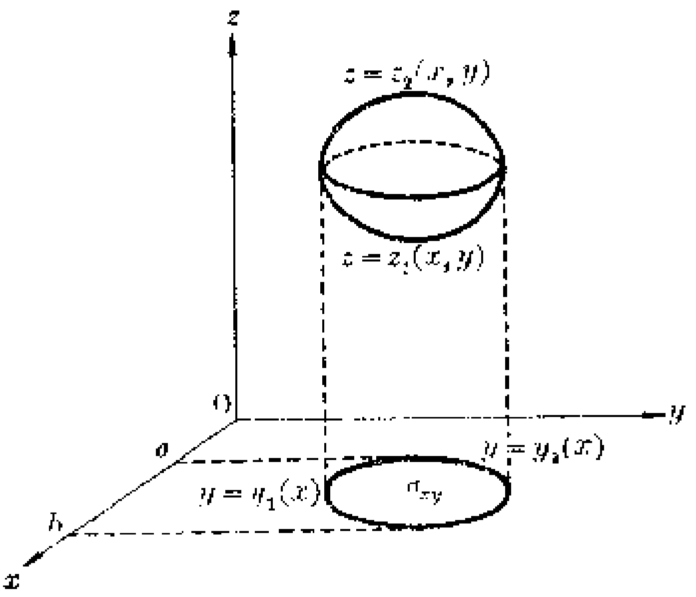


图　3-6-26

設 (v) 为一块可求体积的空間区域，它的境界曲面和任何平行于坐标軸的直綫至多相交于两点。函数 $f(x, y, z)$ 定义在区域 (v) 上，并且在 (v) 上連續，我們来考慮三重积分

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

化为逐次积分的問題。这将牵涉到积分区域 (v) 的表示法，随着表示法不同，可以将三重积分化为先 z（或者先 x，先 y）的逐次积分，一般有以下三种情形：

（i）設积分区域 (v) 的曲面方程为（图 3-6-26）

$$z=z_1(x, y) \text{ 及 } z=z_2(x, y),$$

区域(v)在 XY 平面上的投影为 σ_{xy}（图 3-6-26），那么

$$\iiint_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\iint_{(\sigma_{xy})} dx\,dy\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz,$$

又若 XY 平面上的区域 σ_{xy} 为由曲綫

$$y=y_1(x),\ y=y_2(x)\quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

所圍成的区域（图 3-6-26），再按照二重积分化为定积分的計算法得：

$$\iiint_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz.$$

也可以这样理解，积分限的安排是根据把积分区域(v)作为由以下不等式所描述确定的：

$$z_1(x, y)\leqslant z\leqslant z_2(x, y),\quad y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),\ a\leqslant x\leqslant b.$$

（ii）設积分区域(v)的境界曲面方程为（图 3-6-27）

$$y=y_1(x, z) \text{ 及 } y=y_2(x, z),$$

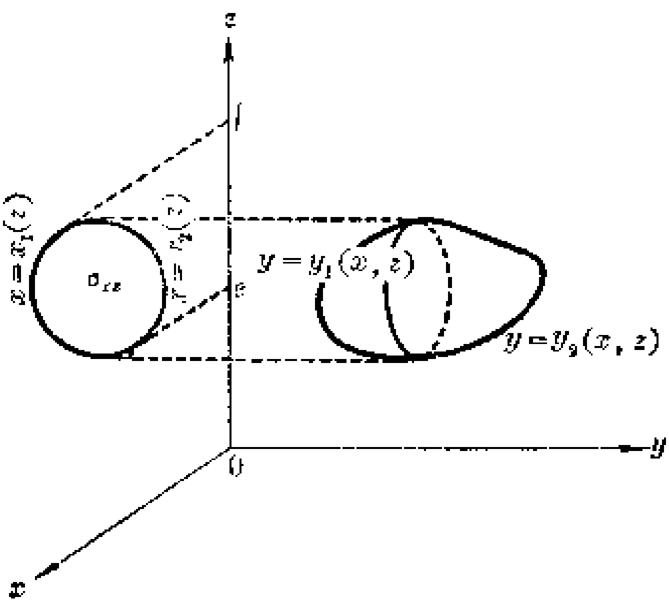


图 3-6-27

区域(v)在 XZ 平面上的投影为 σ_{xz}（图 3-6-27），那么

$$\iiint_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{(\sigma_{xz})} dx\,dz \int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x, y, z)\,dy,$$

又若 XZ 平面上的区域 (σ_{xz}) 为由曲綫

$$x = x_1(z),\ x = x_2(z)\quad (e \leqslant z \leqslant f)$$

所圍成的(图 3-6-27)，再按照二重积分化为定积分計算法得:

$$\iiint_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_e^f dz \int_{x_1(z)}^{x_2(z)} dx \int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x, y, z)\,dy.$$

也可以这样理解，积分限的安排是根据把区域 (v) 作为由以下不等式所描述确定的:

$$y_1(x, z) \leqslant y \leqslant y_2(x, z),\ x_1(z) \leqslant x \leqslant x_2(z),\ e \leqslant z \leqslant f.$$

(iii) 設积分区域 (v) 的境界曲面方程为(图 3-6-28)

$$x = x_1(y, z)\quad 及\quad x = x_2(y, z),$$

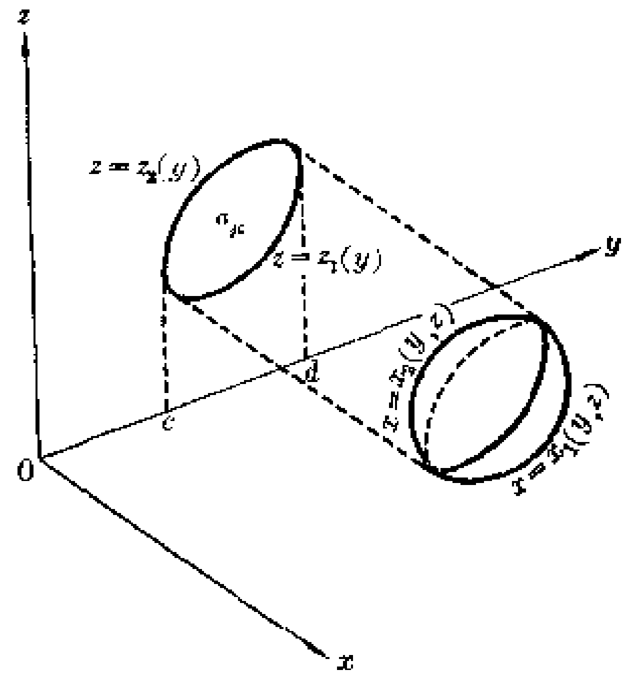


图 3-6-28

区域 (v) 在 YZ 平面上的投影为 σ_{yz} (图 3-6-28)，那么

$$\iiint_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{(\sigma_{yz})} dy\,dz \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z)\,dx,$$

又若 YZ 平面上区域 σ_{yz} 为由曲綫 $z=z_1(y)$, $z=z_2(y)$ $(c\leqslant y\leqslant d)$ 所圍成(图 3-6-28)，那么：

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\int_c^d dy\int_{z_1(y)}^{z_2(y)} dz\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z)\,dx.$$

也可以这样理解，积分限的安排是根据将区域 (v) 作为由下面不等式所确定的：

$$x_1(y, z)\leqslant x\leqslant x_2(y, z),$$
$$z_1(y)\leqslant z\leqslant z_2(y),\ c\leqslant y\leqslant d.$$

这些結論的証明与 §1 中类似結論的証明相仿，为此只要取一个包含区域 (v) 在内的长方体 (D)，并定义一个函数，

$$F(x, y, z)=\begin{cases} f(x, y, z), & \text{当}(x, y, z)\text{属于}(v),\\ 0, & \text{当}(x, y, z)\text{不属于}(v),\end{cases}$$

再应用已經証明的长方体上三重积分化为二重积分及定积分的原理，即得証明。

［例 1］ 計算积分

$$I=\iiint\limits_{(v)} x\,dx\,dy\,dz,$$

区域 (v) 由三个坐标平面及平面 $x+2y+z=1$ 圍成。这个区域 (v) 可以这样来表示(图 3-6-29)，它的下底为平面 $z=0$，上底为平面 $z=1-x-2y$，它在 XY 平面上的投影 σ_{xy} 是由 $x=0$, $y=0$ 以及 $x+2y=1$ 所圍成，于是

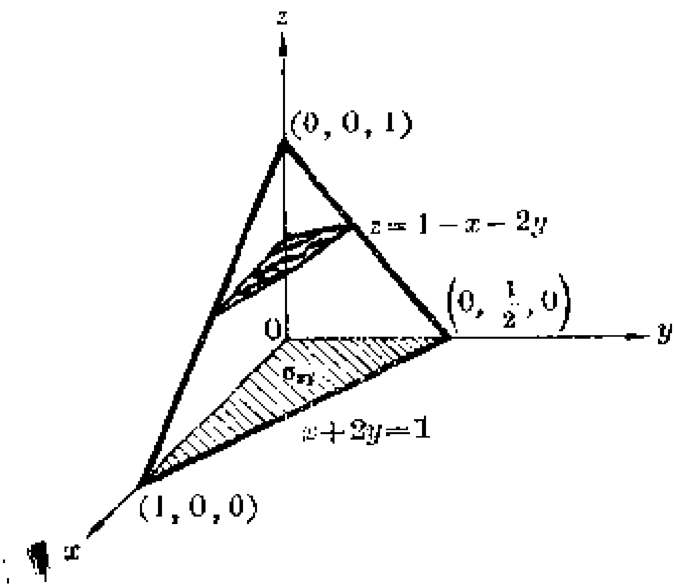


图 3-6-29

$$I=\iint\limits_{(\sigma_{xy})} dx\,dy\int_0^{1-x-2y} x\,dz=\int_0^1 x\,dx\int_0^{\frac{1-x}{2}} dy\int_0^{1-x-2y} dz$$

$$=\int_0^1 x\,dx\int_0^{\frac{1-x}{2}}(1-x-2y)\,dy=\int_0^1 x\left[y-xy-y^2\right]_{y=0}^{y=\frac{1-x}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1(x-2x^2+x^3)\,dx=\frac{1}{48}.$$

若将区域(v)投影在YZ平面上再进行計算，則有

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_0^{1-2y}dz\int_0^{1-2y-z}x\,dx=\frac{1}{48}.$$

[例 2] 求　$I=\iiint\limits_{(v)}(x+y+z)\,dx\,dy\,dz$，

(v)是平面$x+y+z=1$和三个坐标面所圍成的区域(图 3-6-30)。因为这区域对三个变量是对称的，并且被积函数也是对称的，因此有等式

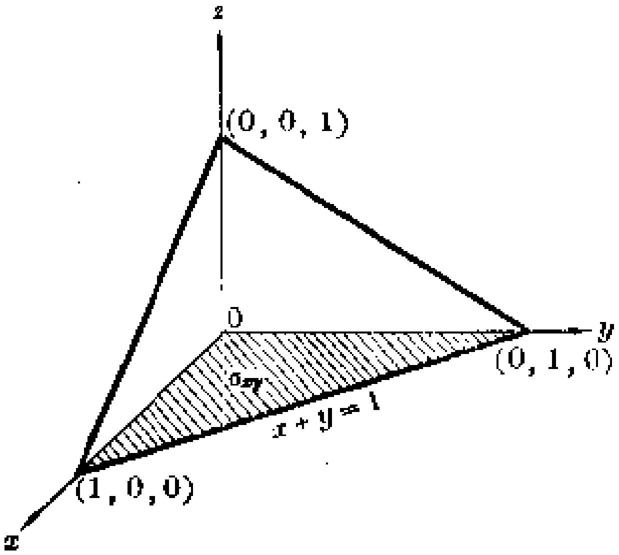


图　3-6-30

$$\iiint\limits_{(v)}x\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{(v)}y\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{(v)}z\,dx\,dy\,dz,$$

但　$$\iiint\limits_{(v)}x\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{(\sigma_{xy})}dx\,dy\int_0^{1-x-y}x\,dz$$

$$=\iint\limits_{(\sigma_{xy})}x(1-x-y)\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_0^1 x(1-x-y)\,dy\right)dx$$

$$=\int_0^1\left[x(1-x)^2-\frac{x}{2}(1-x)^2\right]dx=\int_0^1\frac{x}{2}(1-x)^2\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(x-2x^2+x^3)\,dx=\frac{1}{24},$$

所以 $$\iiint\limits_{(v)}(x+y+z)\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{24}\times 3=\frac{1}{8}.$$

［例 3］ 計算三重积分 $I=\iiint\limits_{(v)}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$，$(v)$ 是椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的內部区域(图 3-6-31)。

$$I=\iiint\limits_{(v)}x^2dv+\iiint\limits_{(v)}y^2dv+\iiint\limits_{(v)}z^2dv=I_1+I_2+I_3$$

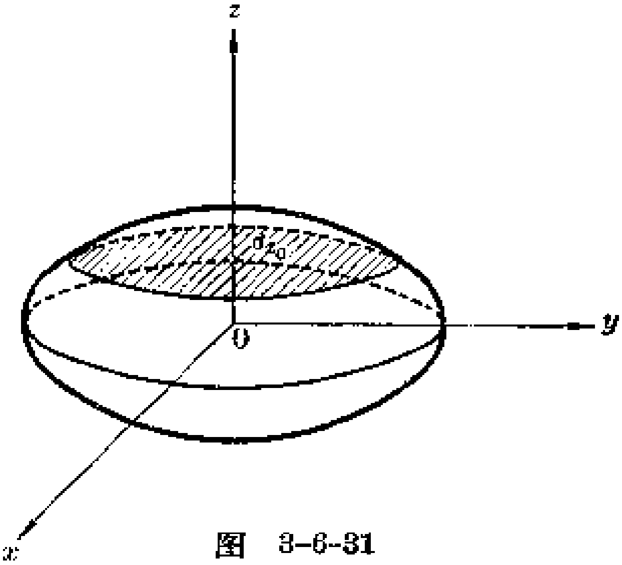


图 3-6-31

过点 $(0,0,z_0)$ 作和平面 XOY 平行的平面，与椭球截得区域記为 (σ_{z_0})，則 (σ_{z_0}) 就是 $z=z_0$ 平面上的椭圓

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{z^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{z^2}{c^2}\right)}=1,$$

于是 $$I_3=\iiint\limits_{(v)}z^2dx\,dy\,dz=\int_{-c}^{c}\left(\iint\limits_{(\sigma_z)}z^2\,dx\,dy\right)dz.$$

因为 $\iint\limits_{\sigma_z}dx\,dy=\pi ab\left(1-\dfrac{z^2}{c^2}\right)$ 为椭圓 σ_z 的面积，所以

$$I_3=\iiint\limits_{(v)}z^2dx\,dy\,dz=\int_{-c}^{c}\pi z^2ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=\frac{4}{15}\pi abc^3.$$

同样地在計算 $$I_1=\iiint\limits_{(v)}x^2\,dx\,dy\,dz$$

和 $$I_2=\iiint\limits_{(v)}y^2\,dx\,dy\,dz$$

时，先对 σ_x 和 σ_y 进行二重积分，得到类似的結果：

$$\iiint_{(V)} x^2\,dx\,dy\,dz=\frac{4}{15}\pi a^3bc,$$

$$\iiint_{(V)} y^2\,dx\,dy\,dz=\frac{4}{15}\pi ab^3c.$$

所以 $$\iiint_{(V)}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz=\frac{4}{15}\pi abc(a^2+b^2+c^2).$$

二、三重积分的換元法則

正如解析几何学中柱面坐标、球面坐标一样，若空間取三族和参数 u, v, w 有关的曲面：

$$u=\varphi(x, y, z),\quad v=\psi(x, y, z),\quad w=\chi(x, y, z),$$

当 u, v, w 固定时，每一族中有一曲面确定。它們的交点也随之而定，以 u, v, w 作为交点的坐标，称之为点的曲綫坐标，族中曲面称坐标曲面。

如果把 $u=u(x, y, z)$，$v=v(x, y, z)$，$w=w(x, y, z)$ 作为 (x, y, z) 空間的区域 (V) 和 (u, v, w) 空間 (V') 之間的一种变换关系，假設函数 u, v, w 皆在 (V) 上連續，具有对 x, y, z 的連續偏导数，并且它們的雅可比式在 (V) 上非零，因而逆变換存在。設逆变換为：

$$x=x(u, v, w),\quad y=y(u, v, w),\quad z=z(u, v, w),$$

和二重积分的情况一样，可以証明 (x, y, z) 空間的体积单元和对应 (u, v, w) 空間的体积单元之比等于

$$\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right|,$$

于是我們就有三重积分的变数变換法則：

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_{(V')} f[x(u, v, w),\ y(u, v, w),\ z(u, v, w)]\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right|du\,dv\,dw.$$

在曲綫坐标之下，体积单元为

$$dv=\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| du\, dv\, dw.$$

当雅可比式 $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ 在区域(V)的个别点上或某条曲綫、某块曲面上等于零，而在其他点处非零时，与二重积分换元法则同样的理由，此时三重积分的换元法則仍成立。

下面我們給出两种最常用的坐标变换：

(1) 柱面坐标：柱面坐标是用以下的三个正交曲面族来表示空間点的位置的。

圓柱面族： $x^2+y^2=r^2$,

平 面 族： $z=z_0$ 和 $ax+by=0$.

令以 θ 表示平面 $ax+by=0$ 与 XZ 平面的夹角，則空間一点的柱面坐标 (r, θ, z) 和直角坐标 (x, y, z) 之間的关系为(也就是变换式)：

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \\ z=z \end{cases}$$

(这里 $0\leqslant r<\infty$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, $-\infty<z<+\infty$),

此时变换的雅可比式为

$$J=r,$$

于是在柱面坐标下，体积单元为 $rdrd\varphi dz$. 它有着明确的几何意义：考虑由两个半徑为 r 及 $r+dr$ 的

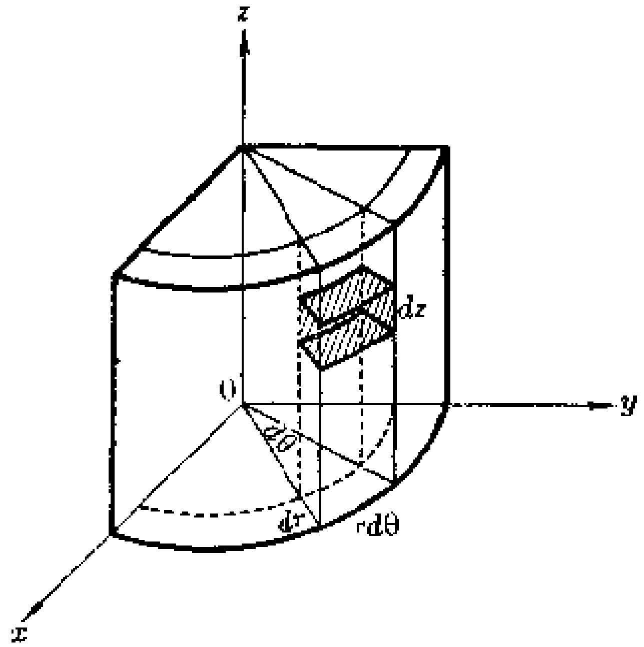


图 3-6-32

圓柱面，两个高为 z 及 $z+dz$ 的平面，及两个通过 z 軸且与 XZ 平面的夹角为 θ 及 $\theta+d\theta$ 的半平面所圍成的小块（图 3-6-32）。当

$dr, d\theta, dz$ 充分小时，这个小块可以近似地視为一块长方体，其三边各为 $dr, rd\theta, dz$，故体积为 $rd\,rd\theta\,dz$。因此，用柱面坐标作变换时，有

$$\iiint\limits_{(v)} f(M)\,dv = \iiint\limits_{(v)} f(r,\theta,z)\,rd\,rd\theta\,dz,$$

再假定这个三重积分可以化为逐次积分来計算。一般总是将区域 (v) 投影在 (r,θ) 平面上，記 (v) 在 (r,θ) 平面上的投影为 $(\sigma_{r\theta})$，将三重积分計算为

$$\iiint\limits_{(v)} f\,rd\,rd\theta\,dz = \iint\limits_{(\sigma_{r\theta})} rd\,rd\theta \int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f\,dz,$$

先对 z 积分，然后再計算平面区域 $(\sigma_{r\theta})$ 上的二重积分，而这个二重积分就是极坐标下的二重积分。

这时区域 (v) 是由 $(r,\theta)\in\sigma_{r\theta}$，且 $z_1(r,\theta)\leqslant z\leqslant z_2(r,\theta)$ 来描述。

[例 4]　求
$$I=\iiint\limits_{(v)} z\,dx\,dy\,dz,$$

(v) 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与抛物面 $x^2+y^2=3z$ 所圍部分，用柱面坐标作变换，上面两个曲面方程分别变换为

$$r^2+z^2=4 \ \text{及}\ r^2=3z,$$

它們的交綫是

$$\begin{cases} z=1, \\ r=\sqrt{3}, \end{cases}$$

因此 (v) 在 (r,θ) 平面上的投影 $(\sigma_{r\theta})$ 为

$$r=\sqrt{3}\quad (\text{在 } z=0 \text{ 平面上}),$$

是一个圓，于是

$$I=\iint\limits_{(\sigma_{r\theta})} rd\,rd\theta \int_{\frac{1}{3}r^2}^{\sqrt{4-r^2}} z\,dz$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} r\,dr \int_{\frac{1}{3}r^2}^{\sqrt{4-r^2}} z\,dz=\frac{13}{4}\pi.$$

[例 5] 設一球段（由一平面割下的球体部分）由不均匀物质組成，其中每一点的密度正比于这点到球段底面的距离，列出求质量的計算式。

利用柱面坐标并取平行于底面的通过球心的平面为坐标平面 $z=0$，球面方程为 $r^2+z^2=a^2$，

即 $z^2=a^2-r^2$.

球段的高为 h，密度

$\rho(r,\varphi,z)=D(z)=b+cz$,

$(c>0,\ b=ch-ca)$,

则所求质量的計算公式是(图 3-6-33)

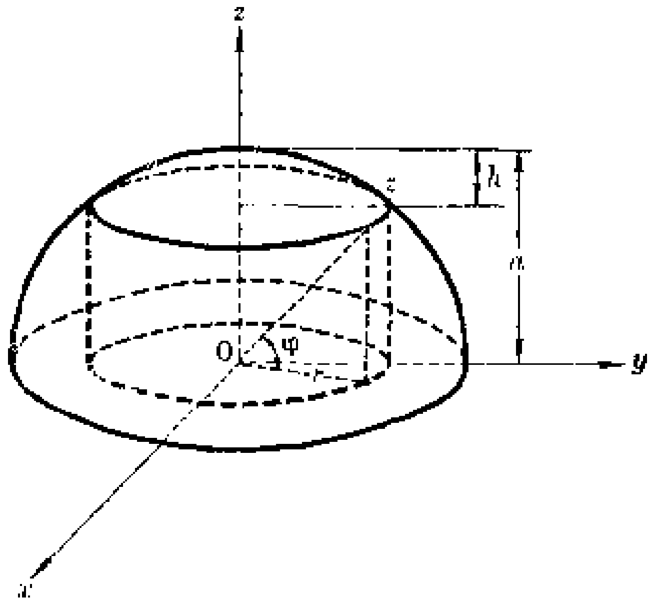


图 3-6-33

$$m=\iiint\limits_{(v)}\rho\, r\, dr\, d\varphi\, dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{r_0}r\, dr\int_{a-h}^{\sqrt{a^2-r^2}}(b+cz)\,dz$$

[这里 $r_0^2+(a-h)^2=a^2$].

(2) 球面坐标：球面坐标是用下列三族正交曲面来表示空間点的位置：

球面族： $x^2+y^2+z^2=r^2$,

平面族： $ax+by=0$,

錐面族： $x^2+y^2=cz^2$.

若以 θ 表示錐面 $x^2+y^2=cz^2$ 与 $z=0$ 平面間的夹角，以 φ 表示平面 $ax+by=0$ 与 XZ 平面間的夹角，那么空間一点的直角坐标 (x,y,z) 与球面坐标 (r,φ,θ) 之間的关系为(即变換式)

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\cos\varphi,\\ y=r\cos\theta\sin\varphi,\\ z=r\sin\theta,\end{cases}$$

其中　　　　$r\geqslant 0,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$

变换的雅可比式为：

$$J=r^2\cos\theta.$$

在球面坐标下，体积单元为 $r^2\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta$. 在用球面坐标作代换时，三重积分化为

$$\iiint\limits_{(v)} f(M)\,dv=\iiint\limits_{(v)} f(r,\ \varphi,\ \theta)\,r^2\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta,$$

再假定这个三重积分可以化为逐次积分来計算，通常用的是先对 r 积分，把区域 (v) 投影在 $r=$常数特别是 $r=1$ 的球面上，得到投影区域 $(\sigma_{\varphi\theta})$，它的境界曲綫由 φ，θ 的关系确定(图 3-6-34)，积分的計算化为

$$\iiint\limits_{(v)} f(M)\,dv=\iint\limits_{(\sigma_{\varphi\theta})}\cos\theta\,d\varphi\,d\theta\int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f(r,\ \varphi,\ \theta)\,r^2\,dr.$$

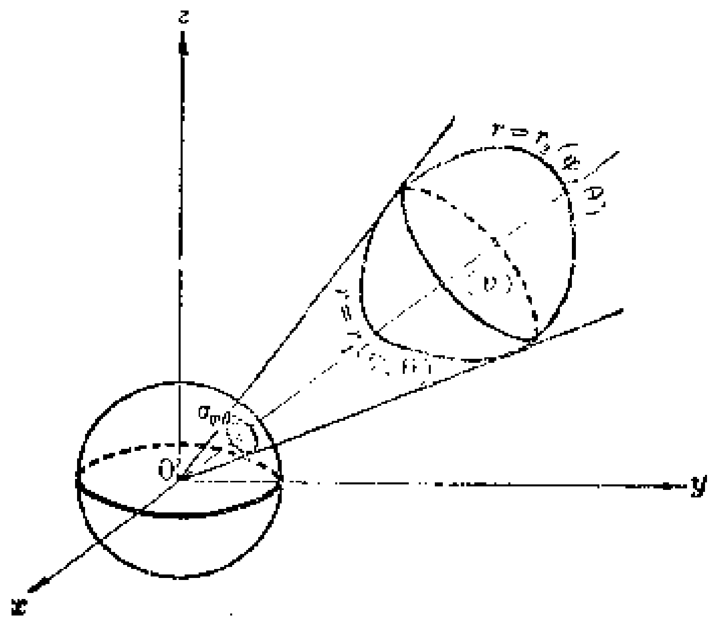


图　3-6-34

这时区域 (v) 是由 $(\varphi,\ \theta)\in(\sigma_{\varphi\theta})$ 而 $r_1(\varphi,\ \theta)\leqslant r\leqslant r_2(\varphi,\ \theta)$ 来描述。

[例 6] 設(v)为球面

$$x^2+y^2+z^2=2az\,(a>0)$$

和錐面(以 z 軸为軸,頂角为 2α)所圍的部分。求(v)的体积(图 3-6-35)。利用球面坐标，此时上面两个曲面的方程变换为:

$$r=2a\sin\theta$$

和 $$\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha.$$

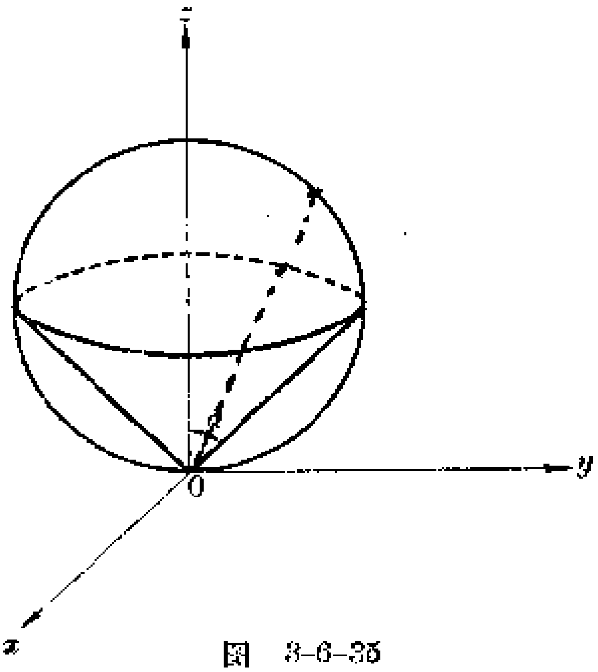


图 3-6-35

于是体积为:

$$v=\iint\limits_{(\sigma_{\varphi\theta})}\cos\theta\,d\theta\,d\varphi\int_0^{2a\sin\theta}r^2\,dr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\int_0^{2a\sin\theta}r^2\,dr$$

$$=\frac{2\pi}{3}8a^3\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos\theta\,d\theta=\frac{4\pi a^3}{3}(1-\cos^4\alpha).$$

[例 7] 求曲面$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=ax\ \ (a>0)$所圍成区域的体积,从方程本身知$x\geq 0$，作变数变换

$$\begin{cases}x=ar\cos\theta\cos\varphi,\\ y=br\cos\theta\sin\varphi,\\ z=cr\sin\theta,\end{cases}$$

这个变换称为广义的球面坐标变换。

这时有

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\right|=abc\,r^2\cos\theta,$$

曲面方程变为: $$r^3=a^2\cos\theta\cos\varphi,$$

故体积
$$v=\iiint\limits_{(v)} dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{(v)} abcr^2\cos\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$
$$=abc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{(a^2\cos\theta\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}}r^2\,dr$$
$$=\frac{a^3bc}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{3}a^3bc.$$

§3 第一类曲綫积分的計算

設函数 $f(x, y, z)$ 定义在空間曲綫 (l) 上，并且是 (l) 上的連續函数，曲綫 (l) 的方程为

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad (t_0\leqslant t\leqslant T). \\ z=z(t), \end{cases}$$

假設此曲綫为光滑的，也就是說函数 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ 在 $[t_0, T]$ 上具有連續导数。利用弧长的表达式可以将第一类曲綫积分化为定积分来計算。

若划分区間 $[t_0, T]$ 为

$$t_0<t_1<t_2\cdots<t_n=T,$$

并記 $d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{t_i-t_{i-1}\}$ 以及記 Δs_i 为对应区間 $[t_{i-1}, t_i]$ 上的一段弧长。在区間 $[t_{i-1}, t_i]$ 上任意取一点 ξ_i，那么按定义第一类曲綫积分为

$$\int_{(l)}f(x, y, z)ds=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f[x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)]\Delta s_i.$$

由弧长的表达式及中值定理：

$$\Delta s_i=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt$$
$$=\sqrt{[x'(\xi_i^*)]^2+[y'(\xi_i^*)]^2+[z'(\xi_i^*)]^2}\,\Delta t_i,$$

这里 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$，ξ_i^* 为 $[t_{i-1}, t_i]$ 上的某一点。于是有

$$\int_{(l)} f(x, y, z)ds=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f[x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)] \cdot\sqrt{[x'(\xi_i^*)]^2+[y'(\xi_i^*)]^2+[z'(\xi_i^*)]^2}\,\Delta t_i,$$

等式右端的和号不是一个积分和数（黎曼和数），利用本篇第三章§1的一个注解，可以将它化为黎曼和数来处理：

$$\int_{(l)} f(x, y, z)ds=\lim_{d\to 0}\left\{\sum_{i=1}^{n} f[x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)] \cdot\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2+[z'(\xi_i)]^2}\cdot\Delta t_i+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\Delta t_i\right\},$$

这里 $\eta_i=f[x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)][\sqrt{[x'(\xi_i^*)]^2+[y'(\xi_i^*)]^2+[z'(\xi_i^*)]^2} -\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2+[z'(\xi_i)]^2}]$。

再注意到：

$$\left|\sqrt{[x'(\xi_i^*)]^2+[y'(\xi_i^*)]^2+[z'(\xi_i^*)]^2} -\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2+[z'(\xi_i)]^2}\right|$$
$$\leqslant\sqrt{[x'(\xi_i^*)-x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i^*)-y'(\xi_i)]^2+[z'(\xi_i^*)-z'(\xi_i)]^2}$$

（这个不等式就是我們所熟知的不等式 $||a|-|b||\leqslant|a-b|$，而把 a, b 視为三維欧氏空間的向量罢了）。

然后再利用 f 及 $x'(t), y'(t), z'(t)$ 的連續性，容易証得

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\eta_i\Delta t_i=0,$$

这样就得到公式：

$$\int_{(l)} f(x, y, z)ds=\int_{t_0}^{T} f[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,dt.$$

特别地如果曲綫 (l) 为一条光滑的平面曲綫，它的方程为 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$，那么有

$$\int_{(l)} f(x, y)\,ds=\int_a^b f[x, f(x)]\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

[例1] 若 (l) 为右半单位圓周（图3-6-36），求 $I=\int_{(l)}|y|\,ds$.

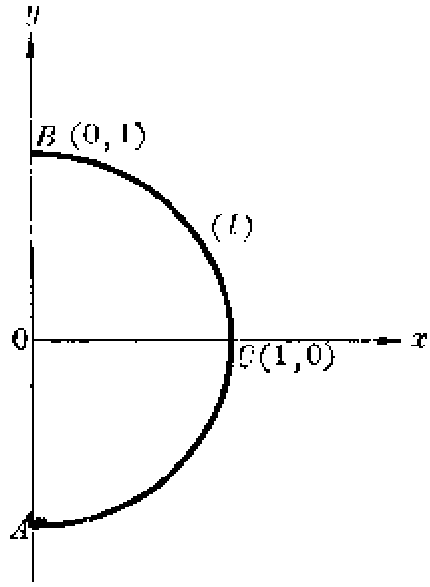


图　3-6-36

半圓(l)为：$x^2+y^2=1$，$x\geqslant 0$。

由 $y'=-\dfrac{x}{y}$

$$ds=\pm\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$=\pm\sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}}\,dx$$

$$=\pm\frac{dx}{|y|}$$

符号的选取应保証 $ds\geqslant 0$，因此，在圓弧段 $\widehat{AC}$ 上，由于 $dx>0$，故 $ds=\dfrac{dx}{|y|}$，而在圓弧段 $\widehat{CB}$ 上，由于 $dx<0$，故 $ds=-\dfrac{dx}{|y|}$。所以：

$$I=\int_{(l)}|y|\,ds=\int_{(AC)}|y|\cdot\frac{dx}{|y|}+\int_{(CB)}|y|\cdot\left(-\frac{1}{|y|}\right)dx$$

$$=\int_0^1 dx-\int_1^0 dx=2.$$

这个問題也可以用参数式来計算，右半圓的方程取为：

$$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,\end{cases}\quad\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

$$ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=dt,$$

于是
$$\int_{(l)}|y|\,ds=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,dt=2.$$

[例 2]
$$\begin{cases}x=a,\\ y=at,\\ z=\dfrac{1}{2}at^2,\end{cases}\qquad(0\leqslant t\leqslant 1,\ a>0),$$

在点(x, y, z)处的綫密度为 $\rho=\sqrt{\dfrac{2z}{a}}$，求$(l)$的質量。

由 $$ds=a\sqrt{1+t^2}\,dt,$$

所以质量为：$m=\int_{(l)}\rho ds=\int_0^1 at\sqrt{1+t^2}\,dt=\frac{a}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

[例 3] 求 $I=\int_{(l)}(x+y)ds$,

此处 (l) 为联結三点 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$ 的直綫段(图 3-6-37)。

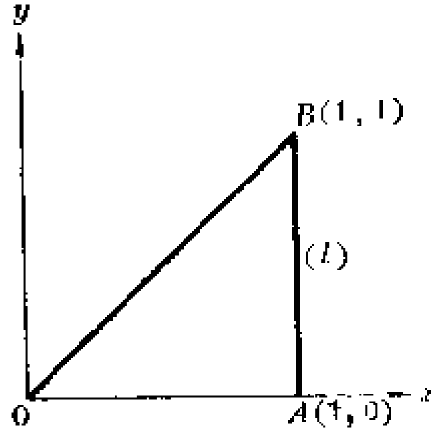


图 3-6-37

$$I=\int_{(l)}(x+y)ds$$
$$=\left\{\int_{\overline{OA}}+\int_{\overline{AB}}+\int_{\overline{BO}}\right\}(x+y)ds,$$

在直綫段 $\overline{OA}$ 上 $y=0$, 故 $ds=dx$ 得

$$\int_{\overline{OA}}(x+y)ds=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2},$$

在直綫段 $\overline{AB}$ 上 $x=1$, 故 $ds=dy$, 得

$$\int_{\overline{AB}}(x+y)ds=\int_0^1(1+y)dy=\frac{3}{2},$$

在直綫段 $\overline{BO}$ 上 $y=x$, 故 $ds=\sqrt{2}\,dx$, 得

$$\int_{\overline{BO}}(x+y)\,ds=\int_0^1 2x\sqrt{2}\,dx=\sqrt{2},$$

所以 $$I=2+\sqrt{2}.$$

§4 第一类曲面积分的計算

一、曲面的面积

設有一曲面块 S, 它的方程为

$$z=f(x,y),$$

它在 XY 平面上的投影 (σ_{xy}) 为可求面积的，又設这块曲面是光滑的，也就是說函数 $f(x,y)$ 具有对 x 和 y 的連續偏导数。在这样的假設之下，我們知道(第二篇最后一章)，这块曲面在它的每一点

处都有切面和法綫,如果用 γ 来表示这个法綫与 z 軸間的夹角,则

$$|\cos\gamma|=\frac{1}{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}},$$

将曲面的投影区域 (σ_{xy}) 分划为若干可求面积的小区域 $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, $\cdots$, $\Delta\sigma_n$。令 $d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\sigma_i$ 的直徑$\}$, 在这一分划之下相应地将曲面 S 分为若干小片 ΔS_1, ΔS_2, $\cdots$, ΔS_n。在 $\Delta S_i(i=1,2,\cdots,n)$ 上任取一点 $M_i(\xi_i,\eta_i,f(\xi_i,\eta_i))$, 过該点 M_i, 作曲面 S 的切面 π_i, 在这个切面 π_i 上,我們取一个小块 ΔS_i^*。它的取法必須使 ΔS_i^* 在 XY 平面上的投影与 ΔS_i 在 XY 平面上的投影相合,同为 $\Delta\sigma_i$。从直观上来看,在 M_i 点的邻近,切面应当相当逼近于曲面,换句話說,当 d 充分小时, ΔS_i^* 应当相当逼近于 ΔS_i, 于是,很自然地我們认为和数

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i^*$$

非常接近于曲面 S 的面积。当 $d\to 0$ 时,若上述和数有一个确定的极限,并且这个极限值不依賴于分划及点 M_i 在 ΔS_i 上的取法,那么就应該认为这个极限值就是我們所考虑的曲面 S 的面积。

从这个概念出发,我們来推导曲面的面积公式。

由于切平面 π_i 的法綫就是曲面 S 在点 M_i 的法綫,它与 z 軸的夹角 γ_i 为

$$|\cos\gamma_i|=\frac{1}{\sqrt{1+[f_x'(\xi_i,\eta_i)]^2+[f_y'(\xi_i,\eta_i)]^2}},$$

又因为 ΔS_i^* 在 XY 平面上的投影为 $\Delta\sigma_i$, 所以

$$\Delta S_i^*=\frac{\Delta\sigma_i}{|\cos\gamma_i|}=\sqrt{1+[f_x'(\xi_i,\eta_i)]^2+[f_y'(\xi_i,\eta_i)]^2}\,\Delta\sigma_i,$$

而和数 $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta S_i^*=\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f_x'(\xi_i,\eta_i)]^2+[f_y'(\xi_i,\eta_i)]^2}\,\Delta\sigma_i$ 正是函数 $\sqrt{1+f_x'^2(x,y)+f_y'^2(x,y)}$ 在可求面积区域 (σ_{xy}) 上的黎曼和,

当 $d\to 0$ 时极限存在，这样便得到曲面 S 的面积公式（記其面积亦为 S）

$$S=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i^*$$

$$=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'_x(\xi_i,\eta_i)]^2+[f'_y(\xi_i,\eta_i)]^2}\,\Delta\sigma_i$$

$$=\iint\limits_{(\sigma_{xy})}\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}\,dx\,dy.$$

由推导的过程知道，面积 S 的公式也可以写为

$$S=\iint\limits_{(\sigma_{xy})}\frac{dx\,dy}{|\cos(\boldsymbol{n},z)|},$$

这里 $\cos(\boldsymbol{n},z)$ 表示曲面的法綫与 z 軸的夹角余弦，它是 x 和 y 的函数。

当曲面 S 的方程取参数形式：

$$\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\\ z=z(u,v),\end{cases}$$

这里点 $(u,v)\in\Sigma$，Σ 为 UV 平面上的一个区域，假設函数 $x(u,v)$，$y(u,v)$，$z(u,v)$ 在 Σ 上連續，具有对 u 和 v 的連續偏导数，并且雅可比矩陣

$$\begin{pmatrix}x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{pmatrix}$$

的秩为 2，那么曲面上每一点处的法綫方向数为

$$\begin{vmatrix}y_u & z_u\\ y_v & z_v\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}z_u & x_u\\ z_v & x_v\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}x_u & y_u\\ x_v & y_v\end{vmatrix},$$

法綫与 z 軸夹角的余弦为

$$|\cos(\boldsymbol{n},z)|=\left|\frac{x_u y_v-x_v y_u}{\sqrt{(y_u z_v-y_v z_u)^2+(z_u x_v-z_v x_u)^2+(x_u y_v-x_v y_u)^2}}\right|$$

$$=\left|\frac{x_u y_v-x_v y_u}{\sqrt{(x_u^2+y_u^2+z_u^2)(x_v^2+y_v^2+z_v^2)-(x_u x_v+y_u y_v+z_u z_v)^2}}\right|$$

$$=\left|\frac{x_u y_v-x_v y_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right|=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}},$$

其中
$$E=x_u^2+y_u^2+z_u^2,$$
$$F=x_u x_v+y_u y_v+z_u z_v,$$
$$G=x_v^2+y_v^2+z_v^2.$$

所以按換元法則

$$S=\iint_{(\sigma_{xy})}\frac{dx\,dy}{|\cos(\boldsymbol{n},z)|}=\int_{(\Sigma)}\frac{1}{|\cos(\boldsymbol{n},z)|}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv$$

$$=\iint_{(\Sigma)}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

这就是在参数形式下，曲面的面积公式。在微分几何中要以别的方法得到同样公式，而 $\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$ 称为曲面的面积单元。

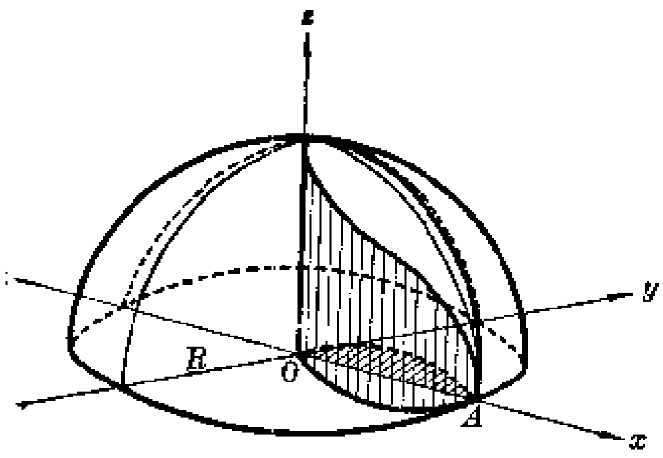


图　3-6-38

[例 1]　求球面

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

含在柱面

$$x^2+y^2=ax\quad(a>0)$$

內部的面积 S(图 3-6-38)。

由
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z},$$

所以
$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}}=\frac{a}{|z|}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

由对称性，并利用柱面坐标(图 3-6-39)：

$$S=4\iint_{(\sigma_{xy})}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}\,r\,dr$$

$$=4a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

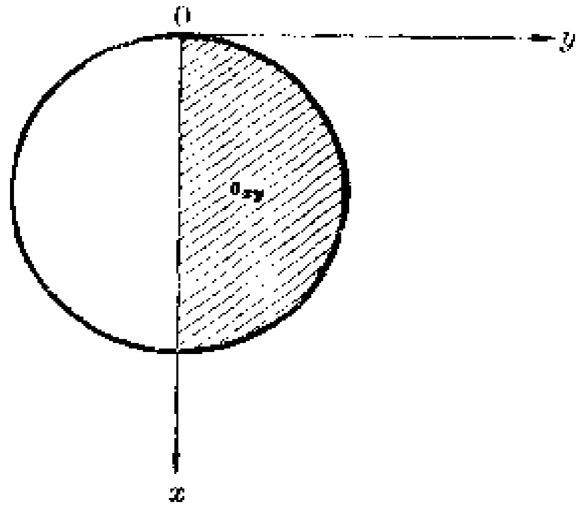


图 3-6-39

[例 2] 求以 R 为半徑的球面面积 S，此球的方程为

$$\begin{cases} x=R\cos\theta\cos\varphi, \\ y=R\cos\theta\sin\varphi, \\ z=R\sin\theta \end{cases}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi\right).$$

这时 $E=x_\theta^2+y_\theta^2+z_\theta^2=R^2$，$F=0$，$G=R^2\cos^2\theta$，

$$\sqrt{EG-F^2}=R^2\cos\theta,$$

由于球面的对称性，我們只要計算它在第一象限 $\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\ r\geqslant0\right)$ 内的面积，这个面积的 8 倍就是整个球面积 S。所以

$$S=8R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta=4\pi R^2.$$

二、第一类曲面积分化为二重积分

利用曲面面积的表达式，可以将第一类曲面积分化为二重积分。

設函数 $F(x, y, z)$ 为定义在曲面 S 上的連續函数。曲面 S 的方程为 $z=f(x, y)$，它在 XY 平面上的投影为一块可求面积区域 (σ_{xy})，并設 $f(x, y)$ 在 (σ_{xy}) 上具有对 x 和 y 的連續偏导数，若将区域 (σ_{xy}) 分划为若干可求面积的小区域 $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, $\Delta\sigma_3$, $\cdots$, $\Delta\sigma_n$,

令 $d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\sigma_i$ 的直徑$\}$，在这一分划之下，相应的曲面 S 亦被分划为若干可求面积的小块 $\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$，并把它們的面积仍記为 $\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$，那么按定义就有

$$\iint\limits_{(S)} F(x,y,z)\,dS=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i,$$

这里点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 为 ΔS_i 上的任意一点，也就是說 (ξ_i, η_i) 为 $\Delta\sigma_i$ 上的任意一点，而 $\zeta_i=f(\xi_i, \eta_i)$。再按照曲面面积的表达式及中值定理

$$\begin{aligned}\Delta S_i&=\iint\limits_{(\Delta\sigma_i)}\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\,dx\,dy\\&=\sqrt{1+[f_x'(\xi_i^*, \eta_i^*)]^2+[f_y'(\xi_i^*, \eta_i^*)]^2}\,\Delta\sigma_i,\end{aligned}$$

这里点 (ξ_i^*, η_i^*) 为 $\Delta\sigma_i$ 上的某一点。于是

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i\\&\quad=\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\sqrt{1+[f_x'(\xi_i^*, \eta_i^*)]^2+[f_y'(\xi_i^*, \eta_i^*)]^2}\,\Delta\sigma_i\\&\quad=\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\sqrt{1+[f_x'(\xi_i, \eta_i)]^2+[f_y'(\xi_i, \eta_i)]^2}\,\Delta\sigma_i\\&\qquad+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\,\Delta\sigma_i.\end{aligned}$$

等式右端第一項正是一个黎曼和，由假設 f, f_x', f_y' 皆連續，故

$$\begin{aligned}&\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} F[\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)]\sqrt{1+[f_x'(\xi_i, \eta_i)]^2+[f_y'(\xi_i, \eta_i)]^2}\,\Delta\sigma_i\\&\quad=\iint\limits_{(\sigma_{xy})} F[x, y, f(x, y)]\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\,dx\,dy,\end{aligned}$$

而等式右端第二項在假設下不难証明（参見本篇第三章§1的注解）

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\eta_i\,\Delta\sigma_i=0.$$

这样就将第一类曲面积分化为二重积分：

$$\iint\limits_{(S)} F(x, y, z)\,dS = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} F[x, y, f(x, y)]\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\,dx\,dy.$$

当曲面的方程表示为参数形式

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

[这里 $(u, v)\in\Sigma$]时，假設函数 $x(u, v)$，$y(u, v)$，$z(u, v)$ 皆在 Σ 上具有对 u 和 v 的連續偏导数，并且其雅可比矩陣在 Σ 上的秩为 2，同样不难得到

$$\iint\limits_{(S)} F(x, y, z)\,dS$$

$$= \iint\limits_{(\Sigma)} F[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

这里

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,$$

$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,$$

$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

[例 3] 計算 $\iint\limits_{(S)}(x+y+z)\,dS$，$S$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$z\geqslant 0$.

因 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

从而

$$\iint\limits_{(S)} (x+y+z)\,dS$$

$$= \iint\limits_{(\sigma)} (x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2})\sqrt{\frac{(a^2-x^2-y^2)+x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,d\sigma$$

$$= \iint\limits_{(\sigma)} (x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,d\sigma$$

(σ 是 XY 平面上以原点为中心，半徑为 a 的圆)。化为极坐标来計算，即得

$$\iint\limits_{(S)}(x+y+z)dS$$

$$=\int_0^a\left[\int_0^{2\pi}(r\cos\theta+r\sin\theta+\sqrt{a^2-r^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}d\theta\right]rdr$$

$$=\int_0^a 2\pi ar\,dr=\pi a^3.$$

[例 4]　計算积分 $\iint\limits_{(S)}zdS$，其中 S 为螺旋面

$$\begin{cases}x=u\cos v,\\ y=u\sin v, & (0\leqslant u\leqslant a,\ 0\leqslant v\leqslant 2\pi)\\ z=v,\end{cases}$$

的一部分。

$$E=x_u^2+y_u^2+z_u^2=\cos^2 v+\sin^2 v=1,$$

$$F=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v=-u\sin v\cos v+u\sin v\cos v=0,$$

$$G=x_v^2+y_v^2+z_v^2=u^2\sin^2 v+u^2\cos^2 v+1=1+u^2.$$

所以
$$\iint\limits_{(S)}zdS=\iint\limits_{(\Sigma)}v\cdot\sqrt{1+u^2}\,du\,dv$$

$$=\int_0^{2\pi}vdv\int_0^a\sqrt{1+u^2}\,du$$

$$=2\pi^2\left[\frac{u}{2}\sqrt{1+u^2}+\frac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right]_0^a$$

$$=\pi^2a\sqrt{1+a^2}+\pi^2\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right).$$

§5　二重积分、三重积分、第一类曲綫积分、第一类曲面积分在物理上的应用

一、重　心

在本篇第三章定积分的应用中，已經叙述了弧的重心和平面

图形的重心，現在我們和以前完全类似地叙述一般的几何体的重心。

設 Ω 为一块可以度量的几何体，它的密度函数为 $\rho(M)$。又假設 $\rho(M)$ 为 Ω 上的連續函数，将几何体 Ω 分划为若干可度量的小块 $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \cdots, \Delta\Omega_n$，記它們的度量大小亦为 $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \cdots, \Delta\Omega_n$。令 $d=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{\Delta\Omega_i$ 的直徑$\}$，当 d 充分小时，每一个小块 $\Delta\Omega_i$ 的质量近似地等于 $\rho(M_i)\Delta\Omega_i$，这里 $M_i(x_i, y_i, z_i)$ 为 $\Delta\Omega_i$ 上的任意一点（如果 Ω 为平面上的一块几何体，例如为 XY 平面上可求面积的图形，那么 $z_i=0$）。于是几何体 Ω 的重心坐标 x_G, y_G, z_G 将分别近似地等于以下三个量：

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\rho(M_i)\Delta\Omega_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(M_i)\Delta\Omega_i},\quad \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\rho(M_i)\Delta\Omega_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(M_i)\Delta\Omega_i},\quad \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i\rho(M_i)\Delta\Omega_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(M_i)\Delta\Omega_i}.$$

令 $d\to 0$，上述三个量的极限均可用积分表示，并且我們将很自然地认为，它們正是几何体 Ω 的重心的三个坐标 x_G, y_G, z_G：

$$x_G=\frac{\int_\Omega x\rho(M)d\Omega}{\int_\Omega \rho(M)d\Omega}=\frac{\int_\Omega x dm}{\int_\Omega dm};$$

$$y_G=\frac{\int_\Omega y\rho(M)d\Omega}{\int_\Omega \rho(M)d\Omega}=\frac{\int_\Omega y dm}{\int_\Omega dm};$$

$$z_G=\frac{\int_\Omega z\rho(M)d\Omega}{\int_\Omega \rho(M)d\Omega}=\frac{\int_\Omega z dm}{\int_\Omega dm};$$

这里 $dm=\rho(M)d\Omega$。

具体的說来，当几何体 Ω 为一段可求长的弧 S 时，其重心的坐标为

$$x_G=\frac{\int_S x\rho\,ds}{\int_S \rho\,ds};\quad y_G=\frac{\int_S y\rho\,ds}{\int_S \rho\,ds};\quad z_G=\frac{\int_S z\rho\,ds}{\int_S \rho\,ds}.$$

特别当弧段为平面上的弧，它的方程为 $y=f(x)\ (a\leqslant x\leqslant b)$，并且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有連續导数，那么按照第一类曲綫积分化为定积分，則有

$$x_G=\frac{\int_a^b x\rho(x,f(x))\sqrt{1+f'^2}\,dx}{\int_a^b \rho(x,f(x))\sqrt{1+f'^2}\,dx};$$

$$y_G=\frac{\int_a^b f(x)\rho(x,f(x))\sqrt{1+f'^2}\,dx}{\int_a^b \rho(x,f(x))\sqrt{1+f'^2}\,dx}.$$

这正是本篇第三章 §5 中我們已經遇到过的公式。又如果几何体 Ω 为空間一块体积，那么这块体积重心坐标应为：

$$x_G=\frac{\iiint\limits_{(v)} x\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{(v)} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz};$$

$$y_G=\frac{\iiint\limits_{(v)} y\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{(v)} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz};$$

$$z_G=\frac{\iiint\limits_{(v)} z\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{(v)} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}.$$

[例 1] 求一均匀的球頂錐体（图 3-6-40）的重心。設該球的

球心在原点，半徑为 a. 錐体的顶点在原点，軸为 z 軸，錐面与 z 軸交角为 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，由于这块几何体 v 关于 z 軸对称，并且密度 ρ 为常数，所以

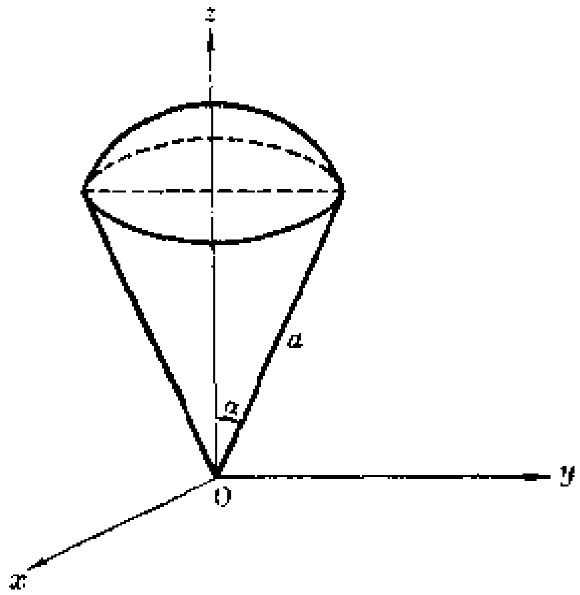


图 3-6-40

$$x_G=y_G=0,$$

$$z_G=\frac{\iiint\limits_{(v)} z\,dv}{\iiint\limits_{(v)} dv}.$$

而
$$\iiint\limits_{(v)} z\,dv=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a r^2\cos\theta\rho\sin\theta\,dr$$

$$=\frac{1}{4}\pi a^4(1-\cos^2\alpha),$$

$$\iiint\limits_{(v)} dv=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a r^2\cos\theta\,dr$$

$$=\frac{2}{3}\pi a^3(1-\cos\alpha),$$

得
$$z_G=\frac{3}{8}(1+\cos\alpha)a.$$

二、矩

設 v 为一块可度量的几何形体（以下我們总設它是一块空間体积，对于其他几何形体可同样討論），它的密度函数为 $\rho(M)$，并設 $\rho(M)$ 在 v 上連續。分别称 $(k\geqslant0)$

$$\iiint\limits_{(v)} x^k\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,\quad \iiint\limits_{(v)} y^k\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$\iiint\limits_{(v)} z^k\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

为物体 v 关于坐标平面 YZ，坐标平面 ZX，坐标平面 XY 的 k 阶矩。这些量在物理、力学上起着重要作用。

其中当 $k=0, 1, 2$ 的情形更为重要。当 $k=0$ 时称为零阶矩，表示物体 v 的质量。当 $k=1$ 时称为靜矩。靜矩与物体质量之商为該物体的重心的坐标。当 $k=2$ 时称为轉动慣量。

又分别称

$$I_{0z}=\iiint\limits_{(v)}(x^2+y^2)\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_{0x}=\iiint\limits_{(v)}(y^2+z^2)\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_{0y}=\iiint\limits_{(v)}(z^2+x^2)\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

为物体 v 关于 z 軸，x 軸，y 軸的轉动慣量，对軸的轉动慣量容易用对坐标平面的轉动慣量表示之。

記　　$I_{xy}=\iiint\limits_{(v)}z^2\rho\,dx\,dy\,dz$，$I_{yz}=\iiint\limits_{(v)}x^2\rho\,dx\,dy\,dz$，

$$I_{zx}=\iiint\limits_{(v)}y^2\rho\,dx\,dy\,dz,$$

那么　　$I_{0z}=I_{yz}+I_{zx}$，

$I_{0x}=I_{zx}+I_{xy}$，

$I_{0y}=I_{xy}+I_{yz}$。

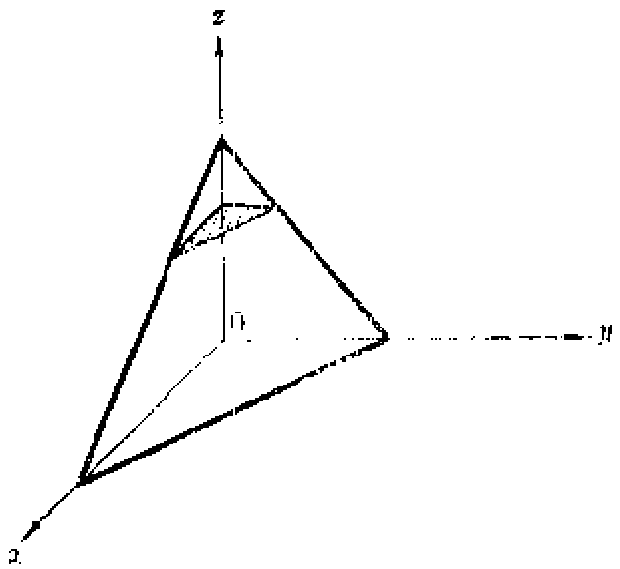


图　3-6-41

[例 2]　計算由平面

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

$$x=0,\ y=0,\ z=0$$

所圍成的均匀物体(設 $\rho=1$)对于坐标平面的轉动慣量(图 3-4-41)。

$$I_{xy}=\iiint\limits_{(v)} z^2 dx\,dy\,dz=\int_0^c\Big[\iint\limits_{(\sigma_z)} z^2\,dx\,dy\Big]dz,$$

(σ_z) 是一个直角三角形，两直角边分别为

$$\frac{a(c-z)}{c} \quad 和 \quad \frac{b(c-z)}{c},$$

所以
$$\iint\limits_{(\sigma)} z^2\,dx\,dy=z^2\cdot\frac{1}{2c^2}ab(c-z)^2,$$

因而
$$I_{xy}=\int_0^c \frac{1}{2c^2}\cdot z^2 ab(c-z)^2\,dz$$
$$=\frac{ab}{2c^2}\int_0^c z^2(c-z)^2\,dz=\frac{abc^3}{60}.$$

同样可得
$$I_{yz}=\frac{a^3bc}{60}, \quad I_{zx}=\frac{ab^3c}{60}.$$

三、引力

設一块可以度量的几何体 Ω 及 Ω 外一点 $M(x_0, y_0, z_0)$，几何体 v 的密度函数 $\rho(N)$ $(N\in\Omega)$ 为 Ω 上的連續函数，质点 M 具有单位质量。現在来考慮几何体 Ω 对质点 M 的引力 $\boldsymbol{F}$，将 Ω 分划为若干可度量的小块 $\Delta\Omega_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，并把每一小块 $\Delta\Omega_i$ 度量大小仍記为 $\Delta\Omega_i$，令 $d=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta\Omega_i 的直徑\}$，当 d 充分小时，每一小块 $\Delta\Omega_i$ 对质点 M 的引力 $\boldsymbol{F}_i$ 的大小近似地为（也就是 $|\boldsymbol{F}_i|$ 近似地为）

$$K\frac{\rho(N_i)\,\Delta\Omega_i}{r_i^2}$$

（K 为引力常数，N_i 为 $\Delta\Omega_i$ 上任意一点，它的坐标为 (x_i, y_i, z_i)，r_i 为 N_i 和 M 之間距离，$r_i=\sqrt{(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2+(z_i-z_0)^2}$）。所以 $\boldsymbol{F}_i$ 在三个坐标軸上的分量分别为：

$$K\frac{\rho(N_i)(x_i-x_0)\,\Delta\Omega_i}{r_i^3}, \quad K\frac{\rho(N_i)(y_i-y_0)\,\Delta\Omega_i}{r_i^3},$$
$$K\frac{\rho(N_i)(z_i-z_0)\,\Delta\Omega_i}{r_i^3}.$$

由于引力 $\boldsymbol{F}$ 是向量，它应服从向量加法，即和的分量等于各部分 $\boldsymbol{F}_i$ 的分量之和，因此几何体 v 对质点 M 的引力 $\boldsymbol{F}$ 在三个坐标軸上的分量应分别近似等于：

$$F_x^* = K\sum_{i=1}^{n}\frac{\rho(N_i)(x_i-x_0)\Delta\Omega_i}{r_i^3},$$

$$F_y^* = K\sum_{i=1}^{n}\frac{\rho(N_i)(y_i-y_0)\Delta\Omega_i}{r_i^3},$$

$$F_z^* = K\sum_{i=1}^{n}\frac{\rho(N_i)(z_i-z_0)\Delta\Omega_i}{r_i^3}.$$

当 $d\to 0$ 时，以上三个量的极限就是所要求的引力在三个坐标軸上的分量 F_x，F_y，F_z，按各种积分的定义，于是得

$$F_x = K\int_{\Omega}\frac{\rho(N)(x-x_0)}{r^3}\,d\Omega,$$

$$F_y = K\int_{\Omega}\frac{\rho(N)(y-y_0)}{r^3}\,d\Omega,$$

$$F_z = K\int_{\Omega}\frac{\rho(N)(z-z_0)}{r^3}\,d\Omega,$$

这里　　$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$.

［例 3］ 求一均匀球壳（密度 ρ 为常数）对不在該球壳上的一质点 M（质量为 1）的引力。

設球心在坐标原点上，半徑为 R，质点 M 位于正的 z 軸上，离球心（即原点）的距离为 a $(a\neq R)$，所要求的这个引力在 x 軸与 y 軸上的投影 F_x 及 F_y 显然为零。而

$$F_z = K\iint_{(S)}\rho\frac{z-a}{r^3}\,dS,$$

这里 r 为球面 (S) 上任意一点与点 M 的距离。

利用球面坐标：

$$x=R\cos\theta\cos\varphi,\quad y=R\cos\theta\sin\varphi,\quad z=R\sin\theta,$$

則　　$$dS=R^2\cos\theta\,d\theta\,d\varphi,$$

$$r=\sqrt{R^2+a^2-2Ra\sin\theta},$$

$$F_z=2\pi R^2\rho K\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(R\sin\theta-a)\cos\theta\,d\theta}{(R^2+a^2-2Ra\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

用代換 $R^2+a^2-2Ra\sin\theta=t^2$，这时

$$R\sin\theta-a=\frac{1}{2a}(R^2-a^2-t^2),$$

$$\cos\theta\,d\theta=-\frac{1}{Ra}\cdot t\,dt,$$

于是
$$F_z=-\frac{\pi R\rho K}{a^2}\int_{R+a}^{R-a}\left(\frac{R^2-a^2}{t^2}-1\right)dt$$

$$=-\frac{\pi R\rho K}{a^2}\left\{(R^2-a^2)\left[\frac{1}{R+a}-\frac{1}{|R-a|}\right]-|R-a|+R+a\right\}.$$

分两种情形討論之：

(i) 設 $a<R$，則 $|R-a|=R-a$，得

$$F_z=0,$$

(ii) 設 $a>R$，則 $|R-a|=-(R-a)$，得

$$F_z=-\frac{4\pi R^2\rho K}{a^2}.$$

因此在一个均匀球壳内的点，都不感受球壳表面的任何引力。而在球壳外的点，所感受到球壳表面的引力，与集中球壳的全部质量 $m=4\pi R^2\rho$ 于球心时該点所感受到的引力一样。

§6 第二类曲綫积分及第二类曲面积分

一、第二类曲綫积分

在物理和力学的很多实际問題中，往往需要求一种特殊形式的和式的极限，这个和式与定积分及第一类曲綫积分所見到的都有所不同，从而引出了新概念，即所謂第二类曲綫积分。下面来詳

細叙述它的定义、計算方法以及它与第一类曲綫积分的联系。我們从变力作功問題开始。

1. 变力作功与第二类曲綫积分的定义：設空間一单位质点 M 受外力 $\boldsymbol{F}$ 作用，从点 A 移动到点 B 一段途程 $\overset{\frown}{AB}$。如果曲綫 $\overset{\frown}{AB}$ 及力 $\boldsymbol{F}$ 都是預先給定的，我們怎样来計算单位质点 M 在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下从点 A 到点 B 所作的功呢？若 $\boldsymbol{F}$ 是常力，也就是它在每一点的大小相同且保持定向，如所周知，质点 M 在力 $\boldsymbol{F}$ 作用下从点 A 到点 B 所作的功 w 可表为

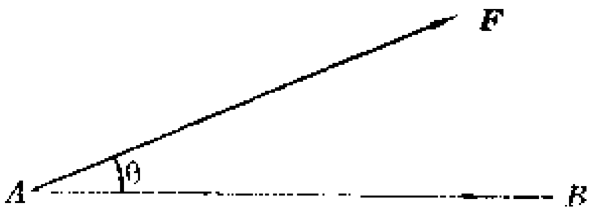


图　3-6-42

$$w = F \cdot \overline{AB} \cos\theta,$$

其中 θ 是力 $\boldsymbol{F}$ 与有向直綫段 $\vec{AB}$ 的夹角，F 为 $\boldsymbol{F}$ 的大小，$\overline{AB}$ 为直綫段长度，卽点 A 和点 B 間距离(图 3-6-42)。

但在非常力的情况下，功的計算就复杂得多了。假設力 $\boldsymbol{F}$ 不仅随点的位置 (x, y, z) 改变其大小，而且也改变它的方向。在这情况下，自然不能用上述公式来計算单位质点 M 受变力 $\boldsymbol{F}$ 的作用从点 A 沿曲綫 $\overset{\frown}{AB}$ 移动到点 B 所作的功。为了确定质点 M 所作的功，要借助于一个极限过程。我們是这样来考虑的：首先，将曲綫 $\overset{\frown}{AB}$ 从点 A 起任意分成 n 个小弧段 Δs_1, Δs_2, $\cdots$, Δs_n (图 3-6-43)。設有向弧段

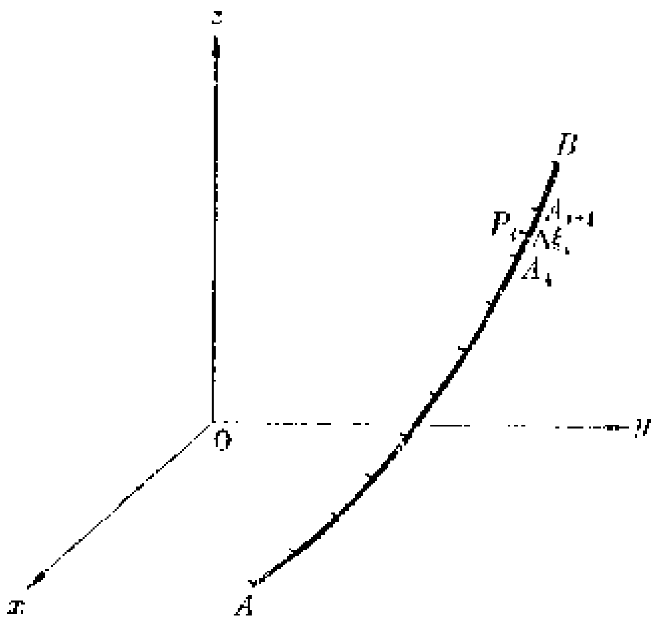


图　3-6-43

Δs_i 的起点为 $A_i(x_i, y_i, z_i)$，終点为 $A_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$。现在来求质点 M 从点 A_i 到点 A_{i+1} 沿弧段 Δs_i 所作的功 w_i。設力 $\boldsymbol{F}$ 沿 $\overset{\frown}{AB}$ 是連續变化的，于是可設想弧段 Δs_i 的长度被分得这样小，使力 $\boldsymbol{F}$ 沿着它的变化也很小，因而可近似地认为在很小弧段 Δs_i 上力 $\boldsymbol{F}$ 的大小与方向都保持不变，也就是說：可用在这弧段上任一点的作用力来近似地代表这弧段上的作用力 $\boldsymbol{F}$。例如，可取 $\boldsymbol{F}$ 在小弧段 Δs_i 上任何一点 $P_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ 的作用力 $\boldsymbol{F}_i$ 作为作用在 Δs_i 上的均匀力，于是有

$$w_i \approx \tilde{w}_i = F_i \cdot \overline{A_i A_{i+1}} \cos\theta_i,$$

其中 θ_i 为有向綫段 $\overrightarrow{A_i A_{i+1}}$ 与力 $\boldsymbol{F}_i$ 的夹角，F_i 为 $\boldsymbol{F}_i$ 的大小，$\overline{A_i A_{i+1}}$ 为点 A_i 和 A_{i+1} 間距离。設力 $\boldsymbol{F}_i$ 与三坐标軸的夹角分别为 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$，而有向綫段 $\overrightarrow{A_i A_{i+1}}$ 与三坐标軸的夹角分别为 $\alpha_i', \beta_i', \gamma_i'$。于是有

$$\cos\theta_i = \cos\alpha_i \cos\alpha_i' + \cos\beta_i \cos\beta_i' + \cos\gamma_i \cos\gamma_i',$$

从而有

$$w_i \approx \tilde{w}_i = F_i \cdot \overline{A_i A_{i+1}} (\cos\alpha_i \cos\alpha_i' + \cos\beta_i \cos\beta_i' + \cos\gamma_i \cos\gamma_i').$$

但不难看出，$F_i \cos\alpha_i$，$F_i \cos\beta_i$，$F_i \cos\gamma_i$ 分别是力 $\boldsymbol{F}_i$ 在三坐标軸的射影，記为

$$F_i \cos\alpha_i = P(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i),\quad F_i \cos\beta_i = Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i),$$

$$F_i \cos\gamma_i = R(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i).$$

同样，$\overline{A_i A_{i+1}} \cos\alpha_i'$，$\overline{A_i A_{i+1}} \cos\beta_i'$，$\overline{A_i A_{i+1}} \cos\gamma_i'$ 分别是有向綫段 $\overrightarrow{A_i A_{i+1}}$ 在三坐标軸的射影，故它們分别等于

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x_i,$$

$$y_{i+1} - y_i = \Delta y_i,$$

$$z_{i+1} - z_i = \Delta z_i.$$

最后，得到

$$w_i \approx \tilde{w}_i = P(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta x_i + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta y_i + R(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta z_i.$$

因此，沿整个路程 $\widehat{AB}$ 所作的功 W 可近似地等于

$$W=\sum_{i=1}^{n} w_i \approx \sum_{i=1}^{n} \widetilde{w}_i=\sum_{i=1}^{n}\left[P(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) \Delta x_i+Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) \Delta y_i\right.$$
$$\left.+R(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) \Delta z_i\right],$$

这里設点 A 的坐标为 (x_1, y_1, z_1)，点 B 的坐标为 $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$。如果把 $\widehat{AB}$ 分得越細，$\widetilde{W}=\sum_{i=1}^{n} \widetilde{w}_i$ 就越接近于 W。記 Δs_i 的长度为 λ_i，且設 $\lambda=\max\limits_i\{\lambda_i\}$。如果当 $\lambda \to 0$ 时极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0} \widetilde{W}$ 存在，且极限值与分法无关，也与点 $P_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ 的选擇无关，則把这个极限值就作为所求的功 W，記为

$$W=\int_{(\widehat{AB})} P(x, y, z)\, dx+Q(x, y, z)\, dy+R(x, y, z)\, dz.$$

积分号下的和式可写作两向量 $\boldsymbol{F}=(P, Q, R)$ 及 $\boldsymbol{ds}=(dx, dy, dz)$ 的数量积 $\boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{ds}$，从而也可写为

$$W=\int_{(\widehat{AB})} \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{ds}.$$

在上述定义中，力 $\boldsymbol{F}$ 是点的坐标 (x, y, z) 的函数，且設有向弧段 Δs_i 与有向綫段 $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 的方向是与质点运动的方向一致的，从而 $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 的射影 Δx_i, Δy_i, Δz_i 也是有向的。因此，若从点 A 至点 B 沿 $\widehat{AB}$ 所作的功为 W，則沿相同路徑从点 B 到点 A 所作的功卽为 $-W$，因这时射影 Δx_i, Δy_i, Δz_i 都改变了符号，故整个和式从而极限也改变了符号。这情况是与物理学中功的概念完全一致的。

在液体場和电磁場中，有很多物理量的确定，都要求計算上述形式的和式的极限。因此有必要給以下面的一般定义。

定义　設 L 为一条光滑或逐段光滑曲綫，且設 $f(x, y, z)$ 为定义在 L 上的有界函数。将 L 沿一确定方向从起点开始用分点 $A_i(x_i, y_i, z_i)$ 分为 n 个有向弧段 $\widehat{A_iA_{i+1}}$，且設 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$。在每

一弧段 $\widehat{A_iA_{i+1}}$ 上任取一点 $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$，作下和式：

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i,$$

其中記 L 的起点为 $A(x_1, y_1, z_1)$，終点为 $B(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$。設 $\lambda=\max\limits_i\{\overline{A_iA_{i+1}}\}$，这里 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 記有向綫段 $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 的长度。若当 $\lambda\to 0$ 时，和 σ 有极限 I，且它与 L 的分法无关，也与点 P_i 的选擇无关，則称 I 为 $f(x, y, z)dx$ 沿曲綫 L 按所述方向的第二类曲綫积分，記作

$$I=\int_{(L)} f(x, y, z)dx \text{ 或 } I=\int_{(\widehat{AB})} f(x, y, z)dx.$$

如果由乘上 $\Delta y_i=y_{i+1}-y_i$ 或 $\Delta z_i=z_{i+1}-z_i$ 所得的和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta y_i$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta z_i$ 取相应的极限，則得到 $f(x,y,z)\,dy$ 或 $f(x, y, z)dz$ 沿曲綫 L 按所述方向的第二类曲綫积分，記作 $\int_{(L)} f(x, y, z)dy$ 或 $\int_{(L)} f(x, y, z)dz$。若考虑在 L 上定义一个向量函数 $\boldsymbol{f}(x, y, z)$，設它在三坐标軸的分量为 $P(x, y, z)$，$Q(x, y, z)$，$R(x, y, z)$，且有向綫段 $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 在三坐标軸的射影分别为 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$，$\Delta y_i=y_{i+1}-y_i$，$\Delta z_i=z_{i+1}-z_i$，于是，若下面的和

$$\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i+R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i]$$

当 $\lambda=\max\limits_i\{A_iA_{i+1}\}\to 0$ 时的极限 I 存在，且 I 不因点 $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 的选擇而变，也不因分法而变，則称 I 为向量 $\boldsymbol{f}(x, y, z)$ 沿曲綫 L（或 $\widehat{AB}$）按一定方向（如从点 A 到点 B）的第二类曲綫积分，記作

$$I=\int_{(L)} P(x, y, z)dx+Q(x, y, z)dy+R(x, y, z)dz$$

或 $$I=\int_{(\widehat{AB})} P(x, y, z)dx+Q(x, y, z)dy+R(x, y, z)dz.$$

与变力作功的情况一样，从定义立知：第二类曲綫积分是与沿曲綫的方向有关的。即从点 A 到点 B 沿曲綫 $\widehat{AB}$ 的曲綫积分的

值与沿原曲綫的相反方向(即从点 B 到点 A)的曲綫积分的值有不同符号，但它們的絕对值相等。这是第二类曲綫积分的一个很重要性质，也是它区别于第一类曲綫积分的一个特征。可回忆一下，后者是由于求函数值与弧长的乘积所得到的和式的极限作为定义的，因此，不論曲綫的分法的方向怎样，弧长总是无向数值，从而第一类曲綫积分的值是与所沿曲綫的方向无关的。

上面所討論的都是空間情形。但在許多实际問題中往往也需要考虑平面問題，因此会遇見平面上的第二类曲綫积分。例如，在 xy 平面上就有下面的曲綫积分：

$$\int_{(\widehat{AB})} P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy,$$

其中 $\widehat{AB}$ 为平面曲綫。它是空間曲綫积分的特殊情况，定义是很明显的。

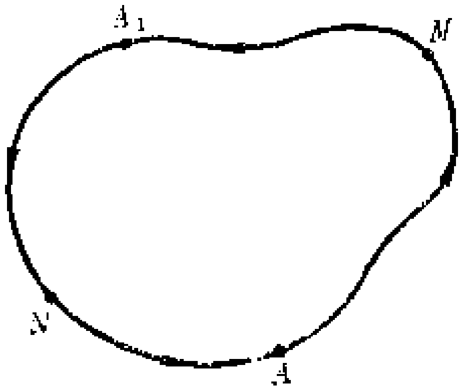


图　3-6-44

不論空間或平面的第二类曲綫积分都是与沿曲綫的方向有关的。但如果是閉路，自然不能用起点和終点来說明方向。这时在每一情况，都要說明积分是沿什么方向来取的。而在平面情况，通常将反时針向(即左旋方向)作为閉路的正向，也就是这样規定：若一人立在平面上沿閉路循一方向作环行时，如閉路所圍成的区域靠近这人的部分总在他的左方，則这个方向就算作正向，否則算作負向。以后，在平面閉路的情况，若不特別說明，总认为曲綫积分是沿正向来計算的。这样規定，自然不限制可沿曲綫的負向取积分，不过这时积分值要改变符号。

在平面閉路的情况，还有一个可注意的事实：只要方向不变，曲

綫积分的值是与起点的位置无关的。例如，設閉路 L 为 $\overrightarrow{AMA_1NA}$（图 3-6-44），則

$$\begin{aligned}\int_{(L)} P\,dx+Qdy &= \int_{\overrightarrow{AMA_1NA}} P\,dx+Qdy \\ &= \int_{\overrightarrow{AMA_1}} P\,dx+Qdy+\int_{\overrightarrow{A_1NA}} Pdx+Qdy \\ &= \int_{\overrightarrow{A_1NA}} P\,dx+Qdy+\int_{\overrightarrow{AMA_1}} P\,dx+Qdy \\ &= \int_{\overrightarrow{A_1NAMA_1}} Pdx+Qdy.\end{aligned}$$

因此在計算沿平面閉路的曲綫积分时，可取閉路上任一点作为起点都不会改变积分值。

2. 第二类曲綫积分的計算：設一曲綫 $\widehat{AB}$ 的参数表示式为

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)\quad (t_0\leqslant t\leqslant T).$$

且設 $\widehat{AB}$ 是光滑的，即 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ 在 $[t_0, T]$ 上都有連續导数 $x'(t)$，$y'(t)$，$z'(t)$。設当参数 t 从 t_0 单調地增加到 T 时，曲綫从点 A 按一定方向連續地变到点 B。設函数 $P(x, y, z)$ 定义在曲綫 $\widehat{AB}$ 上，且設它在 $\widehat{AB}$ 上連續。在这些假設下，我們来証明：$P(x, y, z)\,dx$ 沿 $\widehat{AB}$ 的第二类曲綫积分 $\int_{(\widehat{AB})} P(x, y, z)\,dx$ 存在，且有

$$\int_{(\widehat{AB})} P(x, y, z)\,dx=\int_{t_0}^{T} P[x(t),\ y(t),\ z(t)]x'(t)\,dt. \qquad (*)$$

(*)式右端是一个定积分，根据所設条件它是存在的。这个式子显示出將曲綫积分化为定积分来計算。应注意的是：(*)式右端的定积分的下限与上限必須分别与左端曲綫积分所沿的曲綫的起点与終点对应，也就是說，当 $t=t_0$ 时所对应的点为 A 点，而当 $t=T$ 时所对应的点为 B 点。同时，它也說明了曲綫积分的計算法則：將被积函数中的自变量 x, y, z 分別用曲綫的参数式 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ 代替，而把 x 作为参数 t 的函数用 $x'(t)\,dt$ 代替 dx，这样就把曲綫积分化成对参数 t 的定积分。

现在来証明(*)式。在 $\widehat{AB}$ 上从点 A 到点 B 任意地順次插入 $(n-1)$ 个分点 A_i $(i=1, 2, \cdots, n-1)$，这样就把 $\widehat{AB}$ 分为 n 个弧段 $\widehat{A_iA_{i+1}}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，此处认为点 A_1 即点 A，点 A_{n+1} 即点 B。从假設，在区間 $[t_0, T]$ 中必有唯一值 t_i 与点 A_i 对应，t_0 与点 A 对应，T 与点 B 对应。且与 A_i 对应的值 t_i 必小于与 A_{i+1} 对应的值 t_{i+1}。在每一弧段 $\widehat{A_iA_{i+1}}$ 上任取一点 $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$，且設参数 τ_i 与 P_i 对应，从而显然有 $t_i<\tau_i<t_{i+1}$。設点 A_i 的坐标为 (x_i, y_i, z_i)，且記 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i=x(t_{i+1})-x(t_i)$，$\Delta t_i=t_{i+1}-t_i$。作下和式:

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i.$$

因 $x(t)$ 在 $[t_i, t_{i+1}]$ 上有連續导数 $x'(t)$，根据中值定理，在 (t_i, t_{i+1}) 中至少有一値 τ_i^*，使 $\Delta x_i=x'(\tau_i^*)\Delta t_i$。于是可写

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} P[x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)]x'(\tau_i^*)\Delta t_i,$$

其中 $t_i<\tau_i$，$\tau_i^*<t_{i+1}$。設 $\lambda=\max_i\{\overline{A_iA_{i+1}}\}$，其中 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 为有向綫段 $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 的长度。于是根据第二类曲綫积分的定义，有

$$\begin{aligned}\int_{(\widehat{AB})} P(x, y, z)dx&=\lim_{\lambda\to 0}\sigma\\&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P[x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)]x'(\tau_i^*)\Delta t_i.\end{aligned}$$

但 Δx_i 为 $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 在 x 軸上的射影，記 $\mu=\max_i\{|\Delta x_i|\}$，則当 $\lambda\to 0$ 时，显有 $\mu\to 0$。再記 $\nu=\max_i\{\Delta t_i\}$，因 $x(t)$ 为連續函数，則当 $\nu\to 0$ 时，显有 $\mu\to 0$。于是可写

$$\int_{(\widehat{AB})} P(x, y, z)dx=\lim_{\nu\to 0}\sum_{i=1}^{n} P[x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)]\,x'(\tau_i^*)\Delta t_i.$$

按照第三章 §1 的[注]所叙述的原理，

令 $$I=\sum_{i=1}^{n} P[x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)]x'(\tau_i)\Delta t_i.$$

我們来估計下面差数:

$$I-\sigma=\sum_{i=1}^{n} P[x(\tau_i),y(\tau_i),z(\tau_i)](x'(\tau_i)-x'(\tau_i^*))\Delta t_i.$$

因 $P(x,y,z)$ 在 $\widehat{AB}$ 上連續，故 $P[x(t),y(t),z(t)]$ 在区間 $[t_0,T]$ 上連續。設 M 是它的上界，于是有

$$|I-\sigma|\leqslant M\sum_{i=1}^{n}|x'(\tau_i)-x'(\tau_i^*)|\Delta t_i.$$

由假設，$x'(t)$ 在 $[t_0,T]$ 上連續，故它也一致連續。于是对任意給定的 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$，当 $\nu=\max\{\Delta t_i\}<\delta$ 时，有

$$|x'(\tau_i)-x'(\tau_i^*)|<\varepsilon.$$

从而有
$$|I-\sigma|\leqslant M\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i=M(T-t_0)\varepsilon.$$

由于 ε 的任意性，则有

$$\lim_{\nu\to0}\sum_{i=1}^{n}P[x(\tau_i),y(\tau_i),z(\tau_i)]x'(\tau_i^*)\Delta t_i$$
$$=\lim_{\nu\to0}\sum_{i=1}^{n}P[x(\tau_i),y(\tau_i),z(\tau_i)]x'(\tau_i)\Delta t_i.$$

但上式右端的极限恰为(*)式右端的定积分，且因这个积分确实存在，于是(*)式得証。

如函数 $Q(x,y,z)$ 及 $R(x,y,z)$ 在光滑曲綫 $\widehat{AB}$ 上連續，則相似地有下面两个等式：

$$\int_{(\widehat{AB})}Q(x,y,z)dy=\int_{t_0}^{T}Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t)dt,$$

$$\int_{(\widehat{AB})}R(x,y,z)dz=\int_{t_0}^{T}R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)dt.$$

将以上两个公式和(*)式相加，得到比較一般形式的第二类曲綫积分化为定积分的計算公式：

$$\int_{(\widehat{AB})}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$
$$=\int_{t_0}^{T}\{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t)$$
$$+R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}dt.$$

在上面的一切計算公式中，都必須注意定积分的上、下限的安排必須与曲綫积分所沿的曲綫方向相一致，即下限是对应于起点的参数值，上限是对应于終点的参数值。

同样，在平面情况，設平面光滑曲綫的参数方程为

$$x=x(t),\ y=y(t)\quad (t_0\leqslant t\leqslant T),$$

且設当 t 从 t_0 单調地增加到 T 时，点 (x, y) 从点 A 沿 $\widehat{AB}$ 連續地移动到点 B。那末，也有曲綫积分化为定积分的公式：

$$\int_{(\widehat{AB})} P(x, y)dx+Q(x, y)dy$$
$$=\int_{t_0}^{T}\{P[x(t), y(t)]x'(t)+Q[x(t), y(t)]y'(t)\}dt.$$

如空間曲綫 $\widehat{AB}$ 是由下两式：

$$y=y(x),\ \ z=z(x)\quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

表示的，且設当 x 单調地从 a 增加到 b 时，点 (x, y, z) 从点 A 連續地移动到点 B，則只須 $y(x)$，$z(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續，$P(x, y, z)$ 在 $\widehat{AB}$ 上連續，就有

$$\int_{(\widehat{AB})} P(x, y, z)dx=\int_a^b P[x, y(x), z(x)]dx.$$

在平面曲綫的显式表示的情况也有相似的計算公式。例如，曲綫 $\widehat{AB}$ 的显式方程为

$$y=y(x)\quad (a\leqslant x\leqslant b),$$

且設当 x 单調地从 a 增加到 b 时，点 (x, y) 从点 A 沿 $\widehat{AB}$ 連續地移动到点 B。于是只須 $y(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續，$P(x, y)$ 在曲綫 $\widehat{AB}$ 上連續，則有

$$\int_{(\widehat{AB})} P(x, y)dx=\int_a^b P[x, y(x)]dx.$$

特別地，如空間曲綫 $\widehat{AB}$ 有一段是与 YZ 平面平行的直綫，則在 $\int_{(\widehat{AB})} P(x, y, z)dx$ 中沿这段直綫的积分必等于零。因这时所述

直綫段必与 x 軸垂直，从而它在 x 軸上的射影必等于零，亦即对应这直綫段的一切 Δx_i 都等于零，从而在和式 σ 中的对应部分也等于零。在平面情况，若曲綫 $\widehat{AB}$ 有一段是与 y 軸平行的直綫，则在 $\int_{(\widehat{AB})}P(x, y)\,dx$ 中沿这段直綫的积分必等于零。若它有一段是与 x 軸平行的直綫，则在 $\int_{(\widehat{AB})}Q(x, y)\,dy$ 中沿这段直綫的积分必等于零。

如果曲綫 $\widehat{AB}$ 是分段光滑的，也就是它由有限条光滑弧連結而成的，則沿 $\widehat{AB}$ 的曲綫积分（設它存在的話）等于沿每一光滑弧的曲綫积分之和，这里自然要求沿每一光滑弧所取的方向与沿整个曲綫 $\widehat{AB}$ 的方向一致。这是因为曲綫积分旣可化为定积分来計算，而在整个区間上的定积分等于有限个部分区間上的积分之和。

[例 1] 計算曲綫积分：

$$I=\int_{(C)}(x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy,$$

其中 C 为曲綫 $y=1-|1-x|$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$，且設从原点經过点 $P(1,1)$ 到点 $B(2,0)$ 是积分所沿的方向（图 3-6-45）。

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$y=1-|1-x|=x$，

当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，

$y=2-x$。

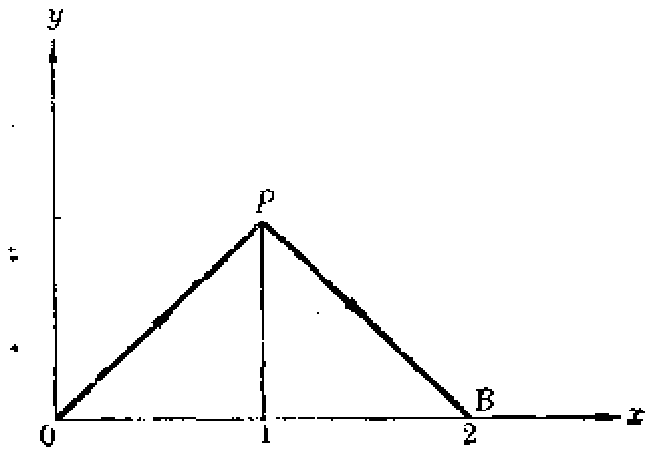


图 3-6-45

于是应用計算公式，則有

$$I=\left(\int_{(\overline{OP})}+\int_{(\overline{PB})}\right)(x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy=\int_0^1 2x^2dx+O\cdot dx$$

$$+\int_1^2[x^2+(2-x)^2]dx+[x^2-(2-x)^2](-dx)=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}.$$

［例 2］ 計算曲綫积分：

$$I=\int_{(C)}(2a-y)dx+xdy,$$

其中 C 为旋輪綫：$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$　$(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，且設参数 t 增加的方向为积分沿 C 的方向。

应用关于参数曲綫的积分的計算公式，有

$$I=\int_0^{2\pi}\{(2a-a+a\cos t)a(1-\cos t)+a(t-\sin t)a\sin t\}dt$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}t\sin t\,dt=-2\pi a^2.$$

［例 3］ 計算沿有向閉路 $\overrightarrow{ABCDA}$（图 3-6-46）的下积分：

$$I=\int_{(ABCDA)}(x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy.$$

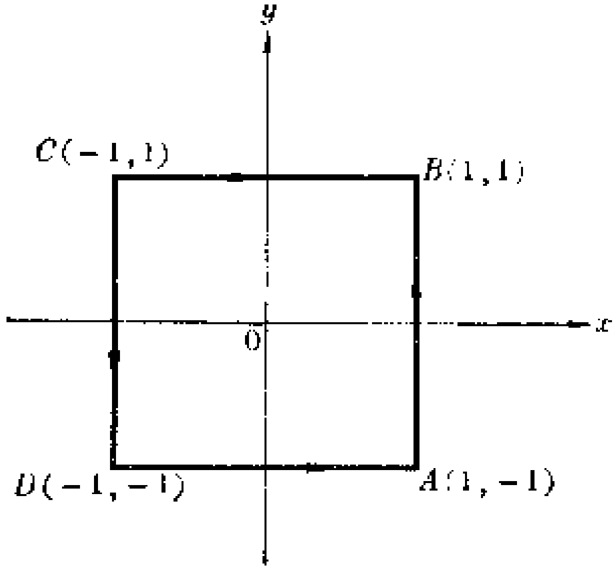


图 3-6-46

我們可写

$$I=\left(\int_{(\overline{AB})}+\int_{(\overline{BC})}+\int_{(\overline{CD})}+\int_{(\overline{DA})}\right)(x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy.$$

但沿 $\overrightarrow{AB}$，$x=1$，故 $\int_{(\overline{AB})}(x^2-2xy)dx=0$。同样，有

$$\int_{(\overline{BC})}(y^2-2xy)\,dy=\int_{(\overline{CD})}(x^2-2xy)\,dx=\int_{(\overline{DA})}(y^2-2xy)dy=0.$$

于是有

$$I=\int_{-1}^{1}(y^2-2y)\,dy+\int_{1}^{-1}(x^2-2x)\,dx+\int_{1}^{-1}(y^2+2y)\,dy$$
$$+\int_{-1}^{1}(x^2+2x)\,dx=-\int_{-1}^{1}4y\,dy+\int_{-1}^{1}4x\,dx=0.$$

[例 4] 計算积分：

$$I=\int_{(C)}\frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2},$$

其中 C 为圓周 $x^2+y^2=a^2$.

将圓周方程写作参数形式：

$$x=a\cos t,\ y=a\sin t\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

由于是閉路，不妨取圓周与正向 x 軸的交点 $A(1,0)$ 作为起点。題中未說明积分所沿方向，因此总认为是正向的，也就是点 A 依反时針方向环行一周回到点 A，从而参数 t 必須从 0 单調地增加至 2π，于是有

$$I=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}\{a(\cos t+\sin t)(-a\sin t)-a(\cos t-\sin t)a\cos t\}dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\{(\cos t+\sin t)(-\sin t)-(\cos t-\sin t)\cos t\}dt=-2\pi.$$

3. 用第二类曲綫积分計算平面图形的面积：现在考察平面图形 (D)，它的边緣 L 是由一条連續閉曲綫所成，且設任何与 y 軸平行的直綫与 L 至多有两个交点(图 3-6-47)。設 (D) 完全界于两直綫 $x=a$ 与 $x=b$ 之間。設曲綫 $\widehat{ADB}$ 的方程为 $y=y_0(x)$，曲綫 $\widehat{ACB}$ 的方程

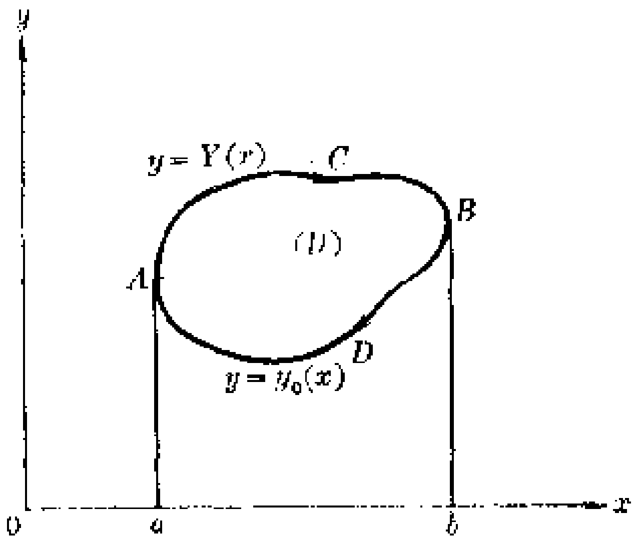


图 3-6-47

为 $y=Y(x)$。設 S 为 (D) 的面积，于是 S 可看作两个曲边梯形 $aACBb$ 与 $aADBb$ 的面积之差，即

$$S=\int_a^b Y(x)\,dx-\int_a^b y_0(x)\,dx,$$

根据連續曲綫的假設，上式右端的两个积分都存在。由曲綫积分的計算公式，显有

$$\int_{(\widehat{ADB})} y\,dx=\int_a^b y_0(x)\,dx,$$

$$\int_{(\widehat{ACB})} y\,dx=\int_a^b Y(x)\,dx.$$

故有

$$S=\int_{(\widehat{ACB})} y\,dx+\int_{(\widehat{BDA})} y\,dx=\int_{(\widehat{ACBDA})} y\,dx.$$

但 $\widehat{ACBDA}$ 是順时針方向环行一周的曲綫。如果用 $\int_{(L)} y\,dx$ 表示 $y\,dx$ 沿 L 的正向的曲綫积分，則有

$$S=\int_{(\widehat{ACBDA})} y\,dx=-\int_{(L)} y\,dx.$$

这样就可将面积 S 用沿它的边緣 L 的曲綫积分表示。

上述任何平行于 y 軸的直綫与 L 至多有二交点的假設，不是本质的。实际上，如果 (D) 是一个比較复杂的图形（图 3-6-48），我們可引适当輔助綫将图形分成若干个部分图形 (D_i)，使每一图形 (D_i) 的边緣 L_i 都与平行于 y 軸的直綫至多有两个交点，这总是可能的。設 (D_i) 的面积为 S_i，則每一个 S_i 可按照剛才建立的公式求得。将这些 S_i

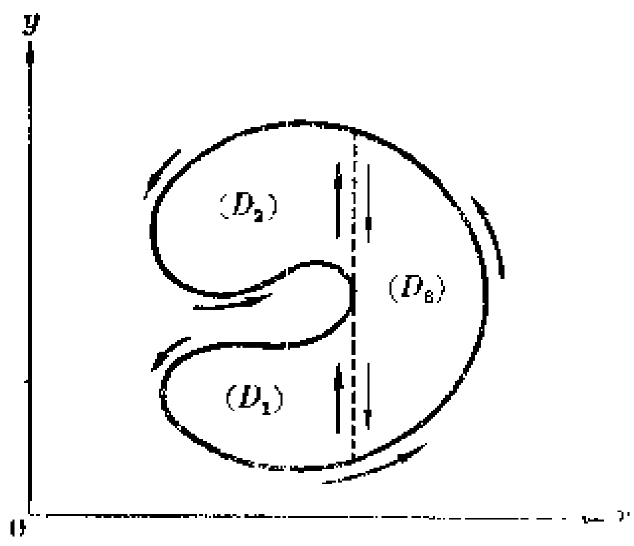


图　3-6-48

相加，則得到(D)的面积S。于是有

$$S=\sum_i S_i=\sum_i\left(-\int_{(L_i)} ydx\right).$$

但沿每一輔助綫必进行积分两次而方向相反，因之在上和中沿每一輔助綫的积分消去，結果仍是沿(D)的边緣L的积分，故公式仍成立。

同样，如設图形(D)的边緣L与任何平行于x軸的直綫至多有二交点(图3-6-49)。再設曲綫$\widehat{CBD}$的方程为$x=X(y)$，曲綫$\widehat{CAD}$的方程为$x=x_0(y)$，且$c\leqslant y\leqslant d$。用上述相似推理，可得

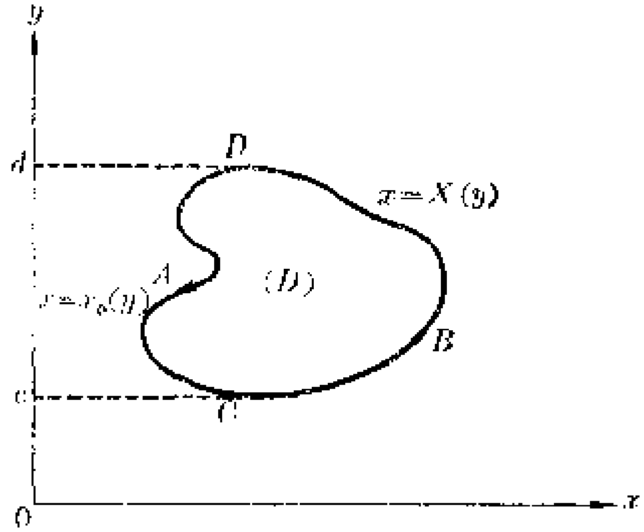


图 3-6-49

$$S=\int_c^d X(y)dy-\int_c^d x_0(y)dy=\int_{(L)} xdy.$$

将它和前一公式相加，可得到表示面积的另一公式：

$$S=\frac{1}{2}\int_{(L)} xdy-ydx.$$

如閉曲綫L由参数方程$x=x(t)$，$y=y(t)$ $(t_0\leqslant t\leqslant T)$表示，且$x(t_0)=x(T)$，$y(t_0)=y(T)$，此外，$x(t)$，$y(t)$有連續导数$x'(t)$，$y'(t)$。設当$t$单調地从$t_0$增加到$T$时，点$(x,y)$沿$L$按正向环行一周回到原来位置。于是根据上节的曲綫积分的計算公式，由閉曲綫L所圍的图形的面积S为：

$$S=-\int_{(L)} ydx=-\int_{t_0}^{T} y(t)x'(t)dt$$

或

$$S=\int_{(L)} xdy=\int_{t_0}^{T} x(t)y'(t)dt$$

或　$S=\frac{1}{2}\int_{(L)} xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[x(t)y'(t)-y(t)x'(t)]dt.$

［例 5］ 用曲綫积分計算椭圓

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

所圍的面积 S. 由上述，則

$$S=-\int_{(L)} ydx,$$

其中 L 表椭圓。不妨取椭圓与正向 x 軸的交点 $A(a,0)$ 为起点。为了使点 A 沿椭圓按正向环行一周，必須令 t 从 0 单調地增加到 2π. 于是有

$$S=-\int_0^{2\pi} b\sin t(-a\sin t)dt=ab\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt=\pi ab.$$

4. 两类曲綫积分的联系：第一类与第二类曲綫积分根据它們的定义是全然不同的。然而由于它們都是沿曲綫的积分，两者之間又有密切关系。我們可以将一个第二类曲綫积分化为第一类曲綫积分，反之也一样。現在就来討論这两类积分的轉換关系。設一空間光滑曲綫 $\widehat{AB}$，取弧长 $s=\widehat{AM}$作为参数（M 为 $\widehat{AB}$ 上任一点），于是 $\widehat{AB}$ 的参数方程可設为

$$x=x(s),\ y=y(s),\ z=z(s)\quad (0\leqslant s\leqslant l).$$

这里 l 表示 $\widehat{AB}$ 的全长，且 $x(s),y(s),z(s)$ 在$[0,l]$上都有連續导数。取 s 从 0 单調地增加至 l 的方向为曲綫的正向，且在曲綫上每一点的切綫的正向取作与曲綫的正向一致。設以(t,x)，(t,y)，(t,z) 分別表示正向切綫 t 与三个正向坐标軸的夹角。如所周知，有

$$x'(s)=\cos(t,x),\ y'(s)=\cos(t,y),\ z'(s)=\cos(t,z).$$

設 $P(x,y,z)$ 为定义在曲綫 $\widehat{AB}$ 上的連續函数，則根据第二类曲綫积分的計算公式，有

$$\int_{(\widehat{AB})} P(x, y, z)dx = \int_0^l P[x(s), y(s), z(s)]x'(s)ds$$
$$= \int_0^l P[x(s), y(s), z(s)] \cos(t, x)ds.$$

回忆一下第一类曲綫积分化为定积分的法則，且注意这里 s 就取作参数 t，于是上面等式右端的定积分就等于一个第一类曲綫积分 $\int_{(\widehat{AB})} P(x, y, z)\cos(t, x)ds$，从而最后得到两类曲綫积分的联系公式：

$$\int_{(\widehat{AB})} P(x, y, z)dx = \int_{(\widehat{AB})} P(x, y, z)\cos(t, x)ds.$$

設 $Q(x, y, z)$ 及 $R(x, y, z)$ 也都是定义在 $\widehat{AB}$ 上的連續函数。完全与上面相似，可得

$$\int_{(\widehat{AB})} Q(x, y, z)dy = \int_{(\widehat{AB})} Q(x, y, z)\cos(t, y)ds,$$
$$\int_{(\widehat{AB})} R(x, y, z)dz = \int_{(\widehat{AB})} R(x, y, z)\cos(t, z)ds.$$

将上面三个公式相加，則有更一般的联系公式：

$$\int_{(\widehat{AB})} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$
$$= \int_{(\widehat{AB})} \{P(x, y, z)\cos(t, x) + Q(x, y, z)\cos(t, y)$$
$$+ R(x, y, z)\cos(t, z)\}ds.$$

注意在上面这些公式中都假定切綫 t 的正向与曲綫的正向是一致的，也就是弧长参数 s 增加的方向。如将曲綫的方向改变，卽取弧长减少的方向作为正向，則不仅左端的第二类积分要改变符号，同时右端的第一类曲綫积分的符号也应改变，这是因为切綫的正向也变为弧长减少的方向，于是角 (t, x)，(t, y)，(t, z) 都要改变 $\pm\pi$，从而它們的余弦都要改变符号。因此上面这些公式不論曲綫的正向取得怎样总是成立的。

在平面的情况也有相似公式:

$$\int_{(\widehat{AB})} P(x, y)dx+Q(x, y)dy$$
$$=\int_{(\widehat{AB})}[P(x, y)\cos(t, x)+Q(x, y)\cos(t, y)]ds.$$

这里取切綫 t 的正向为弧长 s 增加的方向,而 (t, x) 及 (t, y) 分别为正向切綫与二正向坐标軸的夹角。記 $(t, x)=\alpha$, 則 $(t, y)=\frac{\pi}{2}-\alpha$, 故 $\cos(t, y)=\sin\alpha$, 于是上式也可写为

$$\int_{(\widehat{AB})} P(x, y)dx+Q(x, y)dy$$
$$=\int_{(\widehat{AB})}[P(x, y)\cos\alpha+Q(x, y)\sin\alpha]ds,$$

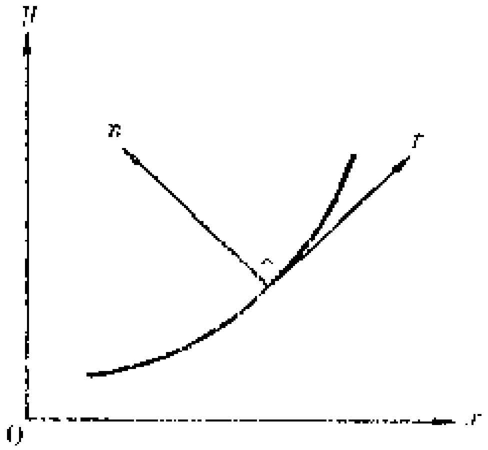


图 3-6-50

其中 α 是正向切綫与正向 x 軸的夹角。

若用曲綫的法綫与坐标軸的夹角来表示,并規定 $[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}]$ 的关系和 $[x, y]$ 的关系一致(图 3-6-50),則

$$\cos(t, x)=\cos(n, y),$$
$$\cos(t, y)=-\cos(n, x),$$

故有

$$\int_{(\widehat{AB})} P(x, y)dx+Q(x, y)dy$$
$$=\int_{(\widehat{AB})}\{P(x, y)\cos(n, y)-Q(x, y)\cos(n, x)\}ds.$$

二、第二类曲面积分

这一节将討論一种特殊类型的曲面积分,即所謂第二类曲面积分。它与第一类曲面积分不同之处在于它牵涉到曲面的定側問題。因此,我們首先闡明曲面的側的概念。

1. 曲面的側的概念: 考察一个閉或非閉的光滑曲面 (S). 如

(S)是非閉的，則它的边緣是由逐段光滑曲綫 L 所构成。因(S)是光滑的，故在(S)上沒有奇点，也就是在(S)上每一点都有确定的切平面，且切平面的位置随切点的位置而連續地变动。在(S)上取一定点 M_0，并作点 M_0 的法綫。这法綫有两个可能方向，我們认定其一作为从 M_0 点的出发方向。設一动点 M 从 M_0 点出发沿完全落在曲面上任何一条連續閉路(Γ)运动再回到点 M_0，如(S)是非閉的，还假設(Γ)不越过边緣 L。于是在閉路(Γ)上每一点 M 都有一法綫，并設这法綫的方向是从点 M_0 的出发方向連續移动得来的。当点 M 回到点 M_0 时所得到的法綫方向可能与出发方向相同，也可能与出发方向相反。如果是前一情况，則称曲面(S)是双側的。若曲面(S)上存在这样一条閉曲綫，当动点回到原位置时得到与出发时相反的法綫方向，則称(S)为单側的。

在实际生活中經常碰到的都是双側曲面。至于单側曲面也是存在的，所謂牟彼烏斯带就是这类曲面的一个典型例子。将长方形紙条 $ABCD$ 先扭轉一次，然后使 B 与 D 及 A 与 C 粘合起来(图3-6-51)，則构成一个非閉的环带。假如用一种顏色涂这个环带，則可以不越过边緣而涂遍它的全部。对任何双側曲面是不会有这現象发生的。我們今后只討論双側曲面，故除特别說明外，所謂曲面都是指双側的。

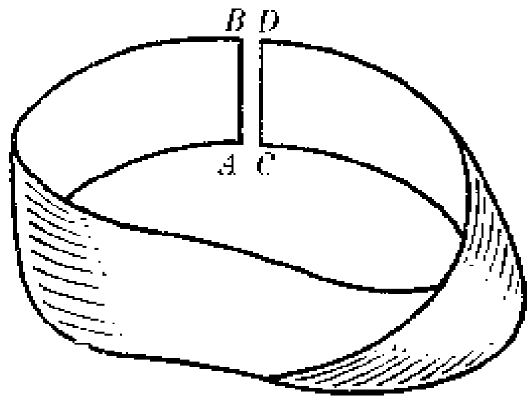


图 3-6-51

設(S)是一双側曲面。如果在(S)上任一点 M_0 的法綫选定了一个确定方向，則(S)上其他任何点 M_1 处的法綫也有了确定的方向，而且点 M_1 的法綫方向是由点 M_0 选定的法綫方向完全决定的。換句話說，在双側曲面上只要选定了一点的法綫方向，則曲

面上全部点的法綫方向也随之而定，也就是选定了曲面的一側。若原先选定的法綫方向改变，則在其他点处的法綫方向也一律改变，这样就确定了曲面的另一側。所以对双側曲面要确定它的一側，只要在它上面任一点选定一法綫方向就行了。

以上从几何意义来說明曲面的側的概念。現在从分析观点来进一步闡明。設一光滑曲面(S)可用显方程

$$z=z(x,\ y)$$

表示，其中$z(x,y)$是在XY平面上某一区域(D)内单值連續函数，且在(D)内有連續偏导数$p=\frac{\partial z}{\partial x}$，$q=\frac{\partial z}{\partial y}$。这样曲面在每一点都有切平面，从而在每一点都有确定的法綫。前已見过，曲面(S)的法綫方向余弦有表达式：

$$\cos\lambda=\frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \cos\mu=\frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\cos\nu=\frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}. \qquad (*)$$

从假設，方向余弦是点的坐标$(x,\ y,\ z)$的連續函数，从而曲面上的法綫方向是随点的位置而連續移动的。如在根式前选取了一个符号，就等于在曲面上全部点确定了法綫方向。因此，根式前符号的选擇恰好确定了曲面的一側。例如，若选取正号，則$\cos\nu>0$，卽法綫与正向z軸的夹角ν为銳角，今后把这样确定的一側称为上側。若选取負号，則所确定的一側叫作下側，在下側上，法綫与正向z軸的夹角ν为鈍角。上面所說的用显方程$z=z(x,\ y)$表示的曲面是双側曲面的最簡單也最重要的例子。例如，半球面及半橢面等都属于这一类。

現在考虑更一般的用参数方程：

$$x=x(u,\ v),\ y=y(u,\ v),\ z=z(u,\ v)$$

表示的非閉的光滑曲面(S)，且設u,v在UV平面上某一有界区域

(Ω) 内变化。这里設 $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ 都在 (Ω) 内連續，且有連續偏导数。此外，設 (S) 上沒有重点，也就是对曲面上任一点 (x, y, z) 只能从 (Ω) 内唯一的一对値 u, v 由上述参数方程給出，換句話說，(Ω) 与 (S) 的点是一一对应的。于是曲面的法綫方向余弦用下公式表之:

$$\cos\lambda=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\mu=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\nu=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

其中 $A=y'_u z'_v-z'_u y'_v$, $B=z'_u x'_v-x'_u z'_v$, $C=x'_u y'_v-y'_u x'_v$。还要假設 (S) 上无奇点，即 A, B, C 在任一点不同时为零。注意 $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ 都是在 (Ω) 内連續函数，从而法綫方向随点的位置連續移动，因此和上面情况一样，根式前符号的选擇就确定了曲面的一側，故 (S) 也是一个双側曲面。

以上所談的都是非閉的双側曲面。如 (S) 是一个閉的且无奇点的光滑曲面，它有两側是很明显的，通常分两側为**外側**和**內側**，即 (S) 向着所圍立体的一側为內側，而另一側为外側。例如，若球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$，它的外側对上半球面 $(z>0)$ 是上側而对下半球面是下側，它的內側对上半球面是下側而对下半球面是上側。

現在我們来說明，一个无重点的非閉曲面的側也可以选擇它的边緣 (L) 的正向来确定。因为如果把所选擇的 (L) 的正向和曲面上的法綫方向用右手定向規則衔接起来，亦即假想一观測者与法綫同向地站着，如果他沿 (L) 的正向环行一周使与他緊接的曲面部分总是在他的左方，則当 (L) 的正向确定后，曲面上的法綫方向也就确定了，从而确定了曲面的一側。若改变了 (L) 的正向，法綫方向也随之改变，从而曲面的側也改变。若改用左手定向規則，

則对于原先选擇的(L)的正向，确定出曲面的另一側。反之，如果选定了法綫方向，也就是选定了曲面的一側，那么依照右手定向規則，也可确定(L)的正向。若改变原先选定的法綫方向，也就是改变了曲面的側，从而也改变了(L)的正向。对于曲面上圍着某一部分的一条簡单閉曲綫(γ)，它的正向也可由这同一个規則同时建立起来，但只有当(γ)的正向确定了以后，才能把(γ)算作圍着曲面的某一部分的边緣，因对于毗連部分来說，(γ)的正向不合右手定向規則，从而(γ)不能作为这毗連部分的边緣。从上面看来，如果确定了曲面的側，則曲面上任何閉曲綫的正向也就确定了，我們把这情况叫做曲面的定向。反之，如果选定了曲面的定向，也就是选定了它的边緣的两种可能环行方向之一作为正向，則按右手定向規則，曲面上的法綫方向也确定了，从而确定了曲面的一側。总之，曲面的定側和定向是同一件事情，如果側选定了，則向也就确定了。反之亦然。作为例子，如一个光滑曲面由显方程$z=z(x, y)$表达，則它的法綫方向余弦由公式(*)給出。如在(*)中的根式前选正号，也就是选定了曲面的上側，則法綫与正向z軸的夹角ν为銳角，故法綫方向应該是向上的。根据右手定向規則，必須取反时針方向为它的边緣(L)的正向。如在根式前取負号，則必須取順时針方向为(L)的正向。

2．第二类曲面积分的定义：首先，考察由显方程

$$z=z(x, y)$$

表示的无重点的光滑曲面(S)，并設(S)在XY平面上的投影为边界由逐段光滑曲綫(Γ)所圍成的区域(σ_{xy})。設选定了曲面的一側，从而也确定了它的定向。如选取上側，則沿曲面上任何閉曲綫环行时取反时針方向为正向。如选取下側，則有相反方向。

現在將有向曲面(S)以任何方法分割为n小块$S_i\ (i=1,2,\cdots,n)$。設G_i为S_i在XY平面上的投影，从而也得到区域(σ_{xy})的一

个相应分割。如果取的是上侧，则曲面的定向与 XY 平面的定向一致，这时所有 G_i 算作正的。如取下侧，则曲面的定向与 XY 平面的定向相反，这时所有 G_i 算作负的。設有界函数 $f(x, y, z)$ 定义在 (S) 上，在每一小块 S_i 內任取一点 $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$，作下和式：

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) D_i,$$

其中 D_i 表示 G_i 的面积，由上所述 D_i 是带有符号的，它們的符号是由所选曲面的側来决定的。設 d_i 为 S_i 的直徑，且記 $\lambda=\max_i\{d_i\}$。若当 $\lambda\to 0$ 时，σ 有确定极限 I，且 I 与曲面分割的方法无关，也与点 P_i 的选擇无关，則称 I 为 $f(x, y, z)\,dx\,dy$ 沿曲面 (S) 的选定的一側上的第二类曲面积分，記为

$$I=\iint_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dy$$

若将 S_i 射影到 YZ 平面上或 ZX 平面上，可得到类似的两个第二类曲面积分：

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\,dy\,dz \text{ 或 } \iint_{(S)} f(x, y, z)\,dz\,dx.$$

有时也遇到几个形状的积分連在一起：

$$\iint_{(S)} P(x, y, z)\,dy\,dz+Q(x, y, z)\,dz\,dx+R(x, y, z)\,dx\,dy,$$

其中 $P(x, y, z)$，$Q(x, y, z)$，$R(x, y, z)$ 都是定义在曲面 (S) 上的有界函数。但这些記号都沒有标明选定的是那一側，因此，在积分中都要附带說明沿曲面的某一側积分。

这里要注意的是：如果沿曲面的另一側积分，則所得的值应当变号，这是因为和 σ 中每一面积 D_i 都变号，从而 σ 本身也变号。因此第二类曲面积分与曲面的定側或定向有关，如果改变定側或定向，則积分值也改变符号。回忆一下第一类曲面积分的定义，它

在和 σ 中以 S_i 的面积代替 D_i，因此不論曲面的定側或定向怎样，S_i 的面积总是不变的，从而第一类曲面积分的值与曲面的定側或定向无关。

特別地，如某一 S_i 落在母綫平行于 z 軸的柱面上，則这 S_i 在 XY 平面上的投影成为一条綫，从而相应的面积 D_i 为零。如整个曲面 (S) 是母綫平行于 z 軸某一柱面的一部分，則 (S) 上各小块面 S_i 在 XY 平面上的投影都为零，故每一 D_i 都等于零，从而和 $\sigma=0$。在这情况，必有

$$\iint_{(S)} f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy=0.$$

上面考察了用显方程 $z=z(x,\ y)$ 表示的曲面的情况。这情况的特点就是和 σ 中的所有 D_i 都同号，如取上側，則它們为正，取下側則为負。在一般形状的閉或非閉的双側曲面，沿它的选定的一側的第二类曲面积分也可以相似地建立起来，不过这时所有 D_i 不一定同符号，它們为正或負决定于 S_i 是正向或負向（图 3-6-52）。

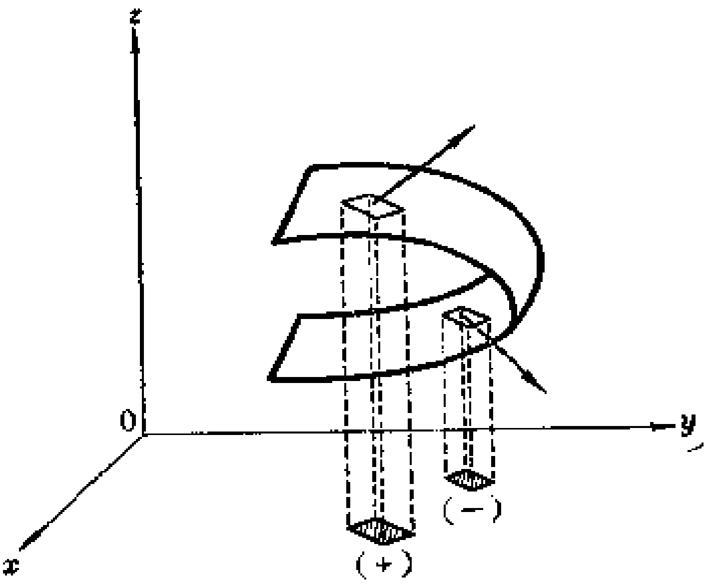


图　3-6-52

3．两类曲面积分的联系及第二类曲面积分的計算：上面已

經指出两类曲面积分从定义出发是全然不同的，然而它們也有密切关系，我們可以将一个第二类曲面积分化为第一类曲面积分，反之也一样。仍然从用显方程 $z=z(x, y)$ 表示的曲面来說明。設选定上側，即一切 $D_i>0$. 按曲面面积公式，有

$$S_i=\iint\limits_{(G_i)}\frac{dx\,dy}{\cos\nu}\quad(\text{这里以同一字母 } S_i \text{ 表示小块 } S_i \text{ 的面积}),$$

其中 ν 是曲面 S 的法綫与正向 z 軸的夹角，ν 自然是銳角。因 $\cos\nu$ 在閉域 G_i 上連續，应用中值定理，在 G_i 内从而在 S_i 上至少有一点，使这点的法綫与正向 z 軸的夹角 ν_i^* 滿足等式：

$$S_i=\frac{D_i}{\cos\nu_i^*}\quad\text{或}\quad D_i=S_i\cos\nu_i^*.$$

将 D_i 代入和 σ 中，得

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)\cos\nu_i^*S_i,$$

現在作下和：

$$I=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)\cos\nu_iS_i,$$

其中 ν_i 是点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 处的法綫与正向 z 軸的夹角。記 S_i 的直徑 d_i 的最大值为 λ，根据第一类曲面积分的定义，有

$$\iint\limits_{(S)}f(x,\ y,\ z)\cos\nu dS=\lim_{\lambda\to0}I=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)\cos\nu_iS_i.$$

我們来估計差式：

$$\begin{aligned}|\sigma-I|&\leqslant\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)|\,|\cos\nu_i^*-\cos\nu_i|S_i\\&\leqslant M\sum_{i=1}^{n}|\cos\nu_i^*-\cos\nu_i|S_i,\end{aligned}$$

其中 M 为 $f(x, y, z)$ 的上界。因 $\cos\nu=\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$，由曲面的光滑性，$\cos\nu$ 在 (S) 的投影区域 (σ_{xy}) 上連續，从而它在 (σ_{xy}) 上也

一致連續。即对 $\varepsilon>0$，必有 $\delta>0$，可将 (σ_{xy}) 从而可将 (S) 分割为足够小面积的小块 S_i，使当 $\lambda<\delta$ 时，有

$$|\cos\nu_i^*-\cos\nu_i|<\varepsilon,$$

于是有

$$|\sigma-I|\leqslant MS\varepsilon\ \text{（这里用同一字母 } S \text{ 表示}(S)\text{的面积）}.$$

由于 ε 的任意性，故有

$$\lim_{\lambda\to0}\sigma=\lim_{\lambda\to0}I.$$

右端的极限为 $\iint\limits_{(S)}f(x,y,z)\cos\nu\,dS$，而左端的极限为 $\iint\limits_{(S)}f(x,y,z)\,dx\,dy$，故得

$$\iint\limits_{(S)}f(x,y,z)\,dx\,dy=\iint\limits_{(S)}f(x,y,z)\cos\nu\,dS.$$

如果設 $f(x,y,z)$ 在 (S) 上連續，則右端的积分存在，从而左端的积分也存在且两者相等。这个公式就表达出两类曲面积分的相互关系。这里要注意的是：如原先选取的是曲面的下侧，则左端的积分值应变号，但这时因 ν 为鈍角，故 $\cos\nu$ 也改变符号，而右端的积分也应变号。因之，公式之成立与曲面的侧的选取无关。

相似情况，也有下公式：

$$\left.\begin{aligned}\iint\limits_{(S)}f(x,y,z)\,dy\,dz&=\iint\limits_{(S)}f(x,y,z)\cos\lambda\,dS,\\ \iint\limits_{(S)}f(x,y,z)\,dz\,dx&=\iint\limits_{(S)}f(x,y,z)\cos\mu\,dS,\end{aligned}\right\}$$

其中 λ 及 μ 分别为 (S) 上法綫与正向 x 軸及正向 y 軸的夹角。有时也遇到三种混合公式：

$$\iint\limits_{(S)}\{P(x,y,z)\,dy\,dz+Q(x,y,z)\,dz\,dx+R(x,y,z)\,dx\,dy\}$$
$$=\iint\limits_{(S)}\{P(x,y,z)\cos\lambda+Q(x,y,z)\cos\mu+R(x,y,z)\cos\nu\}\,dS.$$

現在討論第二类曲面积分的計算法則。还是从用显方程 $z=z(x, y)$ 表示的光滑曲面 (S) 出发，其中 (x, y) 属于 (S) 在 XY 平面上的投影区域 (σ_{xy})。設积分是沿上側取的，則 S_i 的投影面积 D_i 都是正的。因点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 在 (S) 上，故 $\zeta_i=z(\xi_i, \eta_i)$，于是有

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f[\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)] D_i,$$

从而 σ 就变为下面二重积分

$$\iint_{(\sigma_{xy})} f(x, y, z(x, y)) dx\, dy$$

的积分和。設 (G_i) 是 (S_i) 在 xy 平面上的投影，且設 μ 是 (G_i) 的最大直徑，則当 $\lambda\to 0$ 时，μ 也趋于零，从而有

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, dx\, dy=\iint_{(\sigma_{xy})} f(x, y, z(x, y))\, dx\, dy.$$

这样就将沿曲面 (S) 上側的积分化为 (S) 在 xy 平面上的投影区域 (σ_{xy}) 的二重积分，这二重积分的被积函数是由 $f(x, y, z)$ 中以 z 代为曲面方程中的函数 $z(x, y)$ 得来的。如 $f(x, y, z)$ 在 (S) 上連續，則 $f(x, y, z(x, y))$ 在 (σ_{xy}) 上連續，从而上式右端的二重积分存在，这时左端的曲面积分也存在且两者相等。

若取曲面的下側，則曲面积分变号，故有

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, dx\, dy=-\iint_{(\sigma_{xy})} f(x, y, z(x, y))\, dx\, dy.$$

同样，也有相似公式：

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, dy\, dz=\pm\iint_{(\sigma_{yz})} f(x(y, z), y, z)\, dy\, dz,$$

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, dz\, dx=\pm\iint_{(\sigma_{zx})} f(x, y(x, z), z)\, dz\, dx.$$

这两个公式中，右端正負号的选取与上面所叙述的相同，例如第一个公式，此时曲面 (S) 的显式表示为 $x=x(y, z)$，曲面对 x 軸而言，

若取为前側，則在公式中取正号，相反的情形則取負号。

如果曲面(S)由参数方程$x=x(u, v)$，$y=y(u, v)$，$z=z(u, v)$表示，也可将第二类曲面积分化为二重积分計算。因为

$$\cos\nu=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$dS=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv.$$

将这两个表示式代入两类曲面积分的联系公式

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dy=\iint_{(S)} f(x, y, z)\cos\nu\,dS,$$

于是有

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dy=\pm\iint_{(\Omega)} f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]C\,du\,dv,$$

其中(Ω)为UV平面上u, v的变化区域。这里自然設光滑曲面(S)上沒有重点与奇点，且設$x(u, v)$，$y(u, v)$，$z(u, v)$都在(Ω)内連續且有連續偏导数。正負符号对应于曲面(S)的两个側。特別地，如果UV平面的正向对应于曲面(S)所选定的一側相关的正向，則应取正号。同样，也有相似公式：

$$\left.\begin{aligned}
&\iint_{(S)} f(x, y, z)\,dy\,dz\\
&\qquad=\pm\iint_{(\Omega)} f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]A\,du\,dv,\\
&\iint_{(S)} f(x, y, z)\,dz\,dx\\
&\qquad=\pm\iint_{(\Omega)} f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]B\,du\,dv.
\end{aligned}\right\}\quad(*)$$

以上所得結果都可推广到更一般情况，即曲面(S)为一片一片的有限个光滑曲面所合成，这时沿曲面(S)的积分即等于沿这有限个光滑曲面的积分之和，这是因为曲面积分既可化为二重积分来計算，而沿整个区域的二重积分等于沿組成这区域的各个部分

区域的二重积分之和。

[例 6] 計算 $I=\iint\limits_{(S)}(x+1)\,dy\,dz+y\,dz\,dx+dx\,dy$，$S$ 是四面体 $OABC$ 所成的曲面(图 3-6-53)，且設积分是沿曲面的外側而取的。显然有

$$I=\left\{\iint\limits_{(OAB)}+\iint\limits_{(OBC)}+\iint\limits_{(OCA)}+\iint\limits_{(ABC)}\right\}(x+1)\,dy\,dz+y\,dz\,dx+dx\,dy.$$

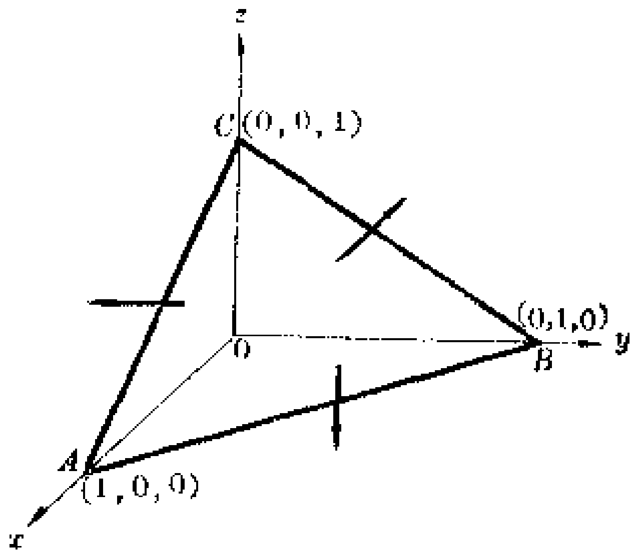


图 3-6-53

$$\iint\limits_{(OAB)}(x+1)\,dy\,dz+y\,dz\,dx+dx\,dy$$

$$=\iint\limits_{(OAB)}dx\,dy=-\iint\limits_{(\sigma_{xy})}dx\,dy=-\frac{1}{2},$$

$$\iint\limits_{(OBC)}(x+1)\,dy\,dz+y\,dz\,dx+dx\,dy$$

$$=\iint\limits_{(OBC)}(x+1)\,dy\,dz=-\iint\limits_{(\sigma_{yz})}dy\,dz=-\frac{1}{2}\quad(\text{因 } x=0),$$

$$\iint\limits_{(OAC)}(x+1)\,dy\,dz+y\,dz\,dx+dx\,dy$$

$$=\iint\limits_{(OAC)}y\,dz\,dx=0\quad(\text{因 } y=0).$$

$$\iint_{(ABC)}(x+1)\,dy\,dz=\iint_{(\sigma_{yz})}(2-y-z)\,dy\,dz$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^{1-y}(2-y-z)\,dz=\frac{2}{3},$$

$$\iint_{(ABC)}y\,dz\,dx=\iint_{(\sigma_{zx})}(1-x-z)\,dz\,dx$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-z)\,dz=\frac{1}{6},$$

$$\iint_{(ABC)}dx\,dy=\iint_{(\sigma_{xy})}dx\,dy=\frac{1}{2}.$$

故得

$$I=\frac{-1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)+0+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

[例 7]　計算 $I=\iint_{(S)}x^2dy\,dz+y^2dz\,dx+z^2dx\,dy$，其中 S 是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$，且設积分是沿球面外側而取的。

現在計算

$$I_3=\iint_{(S)}z^2dx\,dy=\iint_{(S_2)}z^2\,dx\,dy+\iint_{(S_1)}z^2\,dx\,dy,$$

其中 (S_2) 及 (S_1) 分別表示上半球面及下半球面，卽

$$(S_2):\ z-c=+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2},$$

$$(S_1):\ z-c=-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}.$$

今写 $z^2=(z-c)^2+2c(z-c)+c^2$，于是

$$I_3=\iint_{(S_2)}[(z-c)^2+2c(z-c)+c^2]\,dx\,dy$$

$$+\iint_{(S_1)}[(z-c)^2+2c(z-c)+c^2]\,dx\,dy.$$

但　$$\iint_{(S_2)}(z-c)^2dx\,dy=\iint_{(x-a)^2+(y-b)^2\le R^2}(R^2-(x-a)^2-(y-b)^2)\,dx\,dy,$$

$$\iint_{(S_1)}(z-c)^2dx\,dy=-\iint_{(x-a)^2+(y-b)^2\leq R^2}(R^2-(x-a)^2-(y-b)^2)\,dx\,dy,$$

故
$$\iint_{(S_2)}(z-c)^2\,dx\,dy+\iint_{(S_1)}(z-c)^2\,dx\,dy=0.$$

同理
$$\iint_{(S_2)}c^2\,dx\,dy+\iint_{(S_1)}c^2\,dx\,dy=0.$$

又
$$\iint_{(S_2)}(z-c)\,dx\,dy=\iint_{(x-a)^2+(y-b)^2\leq R^2}\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\,dx\,dy,$$

$$\iint_{(S_1)}(z-c)\,dx\,dy=-\iint_{(x-a)^2+(y-b)^2\leq R^2}-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\,dx\,dy$$
$$=\iint_{(S_2)}(z-c)\,dx\,dy,$$

故最后得
$$I_3=4c\iint_{(x-a)^2+(y-b)^2\leq R^2}\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\,dx\,dy$$
$$=4c\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}\,r\,dr=\frac{8\pi cR^3}{3}.$$

同理可得
$$I_1=\iint_{(S)}x^2dy\,dz=\frac{8\pi\,a\,R^3}{3},$$
$$I_2=\iint_{(S)}y^2dz\,dx=\frac{8\pi\,b\,R^3}{3}.$$

故
$$I=I_1+I_2+I_3=\frac{8\pi R^3(a+b+c)}{3}.$$

[例 8] 計算积分 $I=\iint_{(S)}x^3\,dy\,dz$，其中 S 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的上半部，且設积分是沿椭球面的上側而取的。

我們可将椭球面表为参数(φ,θ)形式：

$$x=a\sin\varphi\cos\theta,\ y=b\sin\varphi\sin\theta,\ z=c\cos\varphi$$
$$\left(0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2},\ 0\leq\theta\leq2\pi\right).$$

根据第 534 頁公式(*)的第一式，有

$$I=\pm\iint\limits_{(\Omega)} a^3 \sin^3\varphi \cos^3\theta\cdot A d\varphi\, d\theta,$$

其中 (Ω) 是 $\varphi\theta$-平面上的区域 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. 容易計算 $A=bc\sin^2\varphi\cos\theta$. 因积分沿上側;故应取正号,即有

$$I=a^3bc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\, d\varphi\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\, d\theta=\frac{2}{5}\pi a^3bc.$$

习　题

1. 計算二次积分:

   (1) $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xy\, dy$;　　　　(2) $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{a} r^2\sin^2\varphi\, dr$.

2. 列出函数 $f(x, y)$ 在下述区域上的一个二次积分:

   (1) 以 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$ 为頂点的三角形;

   (2) 圓环 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$;

   (3) 坐标适合不等式 $|x|+|y|\leqslant 1$ 的点的区域;

   (4) 由 $y=x^2$, $y=1$ 所包圍的区域。

3. 在下列积分中改变逐次积分的次序:

   (1) $\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x, y)\, dy$;　　　　(2) $\int_0^1 dx\int_{x^3}^{x^2} f(x, y)\, dy$;

   (3) $\int_0^{2a} dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y)\, dy$;　　(4) $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x, y)\, dy$;

   (5) $\int_0^{2\pi} dx\int_0^{\sin x} f(x, y)\, dy$.

4. 計算下列二重积分:

   (1) $\iint\limits_{[a,b;c,d]} xye^{x^2+y^2}\, dx\, dy$;

   (2) $\iint\limits_{[0,1;0,1]} (x+y)\,\mathrm{sgn}(x-y)\, dx\, dy$ ($\mathrm{sgn}(x-y)$ 表 $x-y$ 的符号函数);

(3) $\iint\limits_{\Omega} xy^2 dx\,dy$，　Ω是由拋物綫 $y^2=2px$ 和直綫 $x=\frac{p}{2}(p>0)$ 所界的区域；

(4) $\iint\limits_{\Omega} \frac{dx\,dy}{\sqrt{2a-x}}$　$(a>0)$　Ω是由圓心在点 (a, a) 半徑为 a 且与坐标軸相切的圓周的較短一段弧和坐标軸所圍成的区域；

(5) $\iint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\,dx\,dy$，　Ω是以 $y=x$，$y=x+a$，$y=a$ 和 $y=3a$　$(a>0)$ 为边的区域。

5．設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，$g(y)$ 在 $[c, d]$ 上可积，那么 $f(x)g(x)$ 在矩形 $[a, b; c, d]$ 上可积且数值为：

$$\int_a^b f(x)\,dx\cdot\int_c^d g(y)\,dy.$$

6．設 $\varphi(u)$ 为 $[u_0, U_0]$ 上連續函数，$f(x, y)$ 在矩形 R 上可积，并且 $f(x, y)$ 在 R 上所取之值属于 $[u_0, U_0]$，証明 $\varphi[f(x, y)]$ 在 R 上可积。

7．設平面上区域 D 在 x 軸和 y 軸上投影长度为 l_x，l_y，D 的面积为 $|D|$，(α, β) 为 D 内任一点，証明：

(1) $\left|\iint\limits_{D} (x-\alpha)(x-\beta)\,dx\,dy\right| \leqslant l_x l_y |D|$；

(2) $\left|\iint\limits_{D} (x-\alpha)(x-\beta)\,dx\,dy\right| \leqslant \frac{l_x^2 l_y^2}{4}$.

8．(1) 說明函数

$$f(x, y)=\begin{cases} 1, & \text{当}(x, y)\text{皆为有理数 } x=\dfrac{p_1}{q_1}, y=\dfrac{p_2}{q_2} \text{ 并且 } q_1=q_2 \text{ 时}, \\ 0, & (x, y)\text{是其他情形}, \end{cases}$$

在 $[0, 1; 0, 1]$ 上的二重积分不存在但二个二次积分存在；

(2) 設在 $[0, 1; 0, 1]$ 上

$$x\text{ 为有理数时 } f(x, y)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant y<\dfrac{1}{2}, \\ 1, & \dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1, \end{cases}$$

$$x\text{ 为无理数时 } f(x, y)=\begin{cases} 1, & 0\leqslant y<\dfrac{1}{2}, \\ 0, & \dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1, \end{cases}$$

說明两种二次积分的存在情形。

9. 用极坐标計算 $\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy$ 时，积分限如何配置（写出下列区域上积分的二个逐次积分）？

(1) Ω: 半圆 $x^2+y^2\leqslant a^2$, $y\geqslant 0$;　(2) Ω: 半环 $a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2$, $x\geqslant 0$;

(3) Ω: 圆 $x^2+y^2\leqslant ay$ $(a>0)$;　(4) Ω: 正方形: $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$.

10. 在下列积分中引进新变量 u, v，积分限如何配置？

(1) $\int_a^b dx\int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y)\,dy$ $(0<a<b,\ 0<\alpha<\beta)$，若 $\begin{cases} u=x, \\ v=y/x; \end{cases}$

(2) $\int_0^2 dx\int_{1-x}^{2-x} f(x, y)\,dy$，若 $u=x+y$, $v=x-y$;

(3) $\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy$，其中 Ω 是由曲綫 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 与坐标軸所界的区域。若 $\begin{cases} x=u\cos^4 v, \\ y=u\sin^4 v. \end{cases}$

11. 应用极坐标計算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$;

(2) $\iint\limits_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$;

(3) $\iint\limits_{\Omega}(x+y)\,dx\,dy$，$\Omega$ 是圆 $x^2+y^2\leqslant x+y$ 的内部。

12. 二重积分的几何应用:

(1) 引入极坐标求体积:

(i) 两圆柱面 $y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=a^2$ 所围区域的体积，

(ii) 两平面 $z=x+y$, $z=0$ 与柱面 $(x^2+y^2)=2xy$，所围的 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ 的部分;

(2) 引入普遍极坐标求由下列曲綫所界的面积:

(i) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=x^2+y^2$,

(ii) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2 y}{c^3}$,

(iii) $\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}}=1$, $x=0$, $y=0$;

(3) 进行适当变数变换求由下列曲綫所界面积:

(i) $x+y=a$, $x+y=b$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$,

(ii) $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $y=x$, $y=2x$ $(x>0,\ y>0)$,

(iii) $(ax+by+c)^2+(a_1x+b_1y+c_1)^2\leqslant h$ $(ab_1\neq a_1b,\ h>0)$.

13．計算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{(V)} xy^2z^3dx\,dy\,dz$, V：由曲面 $z=xy$, $y=x$, $z=0$, $x=1$ 所圍成；

(2) $\iiint\limits_{(V)} xyz\,dx\,dy\,dz$, V：由曲面 $x^2+y^2+z^2=1$, $x\geqslant0$, $y\geqslant0$, $z\geqslant0$ 圍成.

14．指出下列三重积分的区域(V)的形状并改变积分次序：

(1) $\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y}f(x,\ y,\ z)\,dz$;　　　1.4.5

(2) $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,\ y,\ z)\,dz$;

(3) $\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2} f(x,\ y,\ z)\,dz$.

15．計算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{(V)} z^2\,dx\,dy\,dz$, (V)由两个球 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$, $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$ 的公共部分所組成；

(2) $\iiint\limits_{(V)} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dx\,dy\,dz$, (V)为椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant1$.

16．三重积分的几何应用：

(1) 利用球面坐标或柱面坐标計算下列曲面所界体积：

(i) $x^2+y^2+z^2=4R^2$ 的内部被 $x^2+y^2=2Rx$ 所划出的部分，

(ii) $(x^2+y^2+z^2)^3=3xyz$;

(2) 利用适当坐标变换計算下列曲面所圍体积：

(i) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

(可令：$x=a\rho\cos\theta\cos\varphi$, $y=b\rho\cos\theta\sin\varphi$, $z=c\rho\sin\theta$),

(ii) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$ $(x>0,\ y>0,\ z>0,\ a,\ b,\ c>0)$,

(iii) $z=x^2+y^2$, $z=2(x^2+y^2)$, $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $x=2y$, $2x=y$ $(x,\ y>0)$.

17．計算第一类曲綫积分：

(1) $\int_l (x+y)ds$, l: 以 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$ 为頂点的三角形;

(2) $\int_l (x^2+y^2)ds$, l: 以原点为中心,半徑为 R 的左半圓周;

(3) $\int_l (x^2+y^2+z^2)ds$, l: 圓螺旋綫: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(4) $\int_l x^2ds$, l: 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 相交的圓周。

18. 計算第一类曲面积分:

(1) $\iint\limits_S (x+y+z)dS$, S: 上半球面: $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\geqslant 0$;

(2) $\iint\limits_S xdS$, S: 螺旋面: $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=cv$ 上的一部分 $0\leqslant u\leqslant a$, $0\leqslant v\leqslant 2\pi$;

(3) $\iint\limits_S dS$, S: 球面 $x^2+y^2+z^2=2cz\ (c>0)$ 夹在錐面 $x^2+y^2=z^2$ 內的部分;

(4) $\iint\limits_S (x^2+y^2)dS$, S: 体积 $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$ 的边界。

19. 求边长为 a 的正方形薄板的質量,設薄板上每一点的密度与該点距正方形某一頂点的距离成比例,且在正方形的中点处密度为 ρ_0。

20. 求下列曲綫所界薄板的形心坐标:

(1) $ay=x^2$, $x+y=2a$ $(a>0)$;

(2) $r=a(1+\cos\varphi)$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$.

21. 求有单位体积 $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant 1$ 的物体的質量,若物体在点 $M(x,y,z)$ 的密度为 $u=x+y+z$.

22. 求由下列曲面所界的物体的形心:

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$;

(2) $z=x^2+y^2$, $x+y=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

23. 求由下列曲面所界均匀体对于所示軸的轉动慣量:

(1) $z=x^2+y^2$, $x+y=\pm 1$, $x-y=\pm 1$, $z=0$ 关于 z 軸;

(2) 长方体关于它的一棱。

24. 計算引力:

(1) 均匀薄片 $x^2+y^2\leqslant R^2$, $z=0$ 关于 z 軸上一点 $(0,0,c)$ $(c>0)$ 处的

单位质量的引力；

(2) 求均匀柱体 $x^2+y^2\leqslant a^2$, $0\leqslant z\leqslant h$ 对于 $p(0, 0, c)$ $(c>h)$ 点处的单位质量的引力。

25. (1) 求椭圆 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ 周界的质量 $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，若曲綫在点 $M(x, y)$ 的綫性密度为 $\rho=|y|$；

(2) 求旋輪綫 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的一段弧的重心，設密度为均匀的。

26. (1) 求圓拋物面壳的质量：$z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$, $0\leqslant z\leqslant 1$. 此壳的密度为 $\rho=z$；

(2) 求均匀球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\geqslant 0)$ 对 Oz 軸的轉动慣量。

27. 計算下列曲面面积：

(1) $z=axy$ 包含在圓柱 $x^2+y^2=a^2$ 内的部分；

(2) 錐面 $x^2+y^2=\dfrac{1}{3}z^2$ 与平面 $x+y+z=2a$ $(a>0)$ 所界部分的表面；

(3) 柱面 $x^2+y^2=a^2$ 被二平面 $x+z=0$, $x-z=0$ $(x>0, y>0)$ 所截部分。

28. 計算下列第二类曲綫积分：

(1) $\int_{(l)}(x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, (l) 为拋物綫弧 $y=x^2$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$；

(2) $\oint_{(l)}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$, (l) 为以 $A(1, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 1)$, $D(1, 1)$ 为頂点的正方形；

(3) $\int_{(l)}(2a-y)dx+dy$, (l) 为旋輪綫 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 的一段弧；

(4) $\int_{(l)}y\,dx-x\,dy+(x^2+y^2)dz$, (l) 为曲綫 $x=e^t$, $y=e^{-t}$, $z=at$ 在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 内的一段。

29. 設光滑閉曲綫 (L) 在光滑曲面 (S) 上，(S) 的方程为 $z=f(x, y)$，曲綫 (L) 在 XY 平面上的投影曲綫为 (l)，函数 $P(x, y, z)$ 在 (L) 上連續，証明

$$\oint_{(L)}P(x, y, z)\,dx=\oint_{(l)}P[x, y, f(x, y)]\,dx.$$

30. 証明：对于曲綫积分的估計式为

$$\left|\int_{(l)}Pdx+Qdy\right|\leqslant LM,\quad \text{式中 } L \text{ 为积分曲綫段长度，}$$

$$M=\max_{(x,y)\in(l)}\sqrt{P^2+Q^2},$$

利用这个不等式估計：

$$I_R=\oint_{x^2+y^2=R^2}\frac{y\,dx-x\,dy}{(x^2+xy+y^2)^2},$$

并証明　$\lim\limits_{R\to\infty}I_R=0$。

31．計算下列曲綫所圍区域面积：

(1) 星形綫 $x=a\cos^3t,\ y=a\sin^3t$；

(2) 双紐綫 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$。

32．計算第二类曲面积分：

(1) $\iint\limits_{(S)}(x+y)\,dy\,dz+(y+z)\,dz\,dx+(z+x)\,dx\,dy$，

(S)是以原点为中心的正方体(每边长度为 2)的境界，指向外側；

(2) $\iint\limits_{(S)}f(x)\,dy\,dz+g(y)\,dx\,dz+h(z)\,dx\,dy$，　式中 $f,\ g,\ h$ 为連續，(S)为平行六面体($0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b,\ 0\leqslant z\leqslant c$)的境界，指向外側；

(3) $\iint\limits_{(S)}yz\,dz\,dx$，

积分沿(S)：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的上半表面的上側。

第七章　各种积分間的联系和場論

上面我們已經叙述过了二重积分、三重积分、曲綫积分、曲面积分等概念，并且給出了它們的計算。在此基础上，本章要介紹它們之間的联系，就是要証明格林（Green）公式和奥斯特洛格拉德斯基（Остроградский）公式，前者建立了一平面区域上的二重积分同沿这区域境界的曲綫积分的联系；后者建立了空間区域上三重积分和沿这区域境界的曲面积分的联系，并进一步利用这些公式来研究曲綫积分的一些性质。例如研究在什么条件下，第二类曲綫积分仅与积分道路的起点和終点有关而与道路如何由起点到終点无关。本章最后将初步介紹有关場論知識。

§1 格 林 公 式

首先，引进一个重要概念，卽所謂单連通的概念。設一个平面区域 D，如果全落在此区域内的任何一条封閉曲綫皆可以不經过 D 以外的点而連續地收縮为一点，則称此区域 D 为单連通的，否則称为复連通的。例如平面上的圓 $x^2+y^2<1$，右半平面 $x>0$ 都是单連通区域，而圓环 $0<x^2+y^2<1$ 是复連通区域。可見，单連通区域也就是不含有“洞”甚至不含有“点洞”的区域。如果区域 D 是有限的，也卽不伸展到无穷远的，則单連通的概念还可以更簡单地表述为：区域 D 必須是由唯一的一个閉曲綫圍成的。图 3-7-1 中給出了单連通和复連通的例子

格林研究了单連通区域 (D) 上的二重积分和沿其境界曲綫积分之間的关系如下：

定理（格林公式）　設 D 是以光滑曲綫 l 为境界的平面单連通区域，函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在 D 及 l 上連續并具有对 x 和 y 的連續偏导数，则有：

$$\iint_{(D)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint_{(l)}P\,dx+Q\,dy,$$

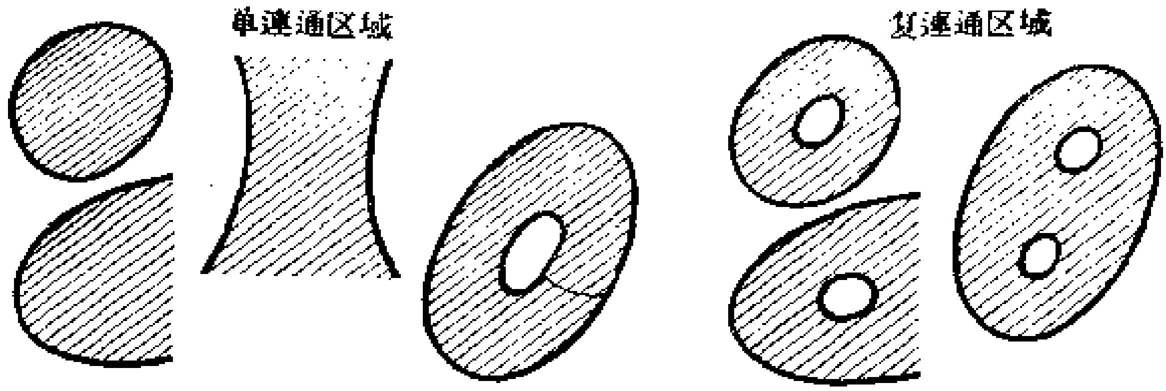


图 3-7-1

这里右端积分路綫的方向是和区域正向联系的，即当一人沿着曲綫(l)行走时区域 D 恒在他的左边（亦即服从右手法則的联系）。

这个公式称为格林公式。

【証明】　設 (l) 由两曲綫 $y=y_1(x)$，$y=y_2(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$ 或 $x=x_1(y)$，$x=x_2(y)$，$c\leqslant y\leqslant d$ 所組成（图 3-7-2）。由于 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 連續，所以

$$\begin{aligned}\iint_{(D)}\frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy&=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy=\int_a^b P(x, y)\Big]_{y_1(x)}^{y_2(x)}dx\\&=\int_a^b[P(x, y_2(x))-P(x, y_1(x))]dx\\&=\int_{\underset{(2)}{\overrightarrow{AB}}}P(x, y)dx-\int_{\underset{(1)}{\overrightarrow{AB}}}P(x, y)dx\\&=-\int_{\underset{(2)}{\overrightarrow{BA}}}P(x, y)dx-\int_{\underset{(1)}{\overrightarrow{AB}}}P(x, y)dx\\&=-\oint_{(l)}P(x, y)dx,\end{aligned}$$

这里 $\int_{\overrightarrow{AB}\,(1)}$, $\int_{\overrightarrow{AB}\,(2)}$ 分别表示沿第 (1) 条、第 (2) 条曲綫由 A 到 B (图 3-7-2)。

同样有
$$\iint_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx$$
$$= \oint_{(l)} Q(x, y)\, dy.$$

所以
$$\iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{(l)} P\, dx + Q\, dy$$

成立。

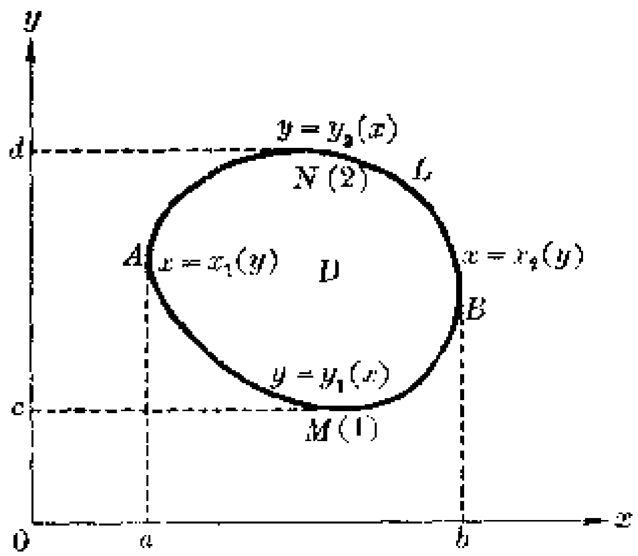


图 3-7-2

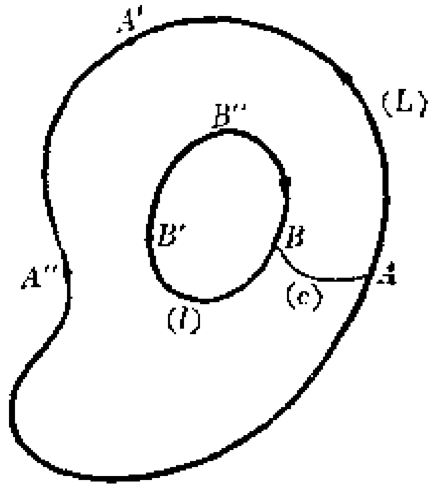


图 3-7-3

若 D 是平面上复連通区域(图 3-7-3),用一条曲綫 (c) 把区域 D 的境界曲綫 (L) 和 (l) 联結起来,那么以曲綫 (L),(l) 及 (c) 为境界的区域就成了一个单連通区域,应用刚才証明的格林公式:

$$\iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{\overset{\frown}{AA'A''A}} P\, dx + Q\, dy + \int_{\overrightarrow{AB}} P\, dx + Q\, dy$$
$$+ \int_{\overset{\frown}{BB'B''B}} P\, dx + Q\, dy + \int_{\overrightarrow{BA}} P\, dx + Q\, dy$$
$$= \oint_{(L)} P\, dx + Q\, dy + \oint_{(l)} P\, dx + Q\, dy,$$

这里(L)及(l)的方向取法是和区域正向联系的。可知，格林公式对于复連通的情形亦成立，这时区域的境界曲綫将不止一条，而在境界曲綫上的积分，曲綫的方向須和区域以正向相联系。

特別，在格林公式中令$P=-y$, $Q=x$，則得到一个計算平面面积D的公式(参見上一章§6)

$$D=\iint_{(D)} dx\,dy=\frac{1}{2}\oint_{(L)} x\,dy-y\,dx.$$

[例 1]　計算积分$\iint_{(\sigma)} e^{-y^2}dx\,dy$，此处$(\sigma)$是以$(0, 0)$，$(1, 1)$，$(0, 1)$为頂的三角形(参見第六章§1例3)(图3-7-4)。

按格林公式，此时$P=0$, $Q=xe^{-y^2}$，有

$$\begin{aligned}\iint_{(\sigma)} e^{-y^2}dx\,dy&=\oint_{(l)} xe^{-y^2}dy\\&=\int_{\overrightarrow{AB}} xe^{-y^2}dy+\int_{\overrightarrow{BC}} xe^{-y^2}dy+\int_{\overrightarrow{CA}} xe^{-y^2}dy\\&=\int_0^1 ye^{-y^2}dy=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}.\end{aligned}$$

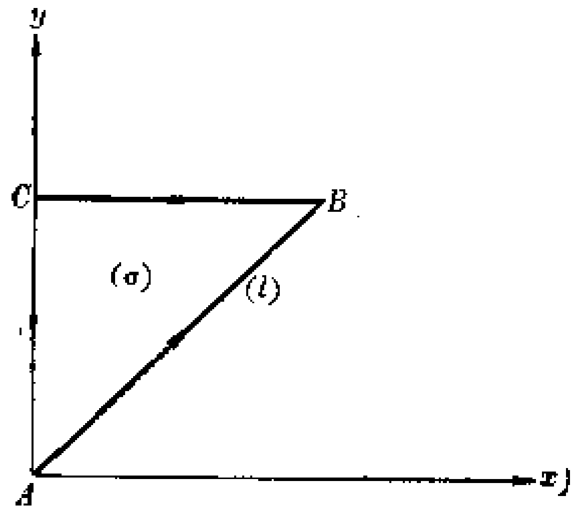


图　3-7-4

[例 2]　計算$\iint_{(\sigma)} xy\,dx\,dy$，其中$(\sigma)$为单位圓。

由格林公式，此时 $P=0$，$Q=\frac{1}{2}x^2y$，所以

$$\iint\limits_{(\sigma)} xy\,dx\,dy=\oint_{(l)}\frac{1}{2}x^2y\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cos^2 t\sin t\cos t\,dt=0.$$

§2 奥斯特洛格拉德斯基公式

首先要对空間区域作一些說明。

如果在一个空間区域中的任何两点皆可用全属于此区域的曲綫連結起来，則称此区域为連通的。又如果对于这个区域內的任何閉曲面皆可不經过区域外的点而連續收縮为一点，則称此空間区域为二維单連通的。如果对于这个区域內的任何閉曲綫皆可不經过区域外的点而連續收縮为一点，則称此空間区域为一維单連通的。例如球的內部区域是二維单連通的。两个同心球之間的区域是一維单連通但不是二維单連通的。圓环面的內部区域既非二維单連通也非一維单連通的。

奥斯特洛格拉德斯基建立了二維单連通区域 (v) 上的三重积分与沿境界曲面 (S) 的积分間的关系如下：

定理（奥斯特洛格拉德斯基公式，以下簡称奥氏公式） 設空間二維单連通区域 (v) 的境界曲面 (S) 是光滑的，函数 $P(x, y, z)$，$Q(x, y, z)$，$R(x, y, z)$ 在 (v) 及 (S) 上具有关于 x, y, z 的連續偏导数，則有

$$\iiint\limits_{(v)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

$$=\iint\limits_{(S)}[P\cos(\boldsymbol{n}, x)+Q\cos(\boldsymbol{n}, y)+R\cos(\boldsymbol{n}, z)]\,dS$$

$$=\iint\limits_{(S)}P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy,$$

这里 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 (S) 的外法綫方向．最后一个积分是沿曲面 (S) 的外側。

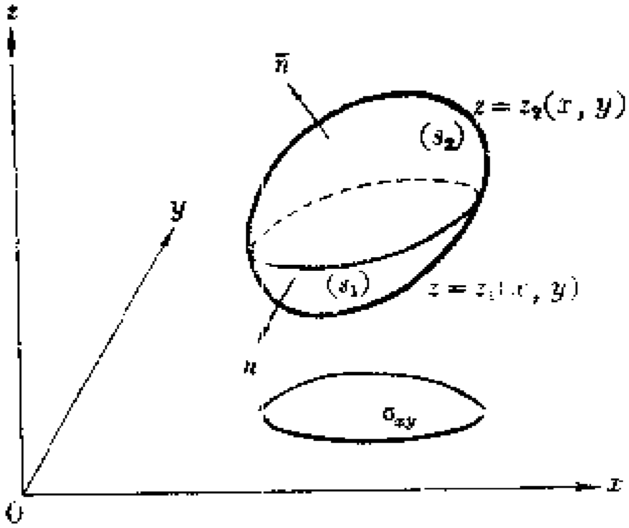


图 3-7-5

这个公式称为奥氏公式．也称为奥斯特洛格拉德斯基–高斯（Gauss）公式，或簡称奥–高公式。

【証明】 首先証明如下的情形。任一平行于坐标軸的直綫和境界曲面 (S) 至多只有两个交点。这时 (S) 可分成上部和下部两部分（图 3-7-5），分别記为 (S_1) 和 (S_2)，(S_1) 的方程設为 $z=z_1(x, y)$，(S_2) 的方程設为 $z=z_2(x, y)$，又設 (v) 在 XOY 平面上的投影区域为 (σ_{xy})，那么

$$\iiint\limits_{(v)} \frac{\partial R}{\partial z} dv = \iiint\limits_{(v)} \frac{\partial R}{\partial z} dx\, dy\, dz = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz\right] dx\, dy$$

$$= \iint\limits_{(\sigma_{xy})} [R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))] dx\, dy.$$

由于 $\boldsymbol{n}$ 为 (S) 的外法綫方向，所以在 (S_1) 上 $\cos(\boldsymbol{n}, z) < 0$；在 (S_2) 上 $\cos(\boldsymbol{n}, z) > 0$，于是有

$$\iiint\limits_{(v)} \frac{\partial R}{\partial z} dv = \iint\limits_{(S_2)} R\cos(\boldsymbol{n}, z) dS + \iint\limits_{(S_1)} R\cos(\boldsymbol{n}, z) dS$$

$$= \iint\limits_{(S)} R\cos(\boldsymbol{n}, z) dS.$$

同理可証明：

$$\iiint\limits_{(v)} \frac{\partial P}{\partial x} dv = \iint\limits_{(S)} P\cos(\boldsymbol{n}, x) dS,$$

$$\iiint\limits_{(v)} \frac{\partial Q}{\partial y}\,dv = \iint\limits_{(S)} Q\cos(\boldsymbol{n}, y)\,dS.$$

三式相加就得到了奥氏公式

$$\iiint\limits_{(v)} \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$$

$$=\iint\limits_{(S)} [P\cos(\boldsymbol{n}, x)+Q\cos(\boldsymbol{n}, y)+R\cos(\boldsymbol{n}, z)]\,dS.$$

再由两类曲面积分間联系得另一形式:

$$\iiint\limits_{(v)} \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv = \iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy.$$

其次証明当境界曲面 (S) 含有平行于 z 軸的母綫的柱面时(图 3-7-6),奥氏公式仍成立。因为在側面 (S') 上有 $\cos(\boldsymbol{n}, z)=0$,所以

$$\iint\limits_{(S')} R\cos(\boldsymbol{n}, z)\,dS=0.$$

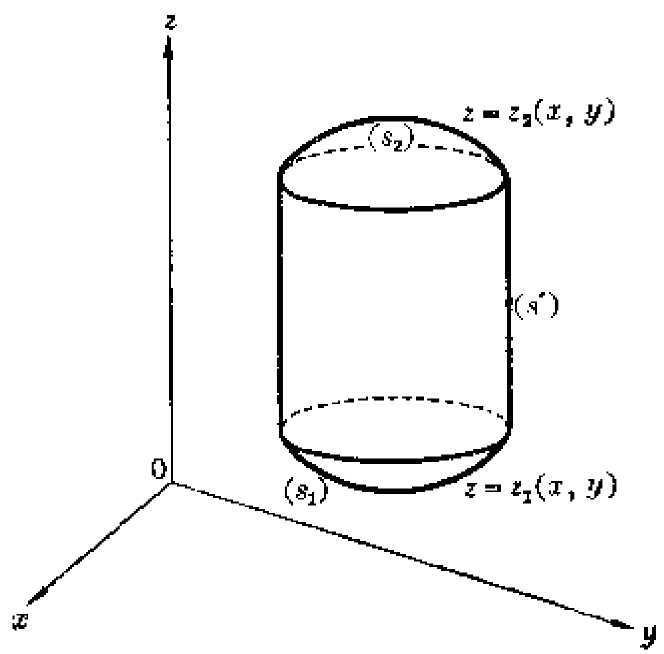


图 3-7-6

于是,相仿于上面的討論,有

$$\iiint\limits_{(v)} \frac{\partial R}{\partial z} dv = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} [R(x, y, z_2) - R(x, y, z_1)] dx\, dy$$

$$= \iint\limits_{(S_2)} R \cos(\boldsymbol{n}, z) dS + \iint\limits_{(S_1)} R \cos(\boldsymbol{n}, z) dS$$

$$= \left\{ \iint\limits_{(S_2)} + \iint\limits_{(S_1)} + \iint\limits_{(S')} \right\} R \cos(\boldsymbol{n}, z) dS$$

$$= \iint\limits_{(S)} R \cos(\boldsymbol{n}, z) dS,$$

奥氏公式仍成立。同样，如果 (S) 含有平行于 x 軸或 y 軸的母綫柱面时，公式亦成立。

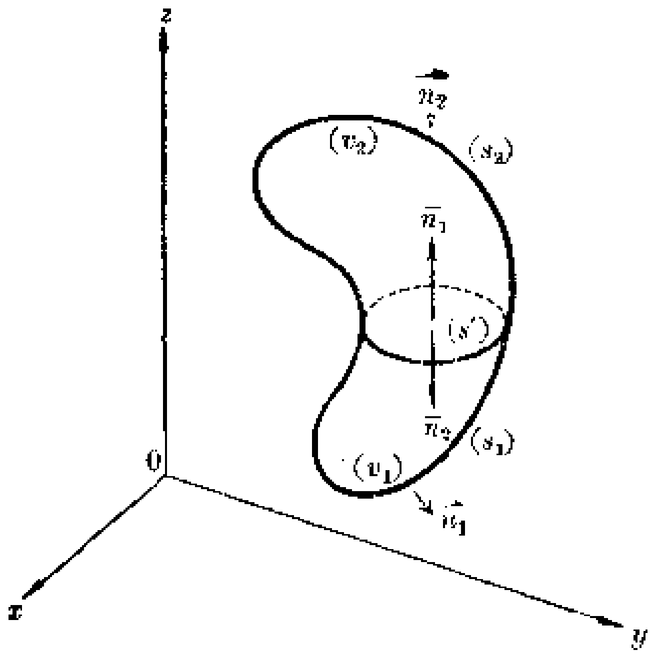


图 3-7-7

最后还要証明平行于坐标軸的直綫和 (S) 相交，其交点多于两点的情形，例如图 3-7-7 的情形。这时可将区域 (v) 分为几个区域，使每个区域的境界曲面和平行于坐标軸的直綫的交点至多两个，或者这些境界曲面上含有平行于坐标軸的某些直綫，然后按剛才已經証明的情形分别在这些部分区域内应用奥氏公式。例如图 3-7-7 的情形，将 (v) 分成为 (v_1) 和 (v_2)，然后分别应用奥氏公式得：

$$\iiint\limits_{(v_1)} \frac{\partial R}{\partial z} dv = \left\{ \iint\limits_{(S_1)} + \iint\limits_{(S')} \right\} R \cos(\boldsymbol{n}_1, z) dS,$$

$$\iiint\limits_{(v_2)} \frac{\partial R}{\partial z} dv = \left\{ \iint\limits_{(S_2)} + \iint\limits_{(S')} \right\} R \cos(\boldsymbol{n}_2, z) dS,$$

注意到在(S')上$\cos(\boldsymbol{n}_1, z) = -\cos(\boldsymbol{n}_2, z)$，故

$$\iiint\limits_{(v)} \frac{\partial R}{\partial z} dv = \left\{\iiint\limits_{(v_1)} + \iiint\limits_{(v_2)}\right\} \frac{\partial R}{\partial z} dv$$

$$= \left\{\iint\limits_{(S_1)} + \iint\limits_{(S_2)}\right\} R\cos(\boldsymbol{n}, z)\, dS$$

$$= \iint\limits_{(S)} R\cos(\boldsymbol{n}, z)\, dS,$$

奥氏公式在(v)上仍旧成立。到此便全部証明了定理。

当区域(v)不是二維单連通时，例如，設区域(v)的境界曲面由$S, S_1, S_2, \cdots, S_k$組成，而$S_1, S_2, \cdots, S_k$包含在S的里面(图3-7-8)，則奥氏公式仍旧成立，此时境界曲面的法方向仍取外法綫方向。証明时只須将原来区域用曲面片$S_1', S_2', \cdots, S_k'$剖开，使成为二維单連通区域(图3-7-8)，再应用奥氏公式。

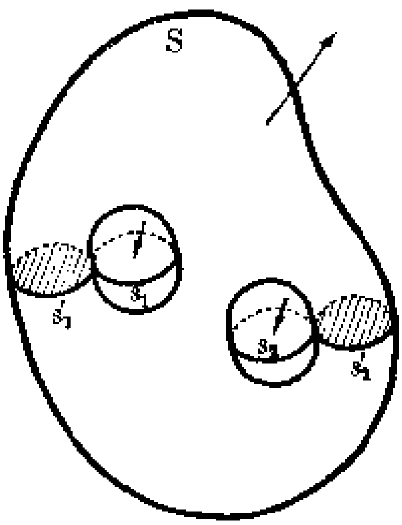


图 3-7-8

[例] 計算

$$\iint\limits_{(S)} x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy,$$

(S)为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$。沿外側按奥氏公式：

$$\iint\limits_{(S)} x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \le R^2} (1+1+1)\, dx\, dy\, dz = 4\pi R^3.$$

§3 斯托克司公式

我們要把格林公式由平面推广到曲面，使在具有光滑境界曲綫的光滑曲面上的积分和其境界上的积分联系起来，得到下面的

斯托克司(Stokes)公式。

定理(斯托克司公式) 若光滑曲面(S)的境界为光滑曲綫L，函数$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$在曲面(S)及曲綫L上具有对x,y,z的連續偏导数，則公式

$$\int_{(L)} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

$$=\iint_{(S)}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos(\boldsymbol{n},x)+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos(\boldsymbol{n},y)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos(\boldsymbol{n},z)\right]dS$$

$$=\iint_{(S)}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

成立。曲綫积分的方向是和曲面的側正向联系的(即服从右手联系法則)。

这个公式称为斯托克司公式。为了便于記忆，公式又可以写为

$$\int_{(L)} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

$$=\iint_{(S)}\begin{vmatrix}\cos(\boldsymbol{n},x) & \cos(\boldsymbol{n},y) & \cos(\boldsymbol{n},z)\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS$$

$$=\iint_{(S)}\begin{vmatrix}dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

【証明】 設光滑曲面(S)在XOY平面上的投影为σ_{xy}，并假

定通过 σ_{xy} 上的一点平行于 z 轴的直綫与 (S) 只有一个交点，l 是 σ_{xy} 的境界，即 (S) 的境界 L 在 XOY 平面上的投影，(S) 的法綫方向是取与 z 轴正向成銳角的方向，L 的方向和 (S) 的側的方向右手联系(图 3-7-9)。

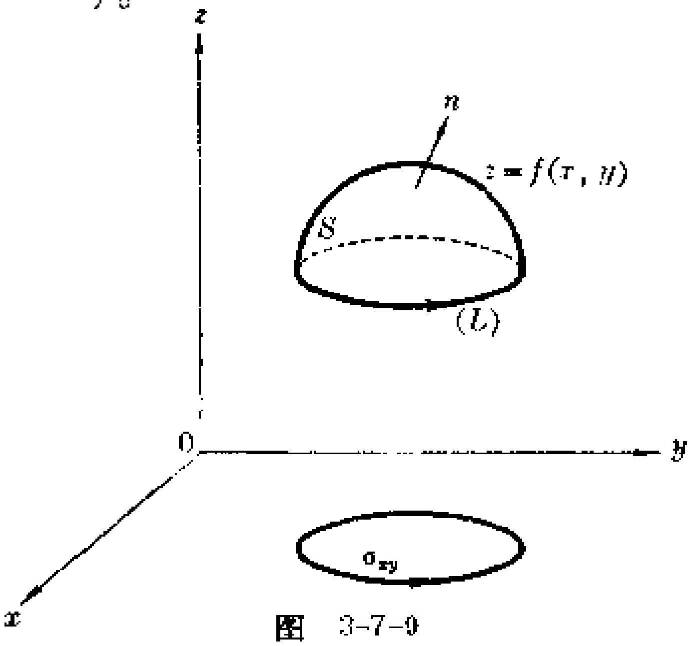


图 3-7-9

設曲面方程为 $z=f(x, y)$. 則有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\cos(\boldsymbol{n}, x)}{\cos(\boldsymbol{n}, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\cos(\boldsymbol{n}, y)}{\cos(\boldsymbol{n}, z)},$$

取上側法綫，

$$d\sigma_{xy}=\frac{dS}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}=\cos(\boldsymbol{n}, z)\,dS.$$

考慮积分
$$\int_{(L)} P(x, y, z)\,dx,$$

注意到
$$\int_{(L)} P\,dx=\int_{(l)} P(x, y, f(x, y))\,dx,$$

右端应用格林公式，得：

$$\int_{(l)} P(x, y, f(x, y))\,dx=-\iint\limits_{(\sigma_{xy})}\frac{\partial}{\partial y}P(x, y, f(x, y))\,d\sigma_{xy}$$

$$=-\iint\limits_{(\sigma_{xy})}\left[\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y}+\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right]d\sigma_{xy}.$$

由 dS 及 $d\sigma_{xy}$ 的关系，則可知：

$$\int_{(L)} P\,dx = -\iint_{(S)} \left[\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right]\cos(\boldsymbol{n}, z)\,dS$$

$$= -\iint_{(S)} \left[\frac{\partial P}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n}, z) - \frac{\partial P}{\partial z}\cos(\boldsymbol{n}, y)\right]dS$$

$$= \iint_{(S)} \left[\frac{\partial P}{\partial z}\cos(\boldsymbol{n}, y) - \frac{\partial P}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n}, z)\right]dS.$$

同理証明：

$$\int_{(L)} Q\,dy = \iint_{(S)} \left[\frac{\partial Q}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n}, z) - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos(\boldsymbol{n}, x)\right]dS,$$

$$\int_{(L)} R\,dz = \iint_{(S)} \left[\frac{\partial R}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n}, x) - \frac{\partial R}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n}, y)\right]dS.$$

三式相加，便得到斯托克司公式。

象以前一样，可以将曲面的条件放寬，当曲面和 z 軸的平行綫的交点不止一个时，将曲面分成若干块，使每一块和 z 軸平行綫的交点不多于一个，不难驗証，对于这种曲面，斯托克司公式还是成立的。

［例］　計算 $\oint_{(L)} (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$，$(L)$为柱面 $x^2+y^2=a^2$ 和 $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ $(a>0,\ h>0)$ 的交綫，即(L)是一橢圓边界，从 OX 軸的正向看去，橢圓按反时針方向进行(图 3-7-10)。

把平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ 上 (L) 所包圍的区域記为 (σ)，則 (σ) 的法綫方向为$(h,\ 0,\ a)$$\left(\text{平面方程 } \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1\text{，可写为 } hx+az=ah\right)$，将$(L)$上的积分按照斯托克司公式化为$(\sigma)$上的积分，則有

$$\oint_{L} (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$$

$$= -2\iint_{\sigma} dy\,dz + dz\,dx + dx\,dy.$$

积分区域的法綫方向和曲綫方向是正向联系的，所以积分沿上侧进行，而 $\iint\limits_{\sigma} dy\,dz+dz\,dx+dx\,dy$ 就是 σ 在三坐标面上投影的面积之和，所以

$$\iint\limits_{\sigma} dy\,dz+dz\,dx+dx\,dy=\sigma\left[\cos(\boldsymbol{n},x)+\cos(\boldsymbol{n},y)+\cos(\boldsymbol{n},z)\right]$$

$$=\sigma\cdot\left[\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}+\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right]=\pi a^2+\pi ah.$$

因而 $\oint_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=-2\pi a(a+h)$.

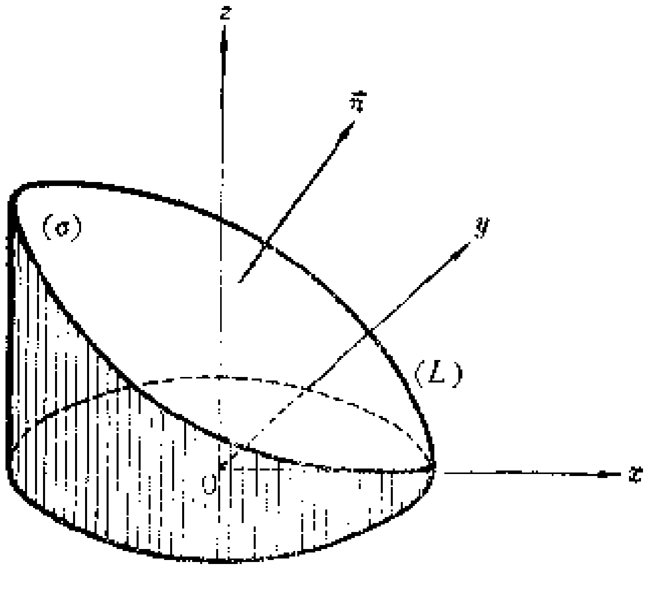


图 3-7-10

§4 曲綫积分和道路的无关性

在力学上，我們知道质点在保守力場中移动时，力場所做的功是和所走的道路无关，而只与质点运动的起点和終点有关的。而质点运动时力場所作的功可用第二类曲綫积分来表示。因此，我們要討論这样一个問題：第二类曲綫积分当被积函数在什么条件下是与道路无关的（只依賴曲綫的端点）。

为简单計，我們討論平面上的曲綫积分

$$\int_{(l)} P(x, y)dx+Q(x, y)dy.$$

定理　若函数 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 在区域 D 上有連續的偏导数。D 是单連通区域，那末以下四条件相互等价：

(1) 对任一全部含在 D 内閉路 C,

$$\oint_{(C)} P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0.$$

(2) 对任一全部含在 D 内的曲綫 l, 曲綫积分

$$\int_l P(x, y)dx+Q(x, y)dy$$

与道路无关(只依賴曲綫的端点)。

(3) 微分式 $Pdx+Qdy$ 在 D 内是某一个函数 $U(x, y)$ 的全微分，即 $dU=Pdx+Qdy$.

(4) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内处处成立。

【証明】 (1)→(2)。即当 (1) 成立时可推出 (2) 必成立。如(1)满足，則对任何 D 内两点 M, N 及任意两条 D 内曲綫 $\widehat{MRN}$, $\widehat{MSN}$ (图 3-7-11) 有：

$$\int_{\widehat{MRN}} Pdx+Qdy-\int_{\widehat{MSN}} Pdx+Qdy=\int_{\widehat{MRNSM}} Pdx+Qdy=0.$$

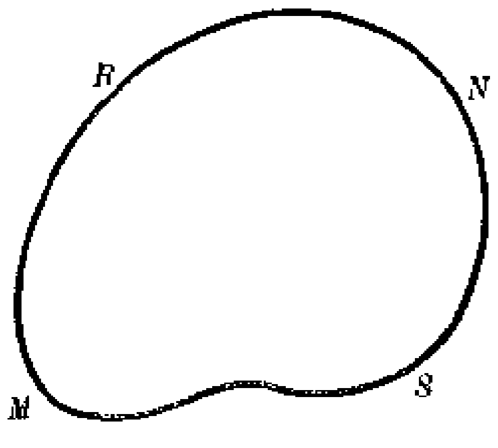


图 3-7-11

于是 $$\int_{\widehat{MRN}} P\,dx+Q\,dy=\int_{\widehat{MSN}} P\,dx+Q\,dy,$$
即(2)成立。

(2)→(3)。如(2)满足，作函数 $U(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx+Q\,dy$，其中$(x_0, y_0)$是 D 内固定一点，而(x, y)在 D 内变动，由于积分和道路无关，所以这是单值函数。对任意点(x, y)，

$$\frac{U(x+\Delta x, y)-U(x, y)}{\Delta x}=\frac{\int_{(x, y)}^{(x+\Delta x, y)} P\,dx+Q\,dy}{\Delta x},$$

利用积分和道路无关，可以把(x_0, y_0)到$(x+\Delta x, y)$的曲綫取得使它通过(x,y)点(图3-7-12)。当 Δx 很小时，由点(x,y)到$(x+\Delta x, y)$的直綫将全部落入 D 内，就取直綫段作为积分路綫，得

$$\frac{U(x+\Delta x, y)-U(x, y)}{\Delta x}$$
$$=\frac{\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x, y)} P\,dx+Q\,dy}{\Delta x}=\frac{\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x, y)} P\,dx}{\Delta x}=\frac{P(\xi, y)\,\Delta x}{\Delta x},$$

这里 ξ 在 x 和 $x+\Delta x$ 之間，所以

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{U(x+\Delta x, y)-U(x, y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} P(\xi, y)=P(x, y).$$

同样可得 $$\frac{\partial U}{\partial y}=Q(x, y).$$

所以

$$dU=P\,dx+Q\,dy.$$

(3)→(4)。因为

$$P=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Q=\frac{\partial U}{\partial y},$$

根据 $$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x},$$

得到
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$
在 D 内处处成立。

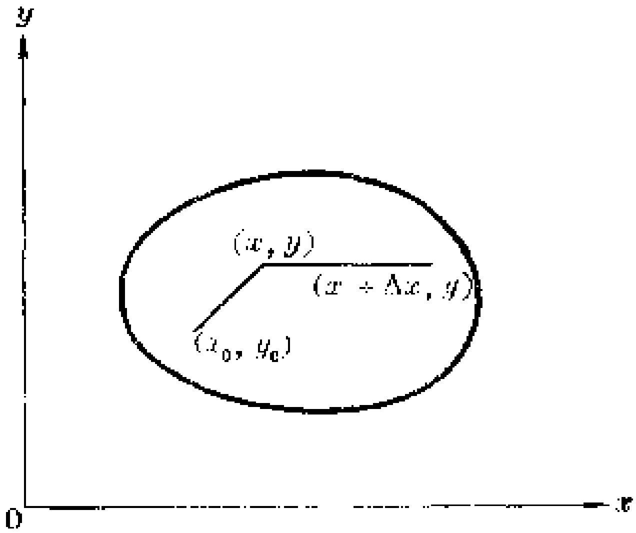


图　3-7-12

(4)→(1)。由(4)，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以对任一全含在 D 内的閉路 (C)，記 (σ) 为 C 所圍成区域。由格林公式
$$\oint_{(C)} P\,dx+Q\,dy=\iint_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=0,$$
即推出了(1)。

这样我們将四条件循环地推了一圈，就証明了它們的相互等价性。

当曲綫积分和道路无关时，即满足上面的諸条件时，如令点 $A(x_0, y_0)$ 固定而点 $B(x, y)$ 为区域 D 内任意一点，那么由积分所定义的函数：
$$U(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx+Q\,dy$$
在 D 内連續并且单值。这个函数 $U(x, y)$ 称为 $P\,dx+Q\,dy$ 的原函数，和定积分中所述原函数有相仿性质，如下：

1° $dU(x, y)=P\,dx+Q\,dy$。这由剛才的証明即得。

2° 利用原函数 $U(x, y)$ 来計算曲綫积分：

$$\int_{\overrightarrow{AB}} P\,dx+Q\,dy=U(B)-U(A)=U(M)\Big|_A^B,$$

这里 $U(B)=U(x_B, y_B)$，$U(A)=U(x_A, y_A)$，(x_A, y_A)和(x_B, y_B)分别为 A，B 点的坐标。$U(M)\Big|_A^B$ 是一个記号，它等于$U(B)-U(A)$.

【証明】 考察联結 A，B 两点的任意一条在 D 内的光滑曲綫(l)，設它的方程为

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta),$$

幷且 $\varphi(\alpha)=x_A$，$\psi(\alpha)=y_A$，$\varphi(\beta)=x_B$，$\psi(\beta)=y_B$.

計算沿(l)的曲綫积分：

$$\begin{aligned}I&=\int_{(l)} P\,dx+Q\,dy\\&=\int_\alpha^\beta \{P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\}dt.\end{aligned}$$

注意到 U 是 $P\,dx+Q\,dy$ 的原函数，$P=\dfrac{\partial U}{\partial x}$，$Q=\dfrac{\partial U}{\partial y}$，有

$$\begin{aligned}I&=\int_\alpha^\beta\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\varphi'(t)+\frac{\partial U}{\partial y}\psi'(t)\right\}dt\\&=\int_\alpha^\beta\frac{d}{dt}U(\varphi(t), \psi(t))\,dt\\&=U(\varphi(t), \psi(t))\Big|_\alpha^\beta=U(x_B, y_B)-U(x_A, y_A).\end{aligned}$$

这就是所要証明的結果。

剩下来还要說明如何求原函数. 設在某閉矩形区域 D 内，要求 $P\,dx+Q\,dy$ 的原函数，此处 P 和 Q 满足定理的条件(4)：$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. 因此必存在原函数 $U(x, y)$ 使 $dU=Pdx+Qdy$. 幷且可以利用原函数来計算曲綫积分。这时

$$U(x, y)=\int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy+c,$$

其中 $c=U(x_0, y_0)$ 是一个常数，$U(x,y)$ 就是 $P\,dx+Q\,dy$ 的原函数，或者也可写为

$$U(x, y)=\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy+c.$$

請讀者进行驗証(参見习题 12, 13, 14)。

以下考虑非单連通区域或有奇点的情形，在曲綫积分与道路无关的定理中，它的全部理論是建立在两个假定之上：(i) 所考虑区域 D 是单連通的，即沒有"洞"；(ii) 函数 P, Q 及其偏导数在 D 內連續。如果(这两个条件被破坏了，一般說来，上面的那些断言将不会成立。我們注意)有破坏連續性条件 (ii) 的"奇点"，我們将这些点从区域中除开，于是区域内就含有点"洞"，因此对破坏条件 (ii) 的情形的討論可以化为对破坏条件 (i) 的情形来討論。为此，只要将那些奇点从区域 D 中除去，使 D 含有某些"点洞"。对这个含有"洞"的非单連通区域 D，函数 P, Q 及其偏导数在 D 上連續，又設在 D 上成立 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，这时却不能认为，在 D 內沿任何曲綫的积分与道路无关而仅与曲綫端点有关了。

現在討論区域內有一个奇点 M 的情况。这时，如果閉路中包含这一奇点时，格林公式就不能应用。若閉路 (l), (L) 都逆时針繞奇点 M 一圈(图 3-7-13)，可用綫段 AB 将 (l) 和 (L) 联接起来，在 (L) 及 (l) 上沿反时針方向积分，即得

$$\int_{(L)} P\,dx+Q\,dy-\int_{(l)} P\,dx+Q\,dy$$

$$=\left\{\int_{\widehat{BB'B''B}}+\int_{\widehat{BA}}+\int_{\widehat{AA''A'A}}+\int_{\widehat{AB}}\right\} P\,dx+Q\,dy=0,$$

所以
$$\int_{(L)} P\,dx+Q\,dx=\int_{(l)} P\,dx+Q\,dy.$$

即环繞某一奇点的任二閉路沿同一方向的积分相等。因此，对任何区域 D 中的閉路 (C)，它或者不繞过奇点 M，此时认为繞 M 的圈数为 0；或者繞过 n 周，这时积分值就是

$$\int_{(l)} P\,dx+Q\,dy$$

的 n 倍。只环繞奇点 M 一周的閉路上的积分值叫做区域 D 的循环常数，記为 ω。于是，对任一 D 内閉路 C

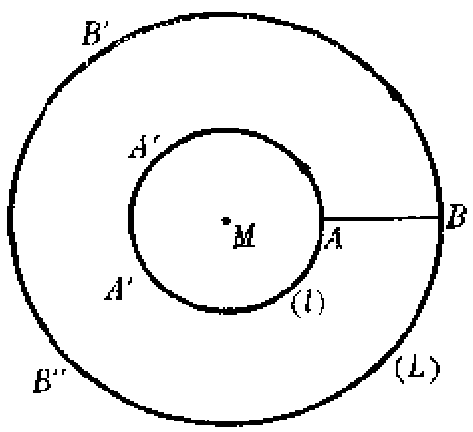


图 3-7-13

$$\int_{(C)} P\,dx+Q\,dy=n\omega,$$

这里 n 为沿閉路 C 按反时針方向繞 M 的圈数。如果它按反时針方向繞 M 的圈数为 n_1，按順时針方向繞 M 圈数为 n_2，那么 $n=n_1-n_2$。

如果 D 内有 n 个奇点 $M_1, \cdots, M_n$，在 M_i 周圍作一环路使它不包含其他奇点，則沿这閉路的积分 ω_i 就是一个循环常数。区域 D 共有 n 个循环常数 $\omega_1, \cdots, \omega_n$，若 (C) 为任意的含在 D 内的閉路，它环繞点 M_i 的周数为 k_i $(k_i=0, \pm1, \pm2, \cdots)$，这里 k_i 的算法和上述的 n 相同，則

$$\oint_C P\,dx+Q\,dy=\sum_{i=1}^{n} k_i\omega_i.$$

所有沿 D 内任意閉路的积分都有这样的形式。

下面举一个例子：

[例] 計算

$$I=\oint_{(l)} \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2},\ \text{有}\ P=-\frac{y}{x^2+y^2},\ Q=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y},\ \text{另外可知}(0,0)\text{这点是奇点。}$$

我們来計算它的循环常数，取一单位圓周

$$x=\cos t,\quad y=\sin t,$$

$$\omega=\int_{x^2+y^2=1}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t)\,dt=\int_0^{2\pi}dt=2\pi,$$

于是积分 I 就和道路有关了，$I=n\omega=2n\pi$，其中 n 为 l 按反时針方向繞 $(0,0)$ 点的圈数。如果 (l) 按反时針方向繞原点 n_1 圈，按順时針方向繞原点 n_2 圈。那么 $n=n_1-n_2$。

最后还要注意的是，有时即使在有奇点时，曲綫积分仍可与道路无关。这是因为循环常数可能等于0的緣故(参見习題17)。

§5　場　　論

一、場的概念

一种物理量随着它在空間或一部分空間的分布情况不同，产生的物理現象也不一样。有时它还随时間变化而变化。因此，要了解某一物理現象，就必須掌握发生这个物理現象的各种物理量的分布情况以及它們随时間变化的規律。例如，我們要預报某一地区在某一段时間內的气候，就必須掌握附近各地区的气压、气温的分布情况以及它們在这段时間前的随时間变化的規律。同样，如果要知道电場的变化，就必須掌握电位、电場强度等分布情况以及它們随时間变化的規律。上面所説的气压、气温、电位、电場强度等都是由空間位置及时間所确定的物理量，它們在空間或一部分空間上的分布就称为場。如果形成場的物理量是数量則称为数量場，如果是向量則称为向量場。例如大气溫度的分布、流体密度的分布都形成数量場，流体流动的速度在給定时刻下的分布情形形成了一个速度向量場，电場强度的分布也是一个向量場。

如果形成場的物理量不仅随位置变化，且随时間变化，則由这样物理量所产生的場称为不定常場。一般的場都是不定常場，但在

某些实际問題中，在一段很短时間内，在同一位置上物理量的变化是很小的，就可以认为它不随时間而变化。不随时間而变化的物理量所形成的場称为定常場。場中的物理量既然是由时間及位置确定，因而它們是以位置(x, y, z)及时間t为自变量的四元函数，或四元向量函数，如流体密度可用函数$\rho=\rho(x, y, z, t)$表示，流体速度可用向量$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$表示。

二、数量場、等量面及梯度

首先来考虑数量場$u=u(x, y, z, t)$，为了研究这个場的分布，我們考察它的一个特殊情形，就是仅考虑場中有相同物理量的点，也就是使$u(x, y, z, t)$取相同数值的各点：

$$u(x, y, z, t)=c,$$

其中c是一个常数。这方程的几何意义是四元时間空間内的某一曲面，这样的曲面称为等量面。当令c取不同数值时，对应的等量面也不同，但在同一等量面上有相同的物理量。如温度場中的等量面就是等温面，电位場中的等量面就是等位面。以后总設$u=u(x, y, z, t)$为单值連續函数，亦即場内每一点及每一时間t只对应一个函数值，因而对場内每一点只能作一个等量面。

設一定常数量場$u(x, y, z)$，又設$P(x, y, z)$为等量面$u(x, y, z)=c$上的任一点，現在作一向量，它的分量为$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P$，$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_P$，$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_P$。这个向量叫做函数$u$在点$P$的梯度，記为$\operatorname{grad} u$：

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

由此可見梯度$\operatorname{grad} u$在三坐标軸上的射影为

$$\operatorname{grad}_x u=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \operatorname{grad}_y u=\frac{\partial u}{\partial y},\quad \operatorname{grad}_z u=\frac{\partial u}{\partial z},$$

而它的长度則为

$$|\operatorname{grad} u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

現在来討論函数 u 在点 $P(x, y, z)$ 的梯度的方向。設过点 P 的等量面为 $u(x, y, z)=c$，由于 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$ 是与这等量面在点 $P(x, y, z)$ 的法綫的方向余弦成比例，故 $u(x, y, z)$ 在点 P 的梯度 $\operatorname{grad} u$ 的方向与等量面在点 P 的法綫方向相同。进一步再来考虑梯度的几何解释，这是很值得注意的，因为它显示出了梯度的实际意义。首先，我們知道函数 u 在任一給定方向 l 上的导数是

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

其中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 为方向 l 的方向余弦。因此若以 $\boldsymbol{l}^\circ$ 表示这方向上的单位向量，亦即 $\boldsymbol{l}^\circ=\cos\alpha\cdot\boldsymbol{i}+\cos\beta\cdot\boldsymbol{j}+\cos\gamma\cdot\boldsymbol{k}$，則有

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\operatorname{grad} u\cdot\boldsymbol{l}^\circ.$$

又由于 $\boldsymbol{l}^\circ$ 为单位向量，故上式右端的数量积等于向量 $\operatorname{grad} u$ 在方向 $\boldsymbol{l}$ 上的射影，記为 $\operatorname{grad}_l u$：

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\operatorname{grad}_l u=|\operatorname{grad} u|\cos(\operatorname{grad} u, \boldsymbol{l}).$$

由此可見，当 $\boldsymbol{l}$ 与 $\operatorname{grad} u$ 为同方向时 $\frac{\partial u}{\partial l}$ 达到最大值 $|\operatorname{grad} u|$. 这說明在每一点处，梯度 $\operatorname{grad} u$ 的方向是函数 u 在这点变化最快的那个方向，也就是函数 u 在这个方向上的变化率为最大。而在所討論点的梯度的长度就等于函数 u 的最大变化率。这样也便知道梯度 $\operatorname{grad} u$ 的定义是与坐标系的选擇无关。

总上所述，即知梯度 $\operatorname{grad} u$ 是这样一个向量，在每一点处它的方向与对应的等量面 $u(x, y, z)=c$ 在这点的法綫方向相同，且由数值較低的等量面指向数值較高的等量面，而它的长度等于函数 u 沿所述法綫的方向导数。設以 $\boldsymbol{n}^\circ$ 表示等量面的法綫的单位向

量，且这向量指向函数 u 的值增大的方向，而以 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 表示函数 u 沿这法綫的方向导数，则有

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial n}\boldsymbol{n}^{\circ}.$$

以下是几个关于梯度的基本而重要的性质：

(i) 两函数代数和的梯度等于各函数的梯度的几何和

$$\operatorname{grad}(u_1+u_2)=\operatorname{grad} u_1+\operatorname{grad} u_2.$$

(ii) $\operatorname{grad}(u_1u_2)=u_1\operatorname{grad} u_2+u_2\operatorname{grad} u_1$.

由梯度定义，这两个性质皆易于証明。

由复合函数求偏导数法则，又可得

(iii) $\operatorname{grad} F(u)=F'(u)\operatorname{grad} u$.

[例 1] 温度場。物体在不同点有不同温度，则有一温度場 $u(x,y,z)$. 从而在这場中就出現了热量流动。在这場中取任一曲面单元 dS，且在选定它的一側上确定法綫方向 $\boldsymbol{n}$。我們来計算在无穷小时間 dt 内沿 $\boldsymbol{n}$ 流过 dS 的热量 dQ. 热是由較热部分向較冷部分流动，且温度降低愈快，流得也愈快。按热傳导理論，在时間 dt 内沿 $\boldsymbol{n}$ 流过 dS 的热量 dQ 是与 dt, dS 以及温度沿曲面的法綫的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 成比例，以 $k>0$ 为此比例系数（称为导热系数），于是有

$$dQ=-k\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\,dt.$$

这样，当 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为負时，即沿法綫 $\boldsymbol{n}$ 的方向 u 变小时，热量 dQ 便为正，若以 $\boldsymbol{q}$ 表示在点 $P(x,y,z)$ 的热流向量，由热傳导的理論有

$$\boldsymbol{q}=-k\operatorname{grad} u,$$

于是即有

$$dQ=q_n\,dS\,dt,$$

其中 q_n 为 $\boldsymbol{q}$ 在法綫 $\boldsymbol{n}$ 上的射影，即 $q_n=-k\frac{\partial u}{\partial n}$.

三、向量場、向量綫、向量場的流量与散度

1° 剛才已經讲过，如果在空間或某一部分空間的每一点处都确定某一向量 $\boldsymbol{a}$，就有了向量場，向量 $\boldsymbol{a}$ 是点的有向函数，所以它可以看为是点 $P(x, y, z)$ 的向徑 $\boldsymbol{r}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的向量函数：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$，或者是点的坐标的向量函数：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(x, y, z)$．应用射影，向量 $\boldsymbol{a}$ 可表为

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},$$

其中 a_x, a_y, a_z 都是 x, y, z 的数量函数。它們分別是向量 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标軸上的射影。以后我們假定 a_x, a_y, a_z 是 x, y, z 的单値連續函数，且各偏导数都存在。在必要时还須假定二阶偏导数皆存在。

在研究向量場时，向量綫的概念是很重要的。在一向量場的确定的区域中，若一曲綫上每点处的切綫恰与在这点的向量重合，則这条曲綫称为向量場的向量綫。

設 $M(x, y, z)$ 为向量綫上任一点，則向量綫在这点的切綫的方向余弦和 dx, dy, dz 成比例，从而得到向量綫应滿足的微分方程：

$$\frac{dx}{a_x}=\frac{dy}{a_y}=\frac{dz}{a_z}.$$

在向量 $\boldsymbol{a}$ 不为零的条件下，由于綫性微分方程組的理論，可知所考慮的整个場被向量綫所填满，而通过場中每一点有一条且只有一条这样的曲綫，且过不同的点的两条向量綫沒有公共点。

由場中的向量綫所組成的曲面叫做向量面，因之对应于向量面上每一点 M 的向量 $\boldsymbol{a}(M)$ 必在向量面在这点的切面上。例如在所考慮的場内任取一异于向量綫的曲綫 c，并过 c 的每一点引向量綫，則这些向量綫的几何軌迹給出一个向量面，当曲綫 c 为閉曲綫时，所得向量面是管形的，称为向量管。

[例 2] 設一力場中的力为

$$\boldsymbol{F}=-\mu y\boldsymbol{i}+\mu x\boldsymbol{j}+\mu h\boldsymbol{k},$$

其中 μ, h 皆为常数，求其力綫(即向量綫)。

力綫的微分方程为

$$\frac{dx}{-\mu y}=\frac{dy}{\mu x}=\frac{dz}{\mu h},$$

从第一个等式得 $$x\,dx+y\,dy=0,$$

积分之，得 $$x^2+y^2=\lambda^2,$$

其中 λ 表示积分常数。因此力綫是在以 Oz 为軸的圓柱面上。

令 $$x=\lambda\cos\theta,\quad y=\lambda\sin\theta,$$

于是 $dy=\lambda\cos\theta\,d\theta$。将 x 及 dy 代入第二式 $\dfrac{dy}{x}=\dfrac{dz}{h}$ 内：

$$dz=h\,d\theta,$$

积分之，得 $$z=h(\theta-\alpha),$$

其中 α 为积分常数。

总上所得，可見所求力綫为在柱面 $x^2+y^2=\lambda^2$ 上的螺旋綫，其方程为

$$x=\lambda\cos\theta,\quad y=\lambda\sin\theta,\quad z=h(\theta-\alpha).$$

2° 流量。設給定一个向量場，且設在点 $M(x,y,z)$ 处的向量为 $\boldsymbol{a}(x,y,z)$。在这場中，任取一个双側曲面 S (不論是封閉曲面或是以某一閉曲綫为边界的曲面都可以)，当选定它的一側后，在它的每一点处引有向法綫 $\boldsymbol{n}$，若 S 是封閉的，則所引的法綫总是向外的。若 S 不是封閉的，則法綫上两个指向任意选擇一个，不过究竟取那一个，是要預先規定好的，并且当从曲面上任一点移到另一相邻点时，法綫的取向是要連續地改变的。这样，曲面积分

$$\iint\limits_{(S)}[a_x\cos(\boldsymbol{n},x)+a_y\cos(\boldsymbol{n},y)+a_z\cos(\boldsymbol{n},z)]\,dS$$

称为向量 $\boldsymbol{a}$ 通过曲面 S 在所选擇的那一側的流量。显然这个流量

还可表示为更簡单形式

$$\iint\limits_{(S)} a_n dS,$$

其中 a_n 为 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 上的射影。

例如由例 1 可見在时間 dt 内流过曲面 S 的热量为

$$dt\iint\limits_{(S)} q_n dS.$$

这就是热流向量通过曲面 S 的流量。

3° 散度，奥斯特洛格拉德斯基公式。設一向量場 $\boldsymbol{a}$．v 为一閉曲面 S 所包圍的空間区域，$\boldsymbol{n}$ 为曲面上向外法綫，由奥斯特洛格拉德斯基公式得

$$\iint\limits_{(S)} a_n dS=\iint\limits_{(S)} [a_x \cos(\boldsymbol{n}, x)+a_y \cos(\boldsymbol{n}, y)+a_z \cos(\boldsymbol{n}, z)]dS$$

$$=\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dv,$$

量 $\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的散度，它形成一个数量場，記为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

利用散度的定义，奥斯特洛格拉德斯基公式可写为

$$\iint\limits_{(S)} a_n dS=\iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}\boldsymbol{a}\, dv.$$

这是奥氏公式向量形式，它說明：向量 $\boldsymbol{a}$ 通过閉曲面 S 的流量等于这个向量的散度在 S 所包圍的区域上的三重积分。

根据定义，向量場在一給定点处的散度是一数量，因而是所考虑的空間的一部分，散度的全体构成一数量場。

上面所給出的散度的定义好象与坐标軸的选擇有关，其实不

然。为了説明这个事实，我們可給散度另一形式的定义，設 M 为区域中任一点，在这点周圍任取一含有这点的区域 V，令 S 为 V 的表面，則有奥氏公式

$$\iint\limits_{(S)} a_n\, dS = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dv,$$

現在将两端除以体积 V，然后令体积 V 趋于零，也就是 V 縮成点 M 而求极限。利用三重积分的中值定理，則右端恰等于 $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ 在 M 点的值，即 $\operatorname{div} \boldsymbol{a}|_M$，这样就有

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}\,|_M = \lim_{(V)\to M} \frac{\iint\limits_{(S)} a_n dS}{v}.$$

由散度的这一定义，可見它与坐标軸的选取无关。

[例 3]　热傳导方程。

現在来研究一物体在内部热傳导作用下且无热源时的热状态。若一物体的每一点在任何时刻的温度为已知，則这个物体的状态就完全决定了。換句話說，物体的热状态可以用温度 $u=u(x, y, z, t)$ 来刻划。

在物体内部任取一由閉曲面 S 所圍成的区域 V. 由例 1，已經看到：在时間 dt 内，从区域 V 流过曲面 S 向外流出的热量为

$$Q = -dt \iint\limits_{(S)} k\, \operatorname{grad}_n u\, dS, \tag{1}$$

这里认为 $\operatorname{grad}_n u = \frac{\partial u}{\partial n} > 0$，即沿外法綫方向的温度是上升的。将上式变号，并应用奥氏公式，便得到在时間 dt 内向区域 V 内部流入的热量为

$$dt \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)\, dv,$$

这一热量必然会引起区域 V 内部温度的改变。我們試图用另一

形式来計算这热量。設以 ρ 表示物体的密度，c 表示物体的热容量（若物体不是均匀的，那么 ρ 及 c 皆为 x, y, z 的函数），在时間 dt 内，体积元素 dv 的温度增加 $du=\frac{\partial u}{\partial t}dt$，所以在这段时間内需要对这体积元素流入热量：

$$c\rho dv\ du=c\rho dv\ \frac{\partial u}{\partial t}dt,$$

从而在时間 dt 内，全区域 V 就需要吸收热量

$$dt\iiint\limits_{(V)} c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dv. \tag{2}$$

由于(1)和(2)所表达的値应相等，故得

$$\iiint\limits_{(V)} c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,dv=\iiint\limits_{(V)}\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)\,dv,$$

即
$$\iiint\limits_{(V)}\left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)\right]dv=0.$$

因为上式对物体内任何区域 v 皆成立，故积分号下的連續函数必須等于零：

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u).$$

这就是所謂热傳导方程。

如果物体是均匀的并且热流量是定常的，也就是說温度 u 与时間 t 无关，則温度 u 必适合以下方程：

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

这就是拉普拉斯(Laplace)方程。

4° 向量場的环流量与渦旋量，斯托克司公式。設已知一向量場 $\boldsymbol{a}$，并設在这場中任取一曲綫 L，則沿此曲綫 L 的曲綫积分

$$\int_L a_x dx+a_y dy+a_z dz=\int_L a_\tau\,ds,$$

称为向量 $\boldsymbol{a}$ 沿曲綫 L 的綫积分，其中 a_τ 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 在曲綫 L 的切綫 τ 上的射影，ds 表示曲綫 L 的弧長微分。

当 L 为閉曲綫时，則积分 $\int_L a_\tau ds$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 沿閉曲綫 L 的环流量。

設閉曲綫 L 为某一曲面 S 的边界，那么由斯托克司公式，向量 $\boldsymbol{a}$ 沿閉曲綫 L 的环流量可表为曲面积分

$$\int_L a_\tau ds = \iint_{(S)} \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos(\boldsymbol{n}, x) + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos(\boldsymbol{n}, y)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos(\boldsymbol{n}, z)\right] dS,$$

称向量 $\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z},\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x},\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)$

为向量 $\boldsymbol{a}$ 的渦旋量，記为 $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$：

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

利用 $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ 的定义，斯托克司公式可写为向量形式如下：

$$\int_L a_\tau ds = \iint_{(S)} \operatorname{rot}_n \boldsymbol{a}\, dS.$$

这个公式指出：向量 $\boldsymbol{a}$ 沿閉曲綫 L 的环流量等于它的渦旋量 $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ 通过以 L 为边界所張的任意曲面 S 的流量。

特别，若所取向量是在 xOy 平面上，那么斯托克司公式就变成向量形式的格林公式。

由上面可以看出，由向量場 $\boldsymbol{a}$ 产生一个渦旋量的向量場 $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$.

与散度一样，渦旋量是与坐标的选擇无关的，为了說明这个事实，我們来給它另一形式的定义：过一已知点 M 选定一个方向 $\boldsymbol{n}$

及以 $\boldsymbol{n}$ 为法綫的一块小平面区域 σ，且設 l 为 σ 的边界，于是根据向量形式的斯托克司公式，得

$$\int_l a_\tau\,ds=\iint_\sigma \operatorname{rot}_n \boldsymbol{a}\,d\sigma,$$

这里 a_τ 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 在曲綫 l 的切綫上的射影。于是等式的两端除以所述小块平面面积 σ，并令这小块区域 σ 收縮成給定点 M，亦即令 σ 趋于零。应用二重积分中值定理，右端的极限恰等于 $\operatorname{rot}_n \boldsymbol{a}|_M$，即

$$\operatorname{rot}_n \boldsymbol{a}|_M=\lim_{\sigma\to M}\frac{\int_l a_\tau\,ds}{\sigma}.$$

这公式給出向量 $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ 在任意方向 $\boldsymbol{n}$ 上的射影的定义，而且很明显，它是与坐标选擇无关的。

向量的渦旋量有几个簡单而重要的性质。

(i) 任何向量的渦旋量的散度等于零

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})=0.$$

(ii) 設 $u(x, y, z)$ 是任一数量函数，$\boldsymbol{a}$ 为一向量，則有

$$\operatorname{rot}(u\boldsymbol{a})=u\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+\operatorname{grad}u\times\boldsymbol{a}.$$

(iii) $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{b}.$

这三个性质建議讀者加以証明。

[例 4] 試計算可以看作无限长的綫状导体(如很长的电綫)中强度为 I 的电流所引起磁力向量 $\boldsymbol{H}$ 的渦旋量。

取导綫作为 z 軸，考察距导綫为 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ 的一点 $M(x, y, z)$ 处的磁場，由电磁学知道磁力向量 $\boldsymbol{H}$ 与通过导綫及 M 点的平面垂直，且由毕奥–沙伐尔定律，知

$$\boldsymbol{H}=\frac{2I}{\rho^2}(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}),$$

这式中沒有 $\boldsymbol{k}$，这說明向量 $\boldsymbol{H}$ 是在平面 XOY 的平行面上。

由 $\boldsymbol{H}$ 的表示式立刻知道

$$H_x=\frac{-2Iy}{\rho^2},\quad H_y=\frac{2Ix}{\rho^2},\quad H_z=0.$$

于是
$$\frac{\partial H_x}{\partial y}=\frac{-2I}{\rho^2}+\frac{4Iy}{\rho^3}\cdot\frac{y}{\rho}=\frac{2I(y^2-x^2)}{\rho^4},$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x}=\frac{2I(y^2-x^2)}{\rho^4},$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}=\frac{\partial H_y}{\partial z}=\frac{\partial H_x}{\partial z}=\frac{\partial H_z}{\partial x}=0.$$

故
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ H_x & H_y & H_z\end{vmatrix}=\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)=0.$$

这就是說，在导綫外任何点处，磁場的渦旋量是零向量。

5° 势量場（或位場）与管量場。如果构成一向量場的向量 $\boldsymbol{a}$ 是某一数量場 $u=u(x,y,z)$ 的梯度，即 $\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}u$，这样，向量場 $\boldsymbol{a}$ 就称为势量場（或位場），而函数 $u(x,y,z)$ 称为場的势函数(位函数)。并非任何向量場都是势量場，因此有必要来研究一个向量場 $\boldsymbol{a}$ 为一势量場的充要条件。从关系式

$$\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}u,$$

它相当于
$$a_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad a_y=\frac{\partial u}{\partial y},\quad a_z=\frac{\partial u}{\partial z},$$

因之，$a_x dx+a_y dy+a_z dz$ 等于全微分 du，但要它是一个函数的全微分，充要条件是(这里所考虑的是单連通区域)：

$$\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}=0,$$

即
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=0.$$

这也就是向量場 $\boldsymbol{a}$ 为势量場的充要条件。也就是說，一向量場为势量場，必須且只須这个場的渦旋量等于零。渦旋量等于零的向

量場称为无旋場，因此势量場为无旋場。

[例 5] 設在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处有一质点，其质量为 m，在其他点处的质点质量为 1，于是在全部空間內就有了一个向量場（卽引向点 M_0 的中心力場）。现在来証明这个力場是一个势量場，并决定这个場的势函数。

用 r 記距离 M_0M，按牛頓定律，得点 M_0 对点 M 的引力的大小等于 $k\frac{m}{r^2}$，其中 k 为引力常数，而它的方向是从 M 到 M_0，因为向量 $\overrightarrow{MM_0}$ 的方向余弦为 $\frac{x_0-x}{r}$，$\frac{y_0-y}{r}$，$\frac{z_0-z}{r}$，則引力 $\boldsymbol{F}(M)$ 在坐标軸的射影为

$$F_x=k\frac{m(x_0-x)}{r^3},\quad F_y=k\frac{m(y_0-y)}{r^3},\quad F_z=k\frac{m(z_0-z)}{r^3},$$

其中 $r=\sqrt{(x_0-x)^2+(y_0-y)^2+(z_0-z)^2}$。不难看出，$F_x, F_y, F_z$ 正是函数

$$u(x, y, z)=k\frac{m}{r}$$

分別对 x, y, z 的偏导数，例如

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{m}{r}\right)=km\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\\&=-k\frac{m}{r^3}\cdot\left(-\frac{x_0-x}{r}\right)=F_x,\end{aligned}$$

由此所求的势函数为 $u=\frac{km}{r}$，从而得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(M)&=\operatorname{grad}\frac{km}{r}=km\operatorname{grad}\frac{1}{r}\\&=km\operatorname{grad}\frac{1}{\sqrt{(x_0-x)^2+(y_0-y)^2+(z_0-z)^2}}.\end{aligned}$$

现在考虑另一种特殊向量場，卽所謂管量場，它的定义为：設一向量場 $\boldsymbol{a}$，若它的散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{a}=0$，这样的向量場就称为管量場，

这場中的向量称作管式向量。根据奥氏公式，若 $\boldsymbol{a}$ 为一管量場，則有(对任何閉曲面 S)

$$\iint_{(S)} a_n\, dS = 0.$$

这式表明在管量場中，向量 $\boldsymbol{a}$ 通过任意閉曲面 S 的向外流量等于零。

现在来証明一个关于管量場的基本性质：任一管式向量 $\boldsymbol{a}$ 通过一向量管的各横截面在同一方向的流量是一常数。这个常数叫做向量管常数。

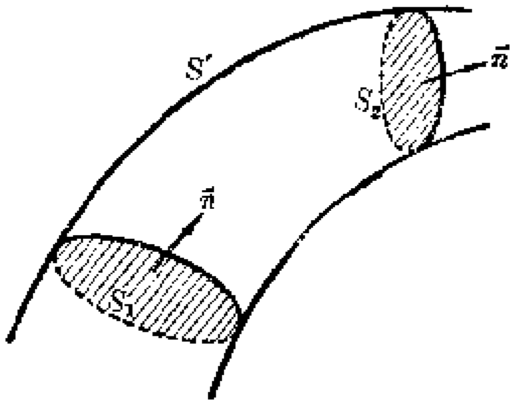


图 3-7-14

証明如下，設 S_1 及 S_2 为所取的向量管的任二横截面，S' 为所截取的这段向量管的側面(图 3-7-14)，于是由剛才所述結果有

$$\iint_{S_1} a_n\, dS + \iint_{S_2} a_n\, dS + \iint_{S'} a_n\, dS = 0,$$

但由于向量 $\boldsymbol{a}$ 在側面的切面中，即 $\boldsymbol{a}$ 在 S' 的向外法綫上的射影 $a_n = 0$，从而有

$$\iint_{S'} a_n\, dS = 0.$$

对于所截取的那段向量管来說，截面 S_1 和 S_2 上的法綫的指向都应向外，因而它們是不同指向的，若将 S_1 的法綫的指向改变，使其与 S_2 上的法綫一致，則得

$$\iint_{S_1} a_n\, dS - \iint_{S_2} a_n\, dS = 0,$$

即

$$\iint_{S_1} a_n\, dS = \iint_{S_2} a_n\, dS,$$

这就証明了上述管量場的性质。

依定义，渦旋向量場 rot $\boldsymbol{a}$ 就是一个管量場，因为 $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})=0$。

习 题

1．利用格林公式計算曲綫积分：

(1) $\oint_l xy^2dx-x^2y\,dy$，l：圓周 $x^2+y^2=a^2$；

(2) $\oint_l (x+y)dx-(x-y)dy$，l：椭圓周 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；

(3) $\oint_l (x+y)^2dx-(x^2+y^2)dy$，$l$：頂点为 $A(1,1)$，$B(3,2)$，$C(2,5)$ 的三角形的边界；

(4) $\int_{\widehat{AM_0}} (e^x\sin y-my)\,dx+(e^x\cos y-m)\,dy$，

其中 $\widehat{AM_0}$ 为由点 $A(a,0)$ 至点 $O(0,0)$ 經过上半圓周 $x^2+y^2=ax$ 的道路，

（提示：添上 x 軸上的綫段 OA 使成閉路）；

(5) $\oint_l e^x[(1-\cos y)\,dx-(y-\sin y)\,dy]$，$l$：区域 $0<x<\pi$，$0<y<\sin x$ 的边界。

2．利用格林公式計算下列曲綫所界面积：

(1) 星形綫：$x=a\cos^3 t$，$y=b\sin^3 t$；

(2) 抛物綫：$(x+y)^2=ax\ (a>0)$ 和 x 軸。

3．若 C 为平面上封閉曲綫，$\boldsymbol{l}$ 为任意方向則

$$\oint_C \cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})\,dS=0,$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 为 C 的外法綫方向。

4．設 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 是具有二阶連續偏导数的函数，并設

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

証明：

(1) $\iint\limits_{(\sigma)} \Delta u\,dx\,dy = \int_{(l)} \frac{\partial u}{\partial n}\,ds$;

(2) $\iint\limits_{(\sigma)} v\,\Delta u\,dx\,dy = -\iint\limits_{(\sigma)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy + \oint_{(l)} v\frac{\partial u}{\partial n}\,ds$;

(3) $\iint\limits_{(\sigma)} (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,dx\,dy = -\int_{(l)} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds$;

其中 σ 为閉曲面，$\frac{\partial v}{\partial n}$ 为沿外法綫方向导数。

5．求积分之值

$$I = \oint_l [x\cos(\boldsymbol{n}, x) + y\cos(\boldsymbol{n}, y)]\,ds,$$

l：包圍有界区域的簡单封閉曲綫，$\boldsymbol{n}$ 为它的外法綫方向。

6．証明：

$$\oint_{(l)} \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r}\,ds = 0,$$

其中 (l) 是一单連通区域 (σ) 的境界而 r 是 (l) 上的一点到 (σ) 外某一定点的距离。若 r 表示 (l) 上一点到 (σ) 内某一定点的距离，那么这积分之値等于 2π.

7．利用奥斯特洛格拉德斯基公式变换以下积分：

(1) $\iint\limits_{(S)} xy\,dx\,dy + xz\,dx\,dz + yz\,dy\,dz$;

(2) $\iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)dS$;

其中 S 包含空間区域 v；$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 是曲面的外法綫方向余弦。

8．利用奥斯特洛格拉德斯基公式計算曲面积分：

(1) $\iint\limits_{(S)} x^2\,dy\,dz + y^2\,dx\,dz + z^2\,dx\,dy$，$S$：立方体 $0 \leqslant x, y, z \leqslant a$ 的外表面；

(2) $\iint\limits_{(S)} x^3\,dy\,dz + y^3\,dx\,dz + z^3\,dx\,dy$，　S：单位球外表面；

(3) $\iint\limits_{(S)} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,dS$，$S$：$x^2 + y^2 = z^2$，$0 \leqslant z \leqslant h$；$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为此曲面外法綫方向余弦。

9．証明：若

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

S 是 v 的境界曲面，則成立下面公式：

(1) $\iiint\limits_{(v)} \Delta u\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{(S)} \frac{\partial u}{\partial n}\,dS$;

(2) $$\iint\limits_{(S)} u\frac{\partial u}{\partial n}\,dS=\iiint\limits_{(v)}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz$$
$$+\iiint\limits_{(v)} u\,\Delta u\,dx\,dy\,dz,$$

式中 u 在 $(v)+(S)$ 上有連續二阶导数，$\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿曲面 S 外法綫方向的导数。

10. 証明由曲面 S 所包圍的体积等于

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_{(S)}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS,$$

式中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 为曲面 S 外法綫方向余弦。

11. 利用斯托克司公式計算曲綫积分：

(1) $\oint_l y\,dx+z\,dy+x\,dz$,　　(l)：圓周 $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=a^2, \\ x+y+z=0, \end{cases}$

从 x 軸正向看去圓周是逆时針方向的；

(2) $\oint_l (z-y)dx+(x-z)dy+(y-x)dz$,　　l：以 $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$, $(0, 0, a)$ 为頂点的三角形。

12. 設在某閉矩形区域 D 内 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，那么

$$U(x, y)=\int_{x_0}^{x} P(x, y)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy+C,$$

其中 $C=U(x_0, y_0)$，为 $P\,dx+Q\,dy$ 的原函数。

13. 計算下列全微分式的綫积分：

(1) $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x-y)(dx-dy)$;

(2) $\int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x+y)(dx+dy)$，式中 $f(u)$ 是連續函数；

(3) $\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\,dx-x\,dy}{x^2}$，沿不和 Oy 軸相交的途徑；

(4) $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$；

(5) $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$，沿不通过原点的途徑；

(6) $\int_{(2,1)}^{(1,2)} \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy$，其中 φ, ψ 为連續函数。

14. 求原函数 u：

(1) $(x^2+2xy-y^2)\,dx + (x^2-2xy-y^2)\,dy$；

(2) $(2x\cos y - y^2\sin x)\,dx + (2y\cos x - x^2\sin y)\,dy$；

(3) $\frac{a}{z}\,dx + \frac{b}{z}\,dy + \frac{-by-ax}{z^2}\,dz$；

(4) $(x^2-2yz)\,dx + (y^2-2xz)\,dy + (z^2-2xy)\,dz$；

(5) $e^x[e^y(x-y+2)+y]\,dx + e^x[e^y(x-y)+1]\,dy$。

15. 令上列表达式皆等于 0，即成为微分方程，試写出其解。

16. 驗証：

$$P\,dx + Q\,dy = \frac{1}{2}\,\frac{x\,dy - y\,dx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$$

(A, B, C 为常数，且 $AC-B^2>0$) 适合条件：

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x};$$

求：关于奇点 $(0, 0)$ 的循环常数。

17. 証明：

$$\int \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$$

关于奇点 $(0, 0)$ 的循环常数为 0，从而 $\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}$ 的积分与道路无关。

18. 証明：

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})] = \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) + \boldsymbol{A}\left(\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\times\boldsymbol{C}\right) + \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{B}\times\frac{d\boldsymbol{C}}{dt}\right).$$

19. 已知場：$v(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$，求沿場 $v(x, y, z)$ 的梯度方向的方向导数。

20. 証明：

(1) $\mathrm{rot}\,(u\boldsymbol{A}) = u\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\,u\times\boldsymbol{A}$；

(2) $\mathrm{div}\,(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}$.

21. 証明：場 $A=yz(2x+y+z)\boldsymbol{i}+xz(x+2y+z)\boldsymbol{j}+xy(x+y+2z)\boldsymbol{k}$ 是势量場并求势量函数。

22. 証明：場 $A=f(r)\boldsymbol{r}$ 是一势量場，其中 $\boldsymbol{r}$ 表示自一定点 O 到 M 点的向量，f 是单值連續函数。

23. 已給数量場 $u=\ln\frac{1}{r}$，其中 $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$，在空間 $Oxyz$ 哪些点，下面等式成立：$|\operatorname{grad} u|=1$。

24. 求 $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})$。

25. 求向量 $\boldsymbol{a}=x^3\boldsymbol{i}+y^3\boldsymbol{j}+z^3\boldsymbol{k}$ 經过球 $x^2+y^2+z^2=1$, $x>0$, $y>0$, $z>0$ 的正八分之一的流量。

26. 求向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}$ 沿螺綫 $\boldsymbol{r}=a\cos t\boldsymbol{i}+a\sin t\boldsymbol{j}+bt\boldsymbol{k}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的一段所作的功。

27. 求向量 $\boldsymbol{a}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$ (c 为常数)的环流量：

(1) 沿圓周 $x^2+y^2=1$, $z=0$;　　(2) 沿圓周 $(x-2)^2+y^2=1$, $z=0$。

第四篇　无穷級数和广义积分

在前三篇里已經叙述了微积分学中最重要的概念和規律：极限論，微分学和积分学。为了更好地掌握所研究的对象，往往需要一些专門工具，无穷級数的理論正是为了这种需要而形成的。它不仅是研究数学理論本身的工具，而且还在物理学、力学和大量的实用科学中被广泛地应用着。

在本篇中，我們用建立无穷級数的同样思想方法来討論广义积分，这两部分虽然在形式上是不一样的，但是它們之間有許多实质上相似的内容，因此在学习时須充分应用比較、对照的方法和統一的观点来掌握它們的联系和差别。

第一章 数項級数

§1 預备知識 上限和下限

由于研究无穷級数的需要，我們先来叙述一点預备知識，即数列的上限和下限。就其內容来說，是属于极限論的范圍。

对于一个数列$\{a_n\}$，去掉它的最初k項以后，剩下来的仍旧是一个数列，記这个数列的上确界为β_k，下确界为α_k，亦即

$$\beta_k=\sup_{n>k}\{a_n\}=\sup\{a_{k+1},\ a_{k+2},\ a_{k+3},\ \cdots\},$$

$$\alpha_k=\inf_{n>k}\{a_n\}=\inf\{a_{k+1},\ a_{k+2},\ a_{k+3},\ \cdots\},$$

令$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$，于是得到一列$\{\beta_k\}$和一列$\{\alpha_k\}$. 显然数列$\{\beta_k\}$是单調减少的，$\{\alpha_k\}$是单調增加的，所以这两个数列的极限皆存在(有限或者无限)，我們称$\{\beta_k\}$的极限H为$\{a_n\}$的上限，$\{\alpha_k\}$的极限h为$\{a_n\}$的下限，并分别記为$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n$. 也就是

$$H=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n=\lim_{k\to\infty}\sup_{n>k}\{a_n\},$$

$$h=\underline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n=\lim_{k\to\infty}\inf_{n>k}\{a_n\},$$

这里H和h可能取有限值，也可能是$+\infty$和$-\infty$. 按上限和下限定义可知：

(1) 任何数列的上限和下限必存在(包括无穷大的情形)，并且下限不大于上限；

(2) 无上界数列其上限为$H=+\infty$，无下界数列其下限为$h=-\infty$. 反之亦成立，即上限$H=+\infty$的数列必无上界，下限$h=-\infty$的数列必无下界。

【証明】 設数列$\{a_n\}$无上界，那么按定义：

$$\beta_k=\sup\{a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots\}=+\infty \quad (k=1, 2, 3, \cdots),$$

于是得知$H=+\infty$。

反之，若数列$\{a_n\}$的上限$H=+\infty$，假設$\{a_n\}$有上界，$a_n\leqslant M$，那么对一切k成立：

$$\beta_k=\sup\{a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots\}\leqslant M,$$

于是$H\leqslant M$。矛盾，証明了$\{a_n\}$无上界。

下面給出上限和下限的重要性质。

定理 1 設

$$H=\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n,$$

則 (i) 当H为有限时，对于H的任何ε邻域$(H-\varepsilon, H+\varepsilon)$，在数列$\{a_n\}$中有无穷多个数属于这个邻域，而只有有限多个数大于$H+\varepsilon$(图 4-1-1)。

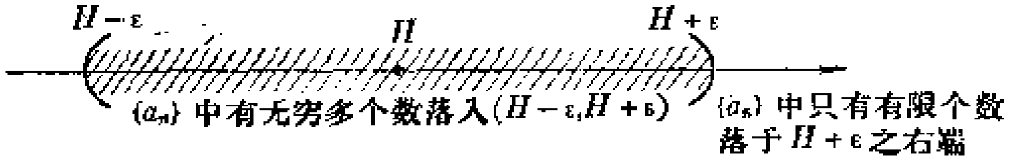


图 4-1-1

(ii) 当$H=+\infty$时，对任何数$N>0$，在$\{a_n\}$中必有无穷多个数大于N。

(iii) 当$H=-\infty$时，数列$\{a_n\}$以$-\infty$为极限。

【証明】 (i) 当$-\infty<H<+\infty$时，假設存在某一正数ε_0，使得在$\{a_n\}$中只有有限多个数大于$H-\varepsilon_0$，那么必存在n_0，当$n>n_0$时，一切a_n皆有$a_n\leqslant H-\varepsilon_0$，于是上确界

$$\beta_n=\sup\{a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}\leqslant H-\varepsilon_0 \quad (n>n_0).$$

因此 $$H=\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\lim_{n\to\infty}\beta_n\leqslant H-\varepsilon_0,$$

矛盾，这就証明了对任何$\varepsilon>0$，在$\{a_n\}$中必有无穷多个数大于

$H-\varepsilon$。

再来証明，在 $\{a_n\}$ 中只有有限多个数大于 $H+\varepsilon$。因为，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=H$，故存在 N，当 $n>N$ 时有 $\beta_n<H+\varepsilon$，而 β_n 又是 $\{a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \cdots\}$ 的上确界，所以当 $n>N$ 时就有 $a_{n+k}\leqslant\beta_n<H+\varepsilon$，这样就証明了大于 $H+\varepsilon$ 的 a_n 只有有限多个。

(ii) 当 $H=+\infty$ 时，数列 $\{a_n\}$ 必无上界，由此便获得定理的結論(ii)。

(iii) 当 $H=-\infty$ 时，对任何 $G>0$，存在 n_0，当 $n>n_0$ 时

$$a_{n+1}\leqslant\beta_n<-G.$$

这表明 $\{a_n\}$ 的极限为 $-\infty$。

到此定理全部証毕。

定理2 設

$$h=\varliminf_{n\to\infty}a_n,$$

則 (i) 当 h 为有限时，对 h 的任何 ε 邻域 $(h-\varepsilon, h+\varepsilon)$，在数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多个数属于这个邻域，而只有有限多个数小于 $h-\varepsilon$。

(ii) 当 $h=-\infty$ 时，对任何数 $N>0$，在数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多个数小于 $-N$。

(iii) 当 $h=+\infty$ 时，数列 $\{a_n\}$ 的极限为 $+\infty$。

証明与定理1完全相仿。

∨**定理3** 設 H 为 $\{a_n\}$ 的上限，那么，H 必是 $\{a_n\}$ 中所有收斂子列的极限中的最大値。設 h 为 $\{a_n\}$ 的下限，那么，h 必是 $\{a_n\}$ 中所有收斂子列的极限中的最小値。

【証明】 仅以上限 H 来証明如下。

若 H 为 $\{a_n\}$ 的上限，分三种情形来考察：

(i) $-\infty<H<+\infty$，由定理1知道，必有一个子列 a_{n_k} 收斂于 H，此外，对任意 $\varepsilon>0$，在 $\{a_n\}$ 中只可能有有限多个数大于

$H+\varepsilon$,这就表明所有收斂子列的极限决不会大于 $H+\varepsilon$,再由 ε 的任意性,便得到所有收斂子列的极限必不大于 H。

(ii) 当 $H=+\infty$ 时,按定理 1,存在子列 $a_{n_k}\to+\infty$,而其他一切收斂子列的极限当然不会大于 $+\infty$。

(iii) 当 $H=-\infty$ 时,此时 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$,故数列 $\{a_n\}$ 的一切子列皆有极限 $-\infty$。

这样便証明了定理。

由这个定理立即可以获得以下推論。

推論 1 由任何数列 $\{a_n\}$ 的所有收斂子列的极限所組成的数集 E 中必有最大值和最小值(有限或者无穷大)。

这是因为任何数列的上限 H 和下限 h 必存在(有限或者无穷大),再由剛才証明的定理,此 H 和 h 就是数集 E 的最大值和最小值。

推論 2 定理的逆命題亦成立。即一个数列的所有收斂子列的极限中的最大值必为該数列的上限,最小值为該数列的下限。

这是因为所有收斂子列的极限中最大值和最小值必存在,如果它們不是該数列的上限和下限,将得出矛盾。

推論 3 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$(有限或无穷大)的充要条件为:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n=A.$$

这个推論容易从定理 3 得到。

定理 3 給出了求数列上(下)限的一种方法。那就是求出 $\{a_n\}$ 中所有收斂子列的极限,其中的最大值(它一定存在)就是 $\{a_n\}$ 的上限,最小值就是 $\{a_n\}$ 的下限。

[例 1] $a_n=n+(-1)^n n\quad(n=1,2,3,\cdots)$.

它有两个具有极限的子数列(包括极限为 ∞ 的情形):a_{2k} 和 a_{2k+1} $(k=1,2,3,\cdots)$. 前者极限为 ∞,后者极限为 0,于是:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \infty, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = 0.$$

[例 2] $a_n = \cos\frac{n}{4}\pi \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$.

由于当 $n=8k$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$ 时 $a_{8k}\to 1$ $(k\to\infty)$. 而当 $n=4(2k+1)$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$ 时，$a_{4(2k+1)}\to -1$ $(k\to\infty)$. 并且 $|a_n|\leqslant 1$. 于是有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = 1, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = -1.$$

§2 級数的收斂性及其基本性质

所謂无穷級数，就是指有一系列无穷多个数 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$，写成

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

就称为无穷級数，記为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. 这仅仅是一种形式上的相加，这种加法是不是具有"和数"呢？这个"和数"的确切意义又是什么呢？为了回答这个問題，我們先令

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1+u_2, \quad S_3 = u_1+u_2+u_3, \quad \cdots,$$

$$S_n = u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad \cdots,$$

这样，对任何一个无穷級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，我們总可以作出一个数列 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$，并称 S_n 为級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 n 次部分和(簡称部分和)，称数列 $\{S_n\}$ 为級数的部分和数列。反之，从一个数列 $\{S_n\}$，也可以作出一个級数，使这个級数的部分和数列恰恰就是 $\{S_n\}$，实际上这只要取

$$u_1 = S_1, \quad u_2 = S_2 - S_1, \quad u_3 = S_3 - S_2, \quad \cdots,$$

$$u_n = S_n - S_{n-1}, \quad \cdots,$$

而級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 就是所要求的級数。

下面我們来給出无穷級数是否具有"和数"的确切定义。

定义 若級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收斂于有限值 S，即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = S,$$

則称級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收斂，收斂于 S，記为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S,$$

也称此值 S 为級数的和数。若部分和数列 $\{S_n\}$ 发散，則称級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。当級数收斂时，又称

$$r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots$$

为級数的余和。

由此可見，研究无穷級数的收斂問題，实质上就是研究部分和数列的收斂問題，这就使得我們能够应用已經熟知的有关数列极限的若干性质来推得級数的若干性质。

首先，我們給出收斂級数的一些基本性质。

性质 1 若級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收斂，a 为任一常数，則 $\sum_{n=1}^{\infty} au_n$ 亦收斂，并且有：

$$\sum_{n=1}^{\infty} au_n = a\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

【証明】 設級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 S_n，由假設

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

S 为一有限数。又設級数 $\sum_{n=1}^{\infty} au_n$ 的部分和为 S'_n，显然有 $S'_n = aS_n$，再按数列极限性质知道

$$\lim_{n\to\infty} S'_n = \lim_{n\to\infty} aS_n = aS,$$

这就是
$$\sum_{n=1}^{\infty} av_n = aS = a\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$
証毕。

性质 2 若两个級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 皆收斂，則 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收斂，并且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

【証明】 設級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和分别为 S_n，U_n，V_n，显然有

$$S_n = U_n \pm V_n.$$

再按已知条件，数列 $\{U_n\}$ 和 $\{V_n\}$ 的极限均存在，所以

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(U_n \pm V_n) = \lim_{n\to\infty} U_n \pm \lim_{n\to\infty} V_n.$$

这正是所要証明的結論。

性质 3 一个收斂級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，对其項任意加括号后所成級数仍为收斂，且其和不变。

【証明】 設 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$，那么加括号后的級数的部分和数列 $\{A_n\}$ 有

$$A_1 = u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1} = S_{i_1},$$

$$A_2 = (u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + u_{i_1+2} + \cdots + u_{i_2}) = S_{i_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$A_n = (u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + u_{i_1+2} + \cdots + u_{i_2}) + \cdots + (u_{i_{n-1}+1} + u_{i_{n-1}+2} + \cdots + u_{i_n}) = S_{i_n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

可見，$\{A_n\}$ 实际上是 $\{S_n\}$ 的一个子数列，故由 $\{S_n\}$ 的收斂性立即推得 $\{A_n\}$ 也收斂，且其极限值相同。

【注意】 加括号后的級数为收斂时，不能断言原来未加括号的級数也是收斂的。例如

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

收斂于零，但級数

$$1-1+1-1+1-1+\cdots$$

是发散的。不过在某些特別假定之下，若加括号后的級数收斂，却能断定原来的級数亦收斂(参見习題 16)。

性质 4 (收斂的必要条件) 若級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收斂，則 $u_n\to 0$ $(n\to\infty)$.

【証明】 設級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$，由于

$$u_n=S_n-S_{n-1},$$

得
$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0.$$

【注意】 一般項 u_n 趋于零只是級数收斂的必要条件，但不是充分条件。例如級数

$$1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}_{\text{共 2 項}}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}_{\text{共 3 項}}+\cdots+\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{\text{共 } n \text{ 項}}+\frac{1}{n+1}+\cdots,$$

它的一般項 $u_n\to 0$ $(n\to\infty)$，但此級数是发散的，这是因为，如果这个級数是收斂的，那么加括号后

$$1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{n+1}+\cdots\right)+\cdots,$$

它也应該是收斂的(性质 3)，但这个加括号后的級数却是发散的。

性质 4 虽然不是級数收斂的充分条件，但它在判断一个級数是否收斂的問題中仍旧起相当大的作用，当我們考察一个級数是

否收斂时，一般地，我們首先应該考察这个級数的一般項 u_n 当 n 趋于无穷时它是否趋于零。如果 u_n 不趋于零，那么立即可以断定这个級数是发散的。

上面我們給出了收斂級数的若干基本性质，但我們要問究竟怎样判断一个級数的收斂性或发散性(簡称斂散性)呢？在以下的各节中，將給出各种各样的常用的判别方法，利用这些判别法就能够有效地判断相当广泛的一类級数的斂散性。这些判别法所依据的基本原理是下面的柯西收斂原理。

定理(柯西收斂原理) 級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收斂的充分和必要条件为：对任意給定的正数 ε，总存在 N，使得当 $n>N$ 时，对于任意的自然数 $p=1, 2, 3, \cdots$，都成立着

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon.$$

这个充要条件也可以换一种方式来叙述：对任意給定的正数 ε，总存在 N，使得对于任何两个大于 N 的自然数 m 及 n (不妨假設 $n<m$)，亦即 $m>N$, $n>N$，都成立

$$|S_m-S_n|=|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{m}|<\varepsilon,$$

这里 S_n 为級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和。

定理的証明是很明显的，因为这就是数列 $\{S_n\}$ 收斂的充分和必要条件(亦即数列的柯西收斂原理。数列的完备性定理)。

从这个定理出发，容易推出下面两个有用推論。这两个推論都請讀者利用收斂原理自行証明。

推論 1 若級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收斂，則 $u_n\to 0$ $(n\to\infty)$.

这就是我們已經知道的性质。

推論 2 在級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 内添上或去掉有限項，不会影响此級数的斂散性。

[例 1] 利用收斂原理来判断級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的收斂性。

因为对任何自然数 p,

$$|S_{n+p}-S_n|=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}$$
$$<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$
$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n},$$

于是对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, 当 $n>N$ 时, 对任何 $p=1, 2, 3, \cdots$, 总成立

$$|S_{n+p}-S_n|<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

按收斂原理, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收斂。

[例 2] 判别級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散。

考虑 $$|S_{n+p}-S_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}$$
$$>\frac{1}{n+p}+\frac{1}{n+p}+\cdots+\frac{1}{n+p}\quad(\text{共 } p \text{ 項})$$
$$=\frac{p}{n+p},$$

今特别取 $p=n$, 得

$$|S_{2n}-S_n|>\frac{1}{2},$$

故級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 必为发散。这是因为如果取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$, 不論 N 怎样的大, 总不能使

$$|S_{2n}-S_n|<\frac{1}{2}.$$

[例 3] 証明級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收斂。

对任何自然数 p，有：

$$|S_{n+p}-S_n|=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots$$
$$+(-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n+1},$$

于是，对任意正数 ε，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，那么当 $n>N$ 时，总成立

$$|S_{n+p}-S_n|<\frac{1}{n+1}<\varepsilon.$$

故級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收斂。

最后还要指出，在实际問題中利用收斂原理来判断級数的斂散性，往往是相当困难的，所以在級数的理論中还須要建立一系列的判别法，利用它們就可以比較簡便地来判别相当广泛的一类級数的斂散性。建立这些判別法，是以下各节主要任务之一。

§3 正 項 級 数

每一項都是非負的級数称为正項級数。本节专門考慮正項級数的收斂問題，并建立若干最常用的判别法。

設正項級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ $(u_n\geqslant 0,\ n=1,2,3,\cdots)$ 的部分和为 S_n，显然部分和数列 $\{S_n\}$ 为单調增加的，也就是：

$$S_1\leqslant S_2\leqslant S_3\leqslant\cdots\leqslant S_n\leqslant\cdots,$$

我們已經知道，如果这个数列具有上界，那么它的极限必存在。如果这个数列沒有上界，那么它发散到 $+\infty$。根据这一基本事实，我們便获得正項級数收斂的基本定理。

基本定理 如果正項級数的部分和数列具有上界，則此級数

收斂。如果正項級数的部分和数列无上界，則此級数发散到 $+\infty$。

由基本定理出发，我們立即可以建立一个基本的判別法。

正項級数的比較判別法

若两个正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 之間成立着关系：存在常数 $c>0$，使

$$u_n \leqslant c v_n \quad (n=1, 2, 3, \cdots),$$

或者自某項以后(即存在 N，当 $n>N$ 时)成立以上关系式，那么：

(i) 当級数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收斂时，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 亦收斂。

(ii) 当級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 亦发散。

这个判別法是容易証明的，設 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和分別为 U_n 和 V_n，于是成立着 $U_n \leqslant c V_n$，当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收斂时，V_n 为有界，故 U_n 亦必有界，得知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收斂。当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时，U_n 无上界，于是 V_n 亦无上界，故 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。

下面給出比較判別法的极限形式，它在应用时更为方便些。

比較判別法的极限形式：

設两正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，若有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \quad (0<l<+\infty),$$

那么这两个級数同时收斂或同时发散。

利用极限存在的定义，立即可証明此結論，为此，取 $\varepsilon=\frac{l}{2}$，則存在 N，当 $n>N$ 时成立着

$$\left(l-\frac{l}{2}\right)v_n < u_n < \left(l+\frac{l}{2}\right)v_n$$

再利用比較判别法，便証明了結論。

又当 $l=0$ 或 $l=+\infty$ 时的情形，可参見习題10。

[例 1]　判别級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 为收斂或发散。因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1,$$

而級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的，由比較判别法知道，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 亦发散。

利用比較判别法，把要判定的級数与几何級数比較，就可建立以下两个很有用的判别法，卽柯西判别法和达朗貝尔 (J. d'Alembert) 判别法。

柯西判别法

設 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正項級数。若从某一項起(卽存在 N，当 $n>N$ 时)成立着 $\sqrt[n]{u_n}\leqslant q<1$ (q 为某确定的常数)，則級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收斂。若从某一項起成立着 $\sqrt[n]{u_n}\geqslant1$，則級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

【証明】　若当 $n>N$ 时成立 $\sqrt[n]{u_n}\leqslant q<1$，那么有

$$u_n\leqslant q^n.$$

而級数 $\sum_{n=1}^{\infty}q^n$ $(q<1)$是收斂的，再根据比較判别法得知 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 亦收斂。

若当 $n>N$ 时成立 $\sqrt[n]{u_n}\geqslant1$，那么有

$$u_n\geqslant1$$

因此級数的一般項 u_n 不趋于零，故級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

这个判别法也可写成如下的极限形式。

柯西判别法的极限形式：

对于正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，設

$$r=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n},$$

那么，当 $r<1$ 时此級数必为收斂，当 $r>1$ 时为发散，而当 $r=1$ 时此級数的斂散性須进一步判定。

【証明】 (i) 先証明当 $r<1$ 时的情形。

由于 $r<1$，总可选取适当小的一个正数 ε_0 使 $r+\varepsilon_0<1$. 再按照 §1 上(下)限的定理1，在数列 $\{u_n\}$ 中只有有限多个数它的 n 次根大于或等于 $r+\varepsilon_0$，換句話說，存在自然数 N，当 $n>N$ 时有

$$\sqrt[n]{u_n}<r+\varepsilon_0<1.$$

应用剛才已經証明的柯西判別法，这里 $q=r+\varepsilon_0$，立即得知，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收斂。

(ii) 再証明 $r>1$ 时的情形。

由于 $r>1$，总可选取适当小的一个正数 ε_0 使 $r-\varepsilon_0>1$. 再按照 §1 上(下)限定理1，在数列中将有无穷多个数，它的 n 次根大于或等于 $r-\varepsilon_0$，換句話說，将有无穷多个如此的 u_n (記它們为 u_{n_k} $(k=1, 2, 3, \cdots)$)使得

$$u_{n_k}>(r-\varepsilon_0)^n>1.$$

于是，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的一般项 u_n 必不趋于零，証明了此級数发散。

(iii) 最后証明 $r=1$ 时的情形。为了表明級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的斂散性，尚須进一步判定，我們举两个例子說明之。例如級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ 和 } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

这两个級数的 r 皆等于1，但前者发散，后者收斂。

达朗貝尔判別法

設 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正項級数，若从某一項起成立着 $\frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant q < 1$（$q$ 为确定的数，$n > N$），則級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收斂。若从某一項起 $\frac{u_n}{u_{n-1}} \geqslant 1$，（$n > N$），則級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

【証明】 不妨假定从第二項起，即 $n \geqslant 2$ 有 $\frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant q < 1$，并且 $u_1 > 0$，故

$$u_n \leqslant q u_{n-1} \leqslant q^2 u_{n-2} \leqslant \cdots \leqslant q^{n-1} u_1,$$

由于 $q < 1$，所以級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_1 q^{n-1}$ 收斂，再根据比較判別法得知級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 亦收斂。

若从某一項起（$n > N$），$\frac{u_n}{u_{n-1}} \geqslant 1$，則对一切 $n > N$，皆有

$$u_n \geqslant u_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant u_{N+1} > 0.$$

于是当 $n \to \infty$ 时，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的一般項 u_n 将不趋于零，故此級数发散。

在实际应用上，下面的极限形式往往显得更方便些。

达朗貝尔判別法的极限形式：

对于正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，当

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{u_n}{u_{n-1}} = \bar{r} < 1$$

时，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收斂。当

$$\underline{\lim_{n \to \infty}} \frac{u_n}{u_{n-1}} = \underline{r} > 1$$

时，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。而当

$$\bar{r} = 1 \text{ 或者 } \underline{r} = 1$$

时，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的斂散性須进一步判定。

【証明】 (i) 先証明当 $\overline{r}<1$ 时的情形。

由于 $\overline{r}<1$，总可选取适当小的正数 ε_0，使 $\overline{r}+\varepsilon_0<1$。再按照§1 上(下)限的定理 1，在数列 $\left\{\frac{u_n}{u_{n-1}}\right\}$ 中除去有限多个数而外，皆小于 $\overline{r}+\varepsilon_0$。換句話說，存在自然数 N，当 $n>N$ 时，成立

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}<\overline{r}+\varepsilon_0<1.$$

应用已經証明的达朗貝尔判别法，这里 $q=\overline{r}+\varepsilon_0<1$，故級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收斂。

(ii) 再証明当 $\underline{r}>1$ 时的情形。

由于 $\underline{r}>1$，总可选取适当小的正数 ε_0 使 $\underline{r}-\varepsilon_0>1$，再按照§1 上(下)限定理 1，在数列 $\left\{\frac{u_n}{u_{n-1}}\right\}$ 中除去有限多个数而外，皆大于 $\underline{r}-\varepsilon_0$，換句話說，存在自然数 N，当 $n>N$ 时，成立

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}>\underline{r}-\varepsilon_0>1.$$

应用达朗貝尔判别法，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为发散的。

(iii) 最后，我們来表明，当 $\overline{r}=1$ 或 $\underline{r}=1$ 时，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的斂散性却須进一步判定之。为此，举以下两个例子，設两級数：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ 和 } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

它們的 $\overline{r}=\underline{r}=1$，但前者发散，后者收斂。

[例 2] 判定級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^n$，$(\alpha>0)$ 的斂散性。

因为
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{\alpha}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{n}=0,$$

根据柯西判别法的极限形式，此时 $r=0<1$，故級数收斂。

[例 3] 考察級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n^s}$ $(s>0,\ \alpha>0)$ 的斂散性。由于（应

用达朗貝尔判别法)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n-1}}{(n+1)^s}\cdot\frac{n^s}{\alpha^n}=\alpha\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^s=\alpha,$$

因此，当 $\alpha<1$ 时級数收斂。当 $\alpha>1$ 时級数发散。而当 $\alpha=1$ 时，級数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$，它的斂散性須要进一步判断(参見本节例5)。

[例4]　考察級数 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ $(x\geqslant 0)$ 的斂散性。

因为
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n}=x.$$

按照柯西判别法，当 $x<1$ 时級数收斂，当 $x>1$ 时級数发散。而当 $x=1$ 时，級数为 $1+1+1+\cdots$，显然是发散的。

柯西积分判别法　設正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的一般項为単調減少的，作一个連續的単調減少的正值函数 $f(x)$ $(x>0)$，使得当 x 等于自然数 n 时，其函数值恰为 u_n，亦即 $f(n)=u_n$。那么，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与数列 $\{A_n\}$，这里 $A_n=\int_1^n f(x)\,dx$，同为收斂或同为发散。

【証明】(图4-1-2)　由于

$$u_{k-1}=\int_{k-1}^{k}u_{k-1}dx\geqslant\int_{k-1}^{k}f(x)\,dx\geqslant\int_{k-1}^{k}u_kdx=u_k,$$

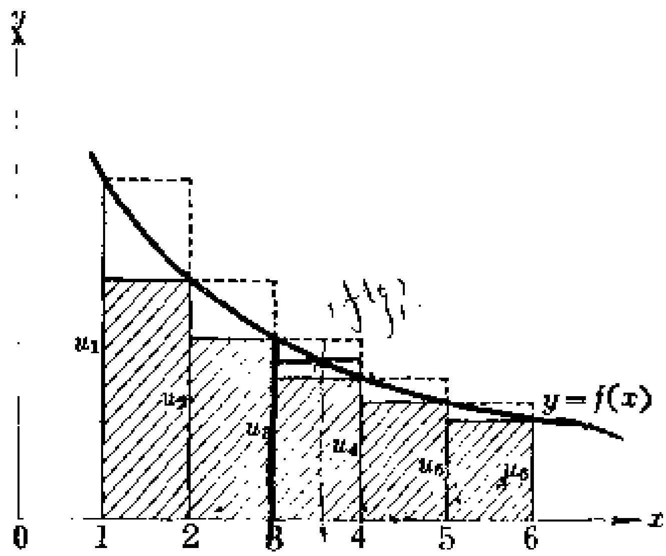


图　4-1-2

所以 $$\sum_{k=2}^{n} u_{k-1} \geqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx = \int_{1}^{n} f(x)\,dx \geqslant \sum_{k=2}^{n} u_k.$$

由此卽得証明。

柯西积分判别法有一个簡单的几何解释（图 4-1-2）：积分 $\int_1^n f(x)\,dx$ 为在曲綫 $y=f(x)$ 之下，区間 $[1, n]$ 之上的一块面积，而"广义"积分 $\int_1^{\infty} f(x)dx$ 可以看作当图形无限向右端延伸时面积的表达式。另一方面，級数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n$ 表示无限多个小矩形的面积之和，这些小矩形的高为 u_n，底边长为 1，皆位于曲綫 $y=f(x)$ 之下，亦卽图中阴影部分。而級数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 則为另外一些小矩形面积之和，这些小矩形的高为 u_{n+1}，底边长为 1。由此可見，級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是曲綫 $y=f(x)$ 上接矩形面积之和，而級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$ 为曲綫 $y=f(x)$ 下接矩形面积之和，这就使得上面所确定的結果完全可从直观上来了解：如果曲綫图形的面积是有限的，那么包含在它的下面的下接矩形面积之和也将为有限的，此卽級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收斂。反之，若曲綫图形的面积是无穷的，那么包含这曲綫图形的上接矩形的面积之和也将为无穷的，此卽級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为发散。

［例 5］ 考察級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 的斂散性 $(s>0)$，这个級数称为調和級数。

作 $f(x)=\frac{1}{x^s}$，考虑积分 $(s\neq 1)$：

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^s}\,dx = \frac{1}{1-s} \lim_{n\to\infty} (n^{1-s}-1)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{s-1}, & \text{当 } s>1, \quad (\text{收斂}) \\ \infty, & \text{当 } s<1. \quad (\text{发散}) \end{cases}$$

而当 $s=1$ 时，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的。因此得到調和級数，当 $0<s\leq 1$ 时为发散，当 $s>1$ 时为收斂。

[例 6]　証明級数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散，級数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ 收斂。

因为

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\int_2^n\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{n\to\infty}[\ln\ln n-\ln\ln 2]=\infty,$$

所以級数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 为发散。又因为

$$\lim_{n\to\infty}\int_2^n\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln n}\right)=\frac{1}{\ln 2},$$

所以級数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ 为收斂。

§4　任意項級数的收斂判別法

現在我們来討論正負項可以任意出現的級数的收斂問題。

一、絕对收斂級数

对于級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，如果将其每一項加上絕对值以后所組成的正項級数收斂的話，亦就是級数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收斂，則称級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为絕对收斂。如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散但 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 却是收斂的，則称級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为条件收斂。条件收斂的級数是存在的，例如級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 就是一个条件收斂級数（参見 §2 例 1，例 3）。

絕对收斂和收斂之間有着下面的重要关系：

定理　絕对收斂級数必为收斂級数，但反之不然。

【証明】　設級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为絕对收斂，也就是級数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收斂，按照柯西收斂原理，对任意 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，对一切自然

数 p 成立着

$$|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\cdots+|u_{n+p}|<\varepsilon,$$

于是

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|\leq|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\cdots+|u_{n+p}|<\varepsilon.$$

再根据柯西收斂原理，級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为收斂。

定理的第二个論断：反之不然，可以由例題 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 得知。

从定义可見，判别一个級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是否絕对收斂，实际上就是判别一个正項級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 的收斂性。当級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收斂时，按定义，級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 就是一个絕对收斂級数。再由剛才的定理知道，此时，級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 本身也必为收斂的，例如級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 就是一个收斂級数。这就說明了，对于一个任意項的級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收斂的話，那么級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为絕对收斂（必然为收斂）。絕对收斂級数还有若干重要性质，将在 §5 中給出。

但要特别加以注意的是，当級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 为发散时，我們只能断定級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 非絕对收斂，但不能断定它必为发散，例如級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|$ 虽然是发散的，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 却是收斂的。因此即使在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散的前提下，仍旧有两种可能性产生，一种是級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散，一种是級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收斂。这就說明，当我們判断出級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 为发散时，还得进一步重新判断級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的斂

散性，若它为收斂，就是条件收斂。

但当我們运用已經給出的柯西判别法和达朗貝尔判别法来判别正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 而获得 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 为发散时，我們却可以断言，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 亦发散，这是因为利用柯西判别法和达朗貝尔判别法来判定一个正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 为发散时，是由于这个級数的一般項 $|u_n|$ 当 $n\to\infty$ 时不趋于零，因此对級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 而言，它的一般項 u_n 当 $n\to\infty$ 时也不会趋于零，所以級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是发散的。

[例 1]　判别級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}x^n\ (x>0)$ 的斂散性。

考察級数
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}x^n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},$$
由达朗貝尔判别法判出：当 $x<1$ 时級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 收斂，而当 $x>1$ 时級数为发散。因此可以断言：

当 $x<1$ 时，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$ 絕对收斂；

当 $x>1$ 时，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$ 发散；

而当 $x=1$ 时，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$ 发散而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收斂，故为条件收斂。

二、交錯級数

凡正負項相間的級数，也就是形如
$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n+1}u_n+\cdots\quad(u_n>0;\ n=1,\ 2,\ \cdots)$$
的級数，称为交錯級数。

对于交錯級数，有下面的簡单定理。

萊伯尼茲定理　如果一个交錯級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n\ (u_n>0,\ n=1,2,3,\cdots)$ 的項滿足以下两个条件：

(i) 单調減少 $u_{n+1}\leqslant u_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$。

則 1° 級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 收斂,

2° 它的余和 r_n 的符号和余和第一項的符号相同,并且余和的絕对值不超过余和的第一項的絕对值 $|r_n|\leqslant u_{n+1}$。

(注) 凡滿足定理条件(i),(ii)的交錯級数均称为萊伯尼茲型級数。于是定理又可以这样叙述:萊伯尼茲型的級数必收斂,且其余和的符号相同于余和第一項的符号,余和的絕对值不超过余和第一項的絕对值。

【証明】 設級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 的部分和为 s_n,我們現在來考察由偶数个項所組成的部分和数列 $\{s_{2m}\}$ 及由奇数个項所組成的部分和数列 $\{s_{2m+1}\}$.

对于偶数个項的部分和数列 $\{s_{2m}\}$ 有

$$s_{2m}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2m-1}-u_{2m}),$$

$$s_{2m+2}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2m-1}-u_{2m})+(u_{2m+1}-u_{2m+2}).$$

由于定理的条件(i),即对一切 n 成立 $u_{n-1}-u_n\geqslant 0$,所以数列 $\{s_{2m}\}$ 为单調增加的数列。另一方面

$$s_{2m}=u_1-(u_2-u_3)-\cdots-(u_{2m-2}-u_{2m-1})-u_{2m}\leqslant u_1,$$

可見数列 $\{s_{2m}\}$ 是有界的。按照单調有界数列必有极限的定理,数列 $\{s_{2m}\}$ 极限存在

$$\lim_{m\to\infty}s_{2m}=s.$$

对于奇数个項的部分和数列 $\{s_{2m+1}\}$ 有

$$s_{2m+1}=s_{2m}+u_{2m+1},$$

再由定理的条件(ii),得到

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m-1} = \lim_{m\to\infty} s_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = s.$$

这样一来，我們証明了对数列 $\{s_n\}$ 而言，它的两个子列 $\{s_{2m}\}$ 及 $\{s_{2m+1}\}$ 均收斂于 s，那么（参見第一篇第二章数列極限性质）数列 $\{s_n\}$ 本身亦应收斂于 s，到此便証明了定理的第一个論断，萊伯尼茲型級数必收斂。

由剛才的証明容易知道，对于萊伯尼茲型的級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 必有

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n \leqslant u_1.$$

同样地，对于型如 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 的萊伯尼茲型的級数，只要乘上一个 -1 的因子，就得到

$$-u_1 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n \leqslant 0.$$

这样便获得了一个重要事实：萊伯尼茲型的級数，其和的符号相同于这个級数的第一項的符号，其和的絕对值将不超过第一項的絕对值。

利用这一事实，立即可以証明定理的第二个論断：因为萊伯尼茲型級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 的余和 $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}u_k$ 也是一个萊伯尼茲型級数，所以余和 r_n 的符号相同于余和中第一項的符号，并且 $|r_n| \leqslant u_{n+1}$。到此，定理全部証明完毕。

[例 2] 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ $(s>0)$ 是一个萊伯尼茲型的級数，因此它是收斂的。再利用柯西积分判别法知道，当 $s>1$ 时，級数絕对收斂，而当 $0<s\leqslant 1$ 时級数条件收斂。

[例 3] 考虑級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\alpha)^n}{n^s}$ $(s>0, \alpha>0)$。

应用达朗貝尔判别法（参見本章 §3 例 3），当 $\alpha<1$ 时級数絕对收斂，当 $\alpha>1$ 时級数发散。而当 $\alpha=1$ 时級数是一个萊伯尼茲

型級数，和例 2 的差一符号，此时当 $s>1$ 为絕对收斂，当 $s\leqslant 1$ 为条件收斂。总結之，得

当 $\alpha<1$ 时，級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-\alpha)^n}{n^s}$ $(s>0,\alpha>0)$ 絕对收斂；

当 $\alpha>1$ 时，級数发散；

当 $\alpha=1$，而 $s>1$ 时，級数絕对收斂；

当 $\alpha=1$，而 $s\leqslant 1$ 时，級数条件收斂。

三、阿貝尔(Abel)判别法和狄利克来判别法

先引进一个重要的变換。

阿貝尔变换 为了求和数：

$$s=\sum_{i=1}^{m}a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_mb_m,$$

阿貝尔給出了一个初等的变换。引进和数：

$$B_1=b_1,\quad B_2=b_1+b_2,\quad B_3=b_1+b_2+b_3,\quad \cdots,$$
$$B_m=b_1+b_2+\cdots+b_m.$$

于是

$$b_1=B_1,\quad b_2=B_2-B_1,\quad b_3=B_3-B_2,\quad \cdots,\quad b_m=B_m-B_{m-1}.$$

这样，就可以把和数写为：

$$\begin{aligned}s&=\sum_{i=1}^{m}a_ib_i\\&=a_1B_1+a_2(B_2-B_1)+a_3(B_3-B_2)+\cdots+a_m(B_m-B_{m-1})\\&=(a_1-a_2)B_1+(a_2-a_3)B_2+\cdots+(a_{m-1}-a_m)B_{m-1}+a_mB_m\\&=\sum_{i=1}^{m-1}(a_i-a_{i+1})B_i+a_mB_m,\end{aligned}$$

这个变换式

$$\sum_{i=1}^{m}a_ib_i=\sum_{i=1}^{m-1}(a_i-a_{i+1})B_i+a_mB_m,$$

就是我們所要的阿貝尔变换。讀者不妨将这个公式改写为

$$\sum_{i=1}^{m}a_ib_i=a_mB_m-\sum_{i=1}^{m-1}(a_{i+1}-a_i)B_i,$$

并将它与积分学中分部积分公式加以比較。它們之間有着很相象的地方。在这里，以差数代替了微分号，而以和数代替了积分号。

以这个变换公式为基础，就可以給出一种对和数 s 作估計的方法，就是下面的阿貝尔引理。

阿貝尔引理　如果：

(i) a_i $(i=1, 2, \cdots, m)$ 为单调的，亦即

$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\cdots\leqslant a_m$ 或者 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots\geqslant a_m$。

(ii) B_i $(i=1, 2, \cdots, m)$ 有界，$|B_i|\leqslant M$，

則
$$|s|=\left|\sum_{i=1}^{m}a_ib_i\right|\leqslant M(|a_1|+2|a_m|).$$

【証明】　利用阿貝尔变换

$$|s|=\left|\sum_{i=1}^{m}a_ib_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{m-1}|a_i-a_{i+1}|\cdot|B_i|+|a_mB_m|,$$

由于每一个 a_i-a_{i+1} $(i=1, 2, \cdots, m-1)$ 都是同符号的，又 $|B_i|\leqslant M$ $(i=1,2,3,\cdots,m)$，于是有

$$\begin{aligned}|s|&\leqslant M\cdot\left|\sum_{i=1}^{m-1}(a_i-a_{i+1})\right|+M\cdot|a_m|\\&\leqslant M(|a_1|+2|a_m|).\end{aligned}$$

推論　如果 $a_i\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 并且 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots\geqslant a_m$，那么

$$|s|\leqslant Ma_1.$$

下面，我們将应用这个估計来建立比莱伯尼兹判别法更为普遍的收斂判别法——阿貝尔判别法和狄利克来判别法。这两个判别法都是用来判别級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n+\cdots$$

的收斂性的。

阿貝尔判别法　如果：

(i) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收斂,

(ii) 数列 $\{a_n\}$ 单調有界 $|a_n| \leqslant K \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$,

則級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收斂。

【証明】 利用阿貝尔引理来估計和数

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k = \sum_{i=1}^{m} a_{n+i} b_{n+i},$$

由条件(i),級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是收斂的,按照收斂原理,对任何 $\varepsilon>0$,存在 N,使当 $n>N$ 时,对不論怎样的自然数 p,成立

$$|b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+p}|<\varepsilon,$$

因而,可以取这个 ε 为引理中提到的数 M,于是当 $n>N$ 时,对任何自然数 m,应用引理,有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k\right| \leqslant \varepsilon(|a_{n+1}|+2|a_{n+m}|) \leqslant 3K\varepsilon.$$

这样便証明了級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收斂。

狄利克来判别法 如果:

(i) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和 B_n 有界,$|B_n| \leqslant M \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$,

(ii) 数列 $\{a_n\}$ 单調趋于零,

則級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收斂。

【証明】 仍旧应用阿貝尔引理来估計和数 $\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k$。由条件(ii)$a_n \to 0 \quad (n\to\infty)$,对任意給定正数 ε,存在 N,当 $n>N$ 时,有

$$|a_n|<\varepsilon.$$

此外,由于条件(i),显然有

$$|b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+p}| = |B_{n+p}-B_n| \leqslant 2M.$$

于是引理中的数 M 就是这里的 $2M$,所以当 $n>N$ 时,对任何自然数 m 成立

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k\right| < 2M(|a_{n+1}|+2|a_{n+m}|) < 6M\cdot\varepsilon,$$

証明了級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 的收斂性。

这两个判别法还有着下面的关系：从狄利克来判别法可以推导出阿貝尔判别法，事实上，由阿貝尔判别法的假設可以知道数列 $\{a_n\}$ 极限存在，設此极限为 a. 如今考虑两个級数的和：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a)b_n+a\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

第二个級数，由阿貝尔判别法的假設，它是收斂的，而第一个級数适合狄利克来判别法的假設，它也是收斂的。这两个級数的和正是級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$，因此它是收斂的。

另外，萊伯尼茲定理也可以作为狄利克来判别法的一个特别推論，这是因为，对于萊伯尼茲型的級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$，也可以視作型为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 的級数，其中 $a_n=u_n$，$b_n=(-1)^{n+1}$ $(n=1, 2, \cdots)$，再利用狄利克来判别法，即得萊伯尼茲定理。

［例 4］ 若級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收斂，則級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{\sqrt{n}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nu_n}{n+1}$ 皆收斂。这只要应用一下阿貝尔判别法即得。

［例 5］ 若数列 $\{a_n\}$ 单調趋于零，那么級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \text{ 和 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

前者对任何 x 皆收斂，后者对任何 $x\neq 2k\pi$ 皆收斂，而当 $x=2k\pi$ 时，須根据 a_n 的性质进一步判别之。

先考虑当 $x\neq 2k\pi$ 时，級数 $\sum_{k=1}^{\infty}\sin kx$ 的部分和 $\sum_{k=1}^{n}\sin kx$，利用三角学中和差化积的公式

$$\sin A\cdot\sin B=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)],$$

立即得到当 $x\neq 2k\pi$ 时

$$2\sin\frac{x}{2}(\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx)=\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x,$$

于是部分和:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leqslant\frac{2}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}=\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

用同样方法,也可以得到級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$ 的部分和满足:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\quad(x\neq 2k\pi).$$

这样,再根据狄利克来判别法,当 $x\neq 2k\pi$ 时,級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 皆收斂。而当 $x=2k\pi$ 时,第一个級数显然是收斂的,而第二个級数则变为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,須視 a_n 的性质进一步判别它是否收斂。

§5 絕对收斂級数和条件收斂級数的性质

不論是絕对收斂級数或者是条件收斂級数,皆具有本章 §2 中所給出的性质 1 至性质 4。除了这些性质以外,对于这两种不同的收斂級数,还具有各自不同的重要特性。

定理 1 对于級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$,将它的所有正項保留而将負項换为零,組成一个級数記为 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$. 将它的所有負項变号(乘上因子 -1)而将正項换为零,也組成一个正項級数記为 $\sum_{n=1}^{\infty}w_n$. 亦即:

$$v_n=\frac{|u_n|+u_n}{2}=\begin{cases}u_n, & \text{当 } u_n>0,\\ 0, & \text{当 } u_n\leqslant 0,\end{cases}$$

$$w_n=\frac{|u_n|-u_n}{2}=\begin{cases}-u_n, & \text{当 } u_n<0,\\ 0, & \text{当 } u_n\geqslant 0,\end{cases}$$

那么：(1)若級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 絕对收斂，則級数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}w_n$ 皆收斂。

(2)若級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收斂，則級数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}w_n$ 皆发散。

【証明】 (1) 若級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 絕对收斂，由于

$$0\leqslant v_n\leqslant |u_n|,\quad 0\leqslant w_n\leqslant |u_n|.$$

按比較判別法，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}w_n$ 皆收斂。

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为条件收斂，我們用反証法来証明定理的第二个結論。假設級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}w_n$ 中至少有一个为收斂的，不妨假設 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 为收斂級数，那么，由于

$$w_n=v_n-u_n,$$

于是得知 $\sum_{n=1}^{\infty}w_n$ 亦必为收斂。又由于 $u_n=v_n-w_n$ $(v_n\geqslant 0, w_n\geqslant 0)$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}v_n+\sum_{n=1}^{\infty}w_n.$$

得知級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 絕对收斂，此与已知条件矛盾，因此証明了两級数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}w_n$ 皆发散。

在未給定定理 2 以前，先要叙述一下何謂更序級数。对于一个級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，它的更序級数就是把它的項重新排列后所得到的級数。例如

$$u_5+u_6+u_1+u_2+u_{10}+u_3+u_7+\cdots$$

就是一个更序級数。我們知道，在普通的加法里，交換律是成立的，但在无穷級数中，交換律是否也成立呢？亦就是說，若收斂級

数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$，那么它的更序級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ 是否仍收斂并且有 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n = s$ 呢？一般說来，是不一定成立的，但我們有以下定理。

定理 2 絕对收斂級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的更序級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ 仍为絕对收斂，且其和相同，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n$。

【証明】 (i) 我們先証明当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为收斂的正項級数（当然为絕对收斂）的情形。

考虑更序級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ 的部分和 s'_k。因为

$$u'_1 = u_{n_1}, \quad u'_2 = u_{n_2}, \quad \cdots, \quad u'_k = u_{n_k},$$

所以，取 n 大于所有下标 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 后，显然有：

$$\begin{aligned} s'_k &= u'_1 + u'_2 + \cdots + u'_k \\ &\leqslant u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = s_n. \end{aligned}$$

又由于正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$，于是对一切 k 成立

$$s'_k \leqslant s,$$

按照正項級数收斂的基本定理，更序級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ 亦收斂，設其和为 s'，故有 $s' \leqslant s$。

另一方面，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也可以視为級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ 的更序級数，由剛才的討論，故它有 $s \leqslant s'$，得知

$$s = s'.$$

(ii) 再来証明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为任意絕对收斂級数的情形。

按照定理 1 中所采用的記号，仍旧記級数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 分別为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的所有正項和所有負項所組成的級数。由定理 1 知道，这两个級数均收斂。設它們分別收斂于 V 和 W，并且又有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = V - W, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = V + W.$$

由(i)中已經証明的結論知道，$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$的更序級数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n'|$成立着

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n'| = V + W.$$

这就表明了更序級数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$是絕对收斂的。

再設$\sum_{n=1}^{\infty} v_n'$和$\sum_{n=1}^{\infty} w_n'$分别为級数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} w_n$的更序級数。由(i)的結論知道：

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n' = \sum_{n=1}^{\infty} v_n = V, \quad \sum_{n=1}^{\infty} w_n' = \sum_{n=1}^{\infty} w_n = W,$$

而$u_n' = v_n' - w_n'$。所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n' = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n' - w_n') = V - W = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

这样就証明了定理。

【注意】 这个定理对条件收斂級数而言，却不一定成立，例如萊伯尼茲型級数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \cdots = s$$

是条件收斂的。

两端乘上因子$\frac{1}{2}$得

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots = \frac{s}{2},$$

亦即　$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + \cdots = \frac{s}{2},$$

将它和第一个級数相加(对应項相加)，得到

$$1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 0 + \cdots = \frac{3}{2}s,$$

亦即　$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{3}{2}s,$$

而这个級数正是第一个級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的更序級数。两者虽然皆收斂，但其和数却不相同。

对于条件收斂級数，有着下面的黎曼定理。

黎曼定理 若級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收斂，那么，总可以适当地更换項的次序而組成一个更序級数，使它收斂于任何預先給定的数 s（包括 ∞ 的情形），也可使它以任何方式发散。

【証明】 分三种情形証明如下：

1° s 为有限数：我們按照級数原来的順序取出其中的若干正項，将这些項相加起来，如果其和不大于 s，我們就继續取下去，只到被取出的这些正項的和剛剛大于 s，由定理1知道，这总是办得到的。然后我們仍旧按照級数原来的順序取出其中若干負項，使得整个和数（即所有被取出的正項及負項的和）剛剛小于 s，由定理1知道，这也是办得到的。然后我們再按照級数原来的順序取出剩余的若干正項，使整个和数剛剛大于 s。以后又取若干負項使整个和小于 s。如此无休止地下去，得到一个新的級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=v_1+v_2+v_3+\cdots+v_n+\cdots,$$

显然，这个級数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 就是原来級数的項經过重新排列所成的。

設其部分和为 V_n：

$$V_n=\sum_{k=1}^{n}v_k,$$

以下我們証明 $V_n\to s\ (n\to\infty)$。

由于 $v_n\to 0\ (n\to\infty)$，于是对任意 $\varepsilon>0$，总存在滿足以下两个条件的 n_0：(i) 当 $n\geqslant n_0$ 时，$|v_n|<\varepsilon$，(ii) V_{n_0} 及 V_{n_0-1} 中一个比 s 大另一个小于等于 s。

这时，对任何 $n\geqslant n_0$，我們来考察 V_n：如果 V_n 和 V_{n-1} 中一个比 s 大另一个小于等于 s，那么

$$|V_n-s|\leqslant|V_n-V_{n-1}|=|v_n|<\varepsilon.$$

如果 V_n 和 V_{n-1} 皆比 s 大或皆比 s 小，那么根据級数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 建立的方法知道，V_n 总比 V_{n-1} 更接近 s，即

$$|V_n-s|\leqslant|V_{n-1}-s|\leqslant|V_{n-2}-s|,$$

这时，总存在这样的 k_0，使得 V_{n-k_0} 和 V_{n-k_0-1} 中一个比 s 大另一个小于等

于 s，并且由 n_0 所滿足的条件(ii)知道，$n-k_0\geq n_0$。于是：

$$|V_n-s|\leq|V_{n-1}-s|\leq\cdots\leq|V_{n-k_0}-s|\leq|V_{n-k_0}-V_{n-k_0-1}|$$
$$=|v_{n-k_0}|<\varepsilon,$$

这样便証明了 $V_n\to s$ $(n\to\infty)$，亦即証明了

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=s.$$

2° $s=+\infty$ 的情形：我們按照級数原来順序取出其中若干正項，使它們的和数大于 1，按照定理 1，这是办得到的。然后在这些加項的后面再加上級数的第一个負項。以后再按照級数原来的順序在剩余的正項中取若干項，使它們的总和(即前面所取的若干正項及一个負項以及現在所取的若干正項的总和数)大于 2，然后在这些加項的后面再加上級数的第二个負項。之后再按原来順序在剩余的正項中取若干項，使总和大于 3，再加上級数的第三个負項，如此继續取下去，組成一个新級数。容易知道，这个新級数正是定理所要求的級数。

3° $s=-\infty$ 的情形：証明与 2° 相仿。

由定理 1 及黎曼定理可以看到，条件收斂只是由于正項和負項相互抵消才能实現的，它的和要由級数的項的順序来决定。絕对收斂則是由級数項的減小速度来决定，而与其順序无关，这就是条件收斂和絕对收斂的本质上不同之处。

最后，我們来討論級数的乘法运算。主要是回答这样的問題：在什么条件下，两級数相乘可以象有限項和一样来逐項相乘。

設两个收斂的級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，仿照有限項和数乘积的規則，这里也同样作出这两个級数的項的所有可能成对的乘积 u_iv_k $(i,k=1,2,3,\cdots)$，这些乘积也就是：

$$\begin{array}{llllll}
u_1v_1, & u_1v_2, & u_1v_3, & \cdots, & u_1v_i, & \cdots,\\
u_2v_1, & u_2v_2, & u_2v_3, & \cdots, & u_2v_i, & \cdots,\\
u_3v_1, & u_3v_2, & u_3v_3, & \cdots, & u_3v_i, & \cdots,\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots,\\
u_kv_1, & u_kv_2, & u_kv_3, & \cdots, & u_kv_i, & \cdots,\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots.
\end{array}$$

这些乘积可以用很多的方式将它們排列成一个数列。例如可

以按"对角綫法"或按"正方形法"将它們排列成下面形状的数列（图 4-1-2）。

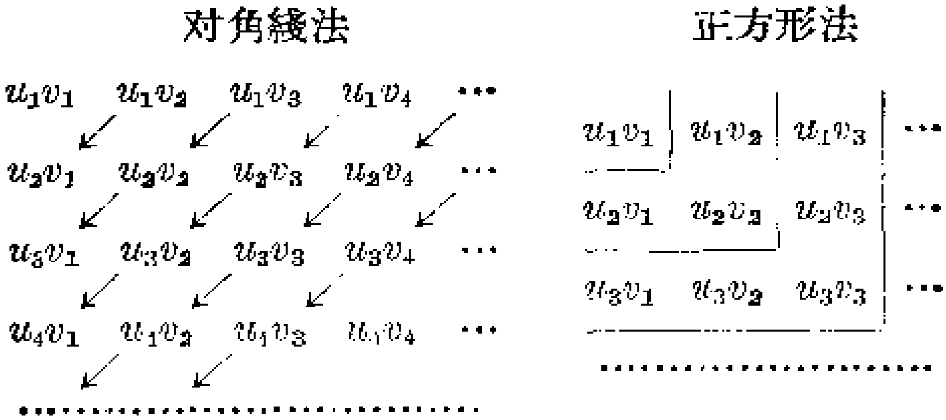


图 4-1-2

（对角綫法） u_1v_1; u_1v_2, u_2v_1; u_1v_3, u_2v_2, u_3v_1; $\cdots$.

（正方形法） u_1v_1; u_1v_2, u_2v_2, u_2v_1; u_1v_3, u_2v_3, u_3v_3, u_3v_2, u_3v_1; $\cdots$.

把上面排列好的数列用加号相联，就組成无穷級数。如果是按照对角綫法所組成的級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$，这里，一般項 c_n 是

$$c_n = u_1v_n + u_2v_{n-1} + u_3v_{n-2} + \cdots + u_{n-1}v_2 + u_nv_1,$$

我們称級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 为两級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 的柯西乘积。

定理 3（柯西定理） 若級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 皆絕对收斂，其和分别为 U 和 V. 则它們各項之积 u_iv_k $(i, k=1, 2, 3, \cdots)$ 按照任何方法排列所构成的級数也絕对收斂，且其和为 UV.

【証明】 用 $w_1, w_2, w_3, \cdots, w_n, \cdots$ 来表示按某一种次序排列 u_iv_k $(i, k=1, 2, 3, \cdots)$ 所成的一个数列。考虑級数

$$|w_1| + |w_2| + |w_3| + \cdots + |w_n| + \cdots,$$

設 s_n^* 是它的部分和，

$$s_n^* = \sum_{k=1}^{n} |w_n| = \sum_{k=1}^{n} |u_{n_k}v_{m_k}|,$$

記　　　　$\nu=\max(n_1, m_1, n_2, m_2, \cdots, n_n, m_n)$，

又記

$$U_\nu^*=|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_\nu|，\text{亦即} \sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \text{的部分和，}$$

$$V_\nu^*=|v_1|+|v_2|+\cdots+|v_\nu|，\text{亦即} \sum_{n=1}^{\infty}|v_n| \text{的部分和。}$$

由于級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 皆絕对收斂，所以 U_ν^* 及 V_ν^* 均为有界。

此外，

$$\begin{aligned}s_n^*&=|u_{n_1}v_{m_1}|+|u_{n_2}v_{m_2}|+\cdots+|u_{n_n}v_{m_n}|\\&\leqslant(|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_\nu|)(|v_1|+|v_2|+\cdots+|v_\nu|)\\&=U_\nu^*\cdot V_\nu^*.\end{aligned}$$

于是知道 s_n^* 亦有界，这样便証明了級数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 絕对收斂。再应用定理 2，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 的更序級数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n'$ 亦絕对收斂，并且它們的和数相同，亦即 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n=\sum_{n=1}^{\infty} w_n'$，也就是說，由 u_iv_k $(i, k=1,2,3,\cdots)$ 按照任何方式排列所構成的級数皆絕对收斂，并且都收斂于同一和数。

下面再証明这个和数恰为 UV。

考慮由正方形法排列所構成的級数，并加括号如下：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_2+u_2v_1)+(u_1v_3+u_2v_3+u_3v_3+u_3v_2+u_3v_1)+\cdots,$$

由收斂級数的基本性质知道，加括号后并不影响和的数值。

記級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和分別为 U_n 和 V_n。級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和为 A_n，那么有

$$A_n=U_nV_n,$$

于是　　　　$\lim\limits_{n\to\infty} A_n=\lim\limits_{n\to\infty}(U_nV_n)=UV$。

便証明了 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = UV$。定理全部証毕。

級数的乘法定理还有一个推广，即麦尔滕(Mertens)定理。这里仅将定理介紹如下：若級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 皆收斂，其和分别为 U 和 V，并且其中有一个級数为絕对收斂，則它們的柯西乘积 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$（这里 $c_n = u_1v_n + u_2v_{n-1} + u_3v_{n-2} + \cdots + u_{n-1}v_2 + u_nv_1$）也收斂，并且 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = UV$。

[例] 級数（$|q|<1$）

$$1+q+q^2+\cdots+q^n+\cdots=\frac{1}{1-q}$$

絕对收斂。将这个級数自乘，可得

$$1+2q+3q^2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}=\frac{1}{(1-q)^2}.$$

定理2和定理3让我們知道絕对收斂級数具有相仿于普通有限項和数的两个性质——交换律和分配律成立。

§6 无穷乘积

和无穷級数一样，无穷乘积也是一个很有价值的工具。这里我們首先介紹一下无穷乘积的基本概念。

对于一个数列

$$p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n, \cdots,$$

将这一列数連乘起来，用記号 $\prod$ 表示如下：

$$p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdots p_n\cdots=\prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

称为无穷乘积。如果将数列 $\{p_n\}$ 中前 n 个数連乘起来，得到

$$P_n = p_1\cdot p_2\cdots p_n = \prod_{k=1}^{n} p_k,$$

則称为部分乘积。令 $n=1, 2, 3, \cdots$，就得到部分乘积的序列

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \cdots,\ P_n,\ \cdots.$$

对于这个序列$\{P_n\}$，只可能有下面三种情形：

（i） 存在非零的有穷极限 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P(\neq 0)$，

（ii） 极限为零 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0$，

（iii） 发散，即不趋向任何有穷极限。

在第(i)种情形下，称无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

为收斂的，并称极限值 P 为这个乘积的值，記为

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n.$$

而在第(ii)，(iii)种情形时称此无穷乘积为发散的。須要特别指出的是，虽然在第(ii)种情形下部分乘积序列$\{p_n\}$的极限值 P 是存在的，但因为 $P=0$，我們也认为这个无穷乘积是发散的，这样能够使許多定理的叙述更为容易。

在一个无穷乘积中，只要有一个因数为零，那么就得部分乘积序列的极限 $P=0$，所以在以后的討論中，我們总是把这种情形除开，而恒假定 $p_n \neq 0\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$。

[例 1] 无穷乘积

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

是收斂的，因为它的部分乘积

$$P_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2}.$$

[例 2] 无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\varphi}{2^n}$$

是收斂的。这只要反复利用倍角公式

$$\sin\varphi = 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = 2^2\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\sin\frac{\varphi}{2^2}$$

$$= \cdots$$

$$= 2^n\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^n}\sin\frac{\varphi}{2^n}.$$

所以部分乘积为

$$P_n = \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^n} = \frac{\sin\varphi}{2^n\sin\frac{\varphi}{2^n}}.$$

再根据极限式

$$\lim_{n\to\infty} 2^n\sin\frac{\varphi}{2^n} = \varphi,$$

得到

$$P_n \to \frac{\sin\varphi}{\varphi},$$

因此

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\varphi}{2^n} = \frac{\sin\varphi}{\varphi}.$$

[例 3] 无穷乘积

$$1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n}\cdots$$

及

$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot3\cdot\frac{1}{3}\cdot4\cdot\frac{1}{4}\cdots$$

都是发散的。因为前者部分乘积极限为零，后者无极限。

对于收敛的无穷乘积，有以下几个性质：

性质 1 若无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛，記

$$\pi_m = p_{m+1}\cdot p_{m+2}\cdots = \prod_{n=m+1}^{\infty} p_n,$$

它与无穷級数的余项相似，称为余乘积。

則

$$\lim_{m\to\infty}\pi_m = 1.$$

这可从等式

$$\pi_m = \frac{P}{P_m}$$

以及
$$\lim_{n\to\infty} P_n = P \neq 0$$
立即推得。

性质 2　若无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收斂，則
$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1.$$

这是因为 P_n 与 P_{n-1} 同时趋于 P，故有
$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1.$$

性质 3　若无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收斂，那么，任意增加有限个异于零的项或者任意删去有限个項，而不改变其原有的次序，所得无穷乘积仍收斂。这不难从定义出发推得，請讀者自証之。

由于性质 2 和性质 3，在以后的討論中，我們总是假定所有 $p_n > 0$。

下面，我們利用已經熟悉的无穷級数来討論无穷乘积的斂散性，并建立几个基本的判别法。

定理 1　无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收斂的充要条件是級数
$$\sum_{n=1}^{\infty} \log p_n$$
收斂。并且当这一条件满足时，若 L 是級数的和数，那么有
$$P = e^L.$$

【証明】　以 L_n 表示級数的部分和，即有
$$L_n = \log P_n, \quad P_n = e^{L_n},$$
再由对数函数和指数函数的連續性即可推知：当 P_n 趋于有限的正极限 P，則 L_n 必趋于 $\log P$；反之当 L_n 具有有限的极限 L，則 P_n 必趋于极限 e^L。

推論　$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 具有零值（即发散于零）的充要条件为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log p_n \text{ 发散到 } -\infty。$$

定理2 令

$$p_n = 1 + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

若对充分大的 n，有

$$a_n > 0 \quad (\text{或 } a_n < 0),$$

那么无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

收斂的充要条件为級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

收斂。

【証明】 必要性：由 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ 收斂，得知

$$a_n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

以及同号級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n)$$

收斂。

又由
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1 + a_n)}{a_n} = 1,$$

按比較判别法得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。

充分性：由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂得 $a_n \to 0 \ (n \to \infty)$，

又由
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1 + a_n)}{a_n} = 1,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n)$ 收斂，即知

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

收斂。

推論　若 $a_n<0$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，則 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 具有零值。

对于一般的情形 $a_n \gtrless 0$，有以下的判別法。

定理3　若級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ 和 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

同时收斂，則无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 亦收斂。

【証明】　首先推得 $a_n \to 0 \ (n\to\infty)$，

于是有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-\log(1+a_n)}{a_n^2}=\frac{1}{2},$$

按比較判別法，正項級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[a_n-\log(1+a_n)]$$

收斂。再由已知条件 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+a_n)$$

收斂。这样就証明了 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收斂。

最后，利用乘积和級数之間的关系来建立无穷乘积絕对收斂性的概念。对于无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$，当級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log p_n$$

絕对收斂时，称无穷乘积为絕对收斂的。容易断言，乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 絕对收斂的充要条件为級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 絕对收斂。并且絕对收斂乘积具有可交換性，而非絕对收斂乘积不具有可交換性。

[例4]　无穷乘积　$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$　$(x>0)$。

由級数
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

的斂散性知：当 $x>1$ 时乘积收斂，当 $x\leqslant 1$ 时乘积发散。

[例 5]　当 $a>b$ 时，証明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}=0.$$

【証明】　考察无穷乘积

$$\prod_{n=0}^{\infty}\frac{b+n}{a+n}=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{b-a}{a+n}\right)$$

而

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b-a}{a+n}=-\infty,$$

这样就証明了結論。

习　題

1. 証明：

(1) $\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n$；

(2) $\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\underline{\lim_{n\to\infty}}y_n$.

2. 設 $x_n\geqslant 0$，$y_n\geqslant 0$，証明：

(1) $\overline{\lim_{n\to\infty}}x_ny_n\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n$；

(2) $\underline{\lim_{n\to\infty}}x_ny_n\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}y_n$.

3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，則对任何数列 $\{y_n\}$ 成立：

(1) $\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n$；

(2) $\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n\cdot y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n$，$\lim_{n\to\infty}x_n>0$.

4. 求下列数列的上限与下限：

(1) $a_\nu=\dfrac{1}{2^{-\nu}+(-1)^\nu}\quad(\nu=1,2,\cdots)$；

(2) $a_\nu=(-1)^\nu\left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)\quad(\nu=1,2,\cdots)$；

(3) $a_\nu=\dfrac{(-1)^\nu}{\nu}\quad(\nu=1,2,\cdots)$；

(4) $a_\nu=\sin\frac{\nu\pi}{5}$　$(\nu=1, 2, \cdots)$。

5. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\alpha$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_{k_0+n}|}=\alpha$。

此处 k_0 是任意固定的整数。

6. 写出下列级数的部分和，并討論其收斂性：

(1) $\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$；

(2) $\frac{1}{1^2\cdot 3^2}+\frac{2}{3^2\cdot 5^2}+\cdots+\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}+\cdots$。

7. 确定使下列級数收斂的 x 的范圍：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+x)^n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$。

8. 判定下列級数的收斂与发散：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{2n-1}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$；　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$　設 $a>0$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$。

9. 若 $u_n\geqslant 0$，$\sum u_n$ 收斂，那么 $\sum u_n^2$ 收斂，其逆如何？又若 $u_n\geqslant 0$，$\sum u_n$ 收斂且 $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=\alpha$，則 $\alpha=0$。

10. 設两正項級数 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=0$，則当 $\sum v_n$ 收斂时，$\sum u_n$ 亦收斂。又若 $\sum v_n$ 发散时，$\sum u_n$ 怎样？如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\infty$，那么 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 的斂散性之間又有什么关系？

11. 判別下列級数收斂或发散：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$　設 $a_n\to a$　(a_n, b, a 皆为正数，且 $a\neq 0$)。

12. 判別下列級数的收斂或发散：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$ $(x\geqslant0)$。

13．利用級数收斂的必要条件証明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}=0$, $(a>1)$。

14．討論下列級数的收斂性：

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^p n}$;

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}$;

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(\ln n)^{1+\sigma}\ln\ln n}$ $(\sigma>0)$;

(4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$.

15．討論下列級数的收斂性(包括条件收斂或絕对收斂)：

(1) $\frac{1}{2}-\frac{3}{10}+\frac{1}{2^2}-\frac{3}{10^3}+\frac{1}{2^3}-\frac{3}{10^5}+\cdots$;

(2) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5!}-\cdots$;

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^3}{2^n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{(n+1)^2}$; (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{x}{n}$ $(x\neq0)$;

(7) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}$

$-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$.

16．証明：若級数的項加括号后所作成的級数收斂，并且在同一个括号內項的符号相同，那末去掉括号后，此級数亦收斂；并由此考察級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$$

的收斂性。

17．討論下列級數的絕对收斂或条件收斂：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2^n x)}{n!}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\quad(0<x<\pi)$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}\quad(0<x<\pi)$。

18．証明：若 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}$ 收斂，那末当 $x>x_0$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 也收斂。

19．設 $\{na_n\}$ 收斂，$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收斂，則 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收斂。

20．設 $\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu-a_{\nu-1})$ 絕对收斂，$\sum_{\nu=1}^{\infty}b_\nu$ 收斂，那末 $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu b_\nu$ 收斂。

21．設 $|x|<1$，$|y|<1$，則

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}y+\cdots+y^{\nu-1})=\frac{1}{(1-x)(1-y)}.$$

22．証明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}.$$

23．討論无穷乘积的收斂性：

(1) $\prod_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-4}{n^2-1}$；　　(2) $\prod_{n=1}^{\infty}a^{\frac{(-1)^n}{n}}\quad(a>0)$；

(3) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$；　　(4) $\prod_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{n-1}{n+2}}$.

24．証明：若 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$ 收斂，則 $\prod_{n=1}^{\infty}\cos x_n$ 收斂。

25．証明：若 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 絕对收斂，則 $\prod_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_n\right)$，$\left(|\alpha_n|<\frac{\pi}{4}\right)$ 收斂。

第二章 函数項級数

§1 函数序列和函数項級数的收斂和一致收斂

上一章我們討論了数項級数，也就是級数的每一項都是数的情形，这一章我們討論函数項級数，也就是形如

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

的級数，这里級数的項 $u_1(x)$, $u_2(x)$, $\cdots$, $u_n(x)$, $\cdots$ 都是某个变量的函数。

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

称为級数的 n 項部分和。象数項級数一样，函数項級数可以通过它的部分和所成的函数列 $\{S_n(x)\}$ 亦即

$$S_1(x),\ S_2(x),\ \cdots,\ S_n(x),\ \cdots$$

来討論，另一方面，函数列 $\{S_n(x)\}$ 也可以化为函数項級数

$$S_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [S_{n+1}(x) - S_n(x)]$$

来討論。

当 x 取某一固定的值 x_0 时，我們就得到数列 $\{S_n(x_0)\}$. 数列的收斂发散，早在第一章就定义过了。当数列 $\{S_n(x_0)\}$ 收斂时，我們称函数列 $\{S_n(x)\}$ 在点 x_0 是收斂的，$\{S_n(x_0)\}$ 的极限称为 $\{S_n(x)\}$ 在点 x_0 的极限。若 $\{S_n(x_0)\}$ 发散，則称 $\{S_n(x)\}$ 在点 x_0 发散。又若在 x 值的集合 X 上每一点 x, $\{S_n(x)\}$ 都是收斂的，那么称 $\{S_n(x)\}$ 在 X 上收斂，这时，对每一点 x, $\{S_n(x)\}$ 都有一个极限 $S(x)$，当 x 在 X 上变动时，$S(x)$ 也隨之而变，因之，$S(x)$ 是

x 的函数，称为 $\{S_n(x)\}$ 的极限函数

由函数列的收斂和发散的定义，可以完全平行地定义函数项級数的收斂和发散，例如当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 X 上每一点 x 收斂于 $S(x)$ 时，我們說 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 X 上收斂，$S(x)$ 显然是 x 的函数，称为这級数的和函数，这时又称

$$r_n(x)=S(x)-S_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$$

为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的余和。又若在上面函数列收斂发散的定义中，把 $S_n(x)$ 理解为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的 n 項部分和，也可以得出級数收斂发散的定义。

我們知道，有限个函数的和在某一点的函数极限等于它們在这点函数极限的和(若每一函数在这点的函数极限存在)，有限个連續函数的和仍然是連續函数。类似地，有限个函数的和的导数和积分也分别等于它們的导数和积分的和，然而現在我們遇到了无穷个函数 $u_1(x)$, $u_2(x)$, $\cdots$, $u_n(x)$, $\cdots$ 的和 $S(x)$ 的問題了，我們是否仍然有

$$\lim_{x\to c} S(x)=\lim_{x\to c}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to c} u_n(x)\right)$$

的关系呢？又无穷个連續函数的和 $S(x)$ 是否仍然是連續函数呢？它們的导数和积分的和函数是否仍旧等于它們的和函数的导数和积分呢？举一个最簡单的例：

[例 1]

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=x+(x^2-x)+(x^3-x^2)+\cdots,$$

它的每一項在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上都連續，其 n 項部分和为 $S_n(x)=x^n$. 因之和函数

$$S(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } 0\leq x<1 \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } x=1;\end{cases}$$

可見即使級数的每一項都在[a, b]連續，其和函数不一定在[a, b]上連續。就函数列 $S_n(x)=x^n$ 来說，也就是連續函数的极限函数不一定是連續的。

以后我們还将举例說明級数的每一項的导数或积分所成的級数的和不等于它的和函数的导数或积分。这些說明利用級数进行这些运算时，还需特別慎重，不然就会导致錯誤的結果。然而对什么級数，能够从每一項的連續性得出和函数的連續性，或从和函数的导数或积分得出每一項导数或积分所成級数的和呢？本章正是着重討論这样的級数，即一致收斂或均匀收斂的級数。級数或函数列的一致收斂概念和函数的一致連續概念有若干相似之点，我們知道連續的函数不一定是一致連續的，因为在某区間連續，只要求对任給的 $\varepsilon>0$，对区間內每一点能找到連續函数的定义中的 η，而一致連續却要求对任給的 $\varepsilon>0$，能找到每点适用的公共的 η，亦即只依賴于所給的 ε 而不依賴于所討論的区間上的点 x 的 η。在某区間上函数列和函数項級数的收斂和一致收斂也有这种情况，这时問題在于能否找到公共的对每点都适用的 N。我們知道函数列 $\{S_n(x)\}$ 或函数項級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 X 上收斂于 $S(x)$，也就是在 X 上每一点 x_0 收斂于 $S(x_0)$。按数列极限的定义，也就是，对任給的 $\varepsilon>0$，在每一点 x_0 都能找到正整数 N，使当 $n>N$ 时恒有

$$|S_n(x_0)-S(x_0)|<\varepsilon$$

$\left(\text{对函数項級数，此式还可写为 } |r_n(x_0)|=\left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}u_k(x_0)\right|<\varepsilon\right)$。

这种 N 一般来說不仅依賴于 ε，并且也依賴于 x_0，我們記它为 $N(\varepsilon, x_0)$。一致收斂要求能找到只依賴于 ε 而不依賴于 x_0 的

$N(\varepsilon)$，也就是对 X 上每点都适用的 $N(\varepsilon)$，于是可給出下面的

定义　設有函数列 $\{S_n(x)\}$ $\left(\text{函数項級数} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)$，若对任給的 $\varepsilon>0$，恒有只依賴于 ε 的正整数 $N(\varepsilon)$，使 $n>N(\varepsilon)$ 时，不等式

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

$\left(\text{对函数項級数，此式也可写为 } |r_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right|<\varepsilon\right)$

对 X 上一切 x 都成立，則称 $\{S_n(x)\}$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)$ 在 X 上一致收斂于 $S(x)$。

[例 2]　$S_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$，　$X=(-\infty, \infty)$。

显然 $S(x)=0$，現在来看能否找到定义中的 $N(\varepsilon)$，从

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{|x|}{1+n^2x^2}=\frac{1}{2n}\cdot\frac{2n|x|}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{1}{2n},$$

因之只要取 $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$ 即可。

这个函数列的图形为图 4-2-1，由图可知，只要 N 相当大，从第 N 項以后，每一条曲綫 $y=S_n(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 内整个位于曲綫 $y=S(x)+\varepsilon$ 和 $y=S(x)-\varepsilon$ 之間，这也是一般一致收斂函数列或

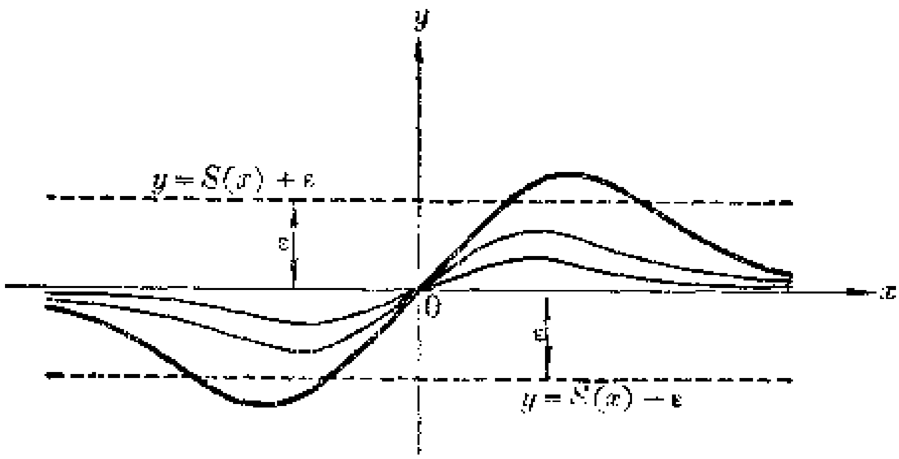


图　4-2-1

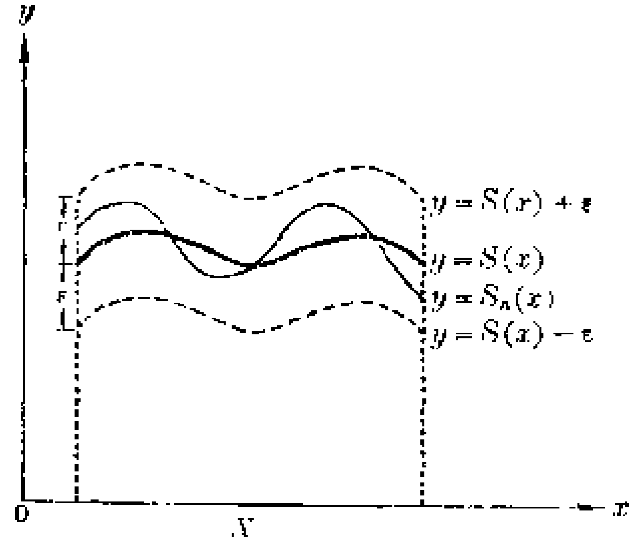


图 4-2-2

一致收斂級数的几何解释(图 4-2-2)。

为了要使 $|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$，显然只要 $|S_n(x)-S(x)|$ 在 X 上的最大值 $\max\limits_X|S_n(x)-S(x)|$ 或上确界 $\sup\limits_X|S_n(x)-S(x)|$ 小于 ε 就行了，由于这个值是只依赖于 n 而不依赖于 x 的，因此，也就相当于說：$S_n(x)$ 一致收斂于 $S(x)$ 的充分条件是当 $n\to\infty$ 时

$$\Delta_n=\max_X|S_n(x)-S(x)|\to 0 \text{ 或 } \Delta_n=\sup_X|S_n(x)-S(x)|\to 0,$$

这个条件也是一致收斂的必要条件。事实上，若 $S_n(x)$ 一致收斂于 $S(x)$，那么对任給的 $\varepsilon>0$，可得 $N(\varepsilon)$，使 $n>N(\varepsilon)$ 时

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

对 X 上一切点都成立，因之也有

$$\sup_X|S_n(x)-S(x)|\leqslant\varepsilon$$

(当 $|S_n(x)-S(x)|$ 在 X 上有最大值时，左边就是

$$\max_X|S_n(x)-S(x)|),$$

这就証明了

定理 1　函数列 $\{S_n(x)\}$ 或函数項級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 X 上一致收斂于 $S(x)$ 的充分必要条件是当 $n\to\infty$ 时

$$\Delta_n = \sup_X |S_n(x) - S(x)|$$

$$\left(\text{对} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\text{，此式也可写为} \sup_X |r_n(x)|\right)$$

收斂于零。

例如在例 2 中，用求极值的方法可得

$$\Delta_n = \max_{(-\infty,\infty)} |S_n(x) - S(x)| = \max_{(-\infty,\infty)} |S_n(x)| = \frac{1}{2n} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

故为一致收斂的。又如

［例 3］ $S_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$，$X = [0, 1]$.

由于 $S(x) = 0$，故

$$\Delta_n = \max_{0 \le x \le 1} |S_n(x)| = \left|S_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{2},$$

Δ_n 不收斂于零，故在 $[0, 1]$ 上非一致收斂。

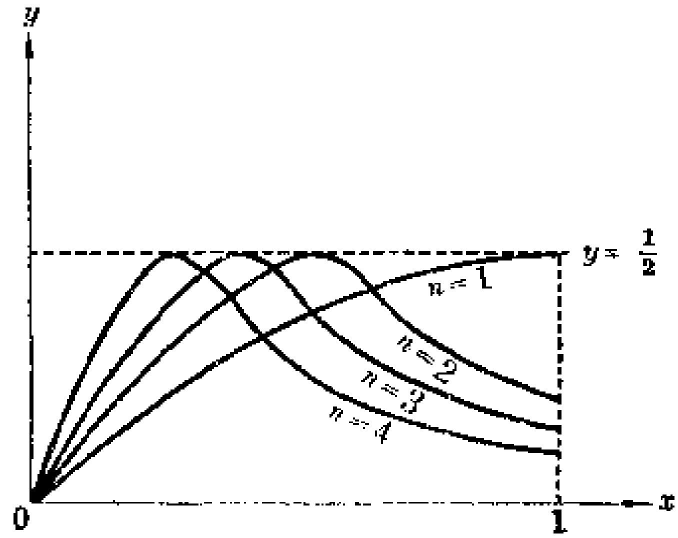


图 4-2-3

这个例也説明了在閉区間上收斂的函数列不一定一致收斂，这是与一致連續不相同的。

［例 4］ 以例 1 的函数列

$$S_n(x) = x^n, \quad X = [0, 1]$$

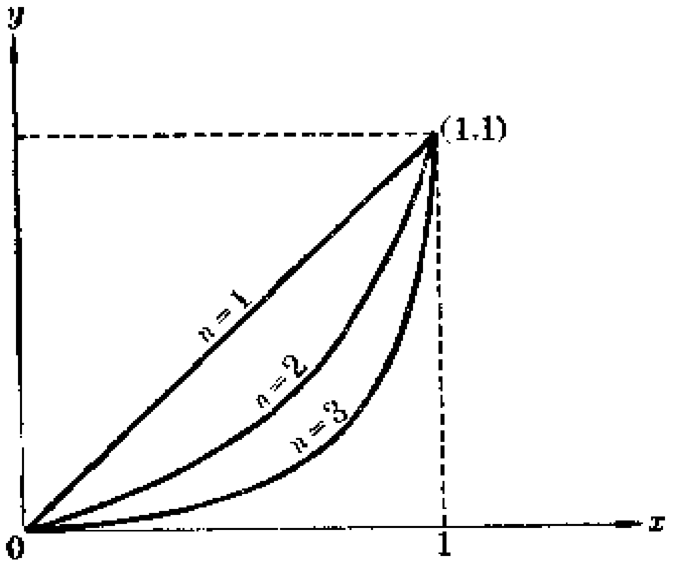


图 4-2-4

为例，因为

$$|S_n(x)-S(x)|=\begin{cases}x^n, & \text{当 } 0\leqslant x<1,\\ 0, & \text{当 } x=1,\end{cases}$$

故 $\sup\limits_{X}|S_n(x)-S(x)|=1$，亦即 $\Delta_n=1$，因之 $\{x^n\}$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收斂。

由証明中还可看到 $S_n(x)=x^n$ 在 $(0, 1)$ 也不是一致收斂的，但它在任意一个区間 $[0, c]$ (c 是小于 1 的任一正数) 却是一致收斂的，这是因为

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant c}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{0\leqslant x\leqslant c}x^n=c^n\to 0 \quad (\text{当 } n\to\infty \text{ 时}).$$

同理可知 $S_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ 在任一区間 $[c, 1]$ (c 为小于 1 的任一正数) 一致收斂，但在 $(0, 1)$ 非一致收斂。这些一方面說明了一致收斂性与所討論的区間有关，当 $S_n(x)$ 在某一区間一致收斂时，它当然在含于这区間內的任一区間一致收斂，但在含这个区間的較大的区間上却不一定一致收斂。另一方面，这两个例子也說明了在 (a, b) 內的任一閉区間上 $S_n(x)$ 一致收斂，$S_n(x)$ 在区間 (a, b) 却不一定一致收斂。当 $S_n(x)$ 在 (a, b) 內任一閉区間上一致收斂

时，称 $S_n(x)$ 在区間 (a,b) "內閉"一致收斂。因此在 (a,b) 一致收斂一定內閉一致收斂，但反之不然。但从 $S_n(x)$ 在 (a, b) 內閉收斂，却可得到它在区間 (a, b) 也收斂，因为后者意味着 $S_n(x)$ 在 (a, b) 內每点收斂，而对 (a, b) 上每一点，恒可取 (a, b) 內的一个閉区間包含这个点，于是从 $S_n(x)$ 在这閉区間上的收斂性就得到它在这个点收斂。这也是由于一致收斂是整体性质而收斂是局部性质的緣故。

以上虽然都是就函数列的情形来討論的，但由于函数項級数可以化为函数列来討論，因此以上的例和討論也說明了函数項級数的情形。从定理 1 还可得到

定理 2 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 或 $S_n(x)$ 在 X 上一致收斂于 $S(x)$ 的充分必要条件为对任意的数列 $\{x_n\}$，$x_n \in X$，都有

$$|r_n(x_n)| = |S_n(x_n) - S(x_n)| \to 0.$$

事实上，設 $S_n(x)$ 一致收斂于 $S(x)$，則从上面的定理和

$$|r_n(x_n)| \leqslant \Delta_n$$

就得到条件的必要性。要証明充分性，設 $S_n(x)$ 不一致收斂于 $S(x)$，那么，对某一个正数 ε_0 以及对任意的 N，可得到 n 和 $x \in X$，使滿足

$$n > N \quad \text{和} \quad |r_n(x)| \geqslant \varepsilon_0,$$

因之可得到一列正整数 $n_1, n_2, \cdots$ 和一列点 $x_{n_1} \in X$，$x_{n_2} \in X$，$\cdots$ 使

$$n_1 < n_2 < \cdots, \quad |r_{n_k}(x_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0 \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

任意选其他的点 x_n $(n \neq n_1, n_2, \cdots)$，可知 $r_n(x_n)$ 不收斂于零。

这个推論对証明函数列或函数項級数的一致收斂性，并沒有什么用处，因为我們无法对所有可能的数列 $\{x_n\}$ 加以檢驗。但用它証明一个函数列或函数項級数不一致收斂，却是很方便的。

[例 5]　$S_n(x)=2n^2xe^{-n^2x^2}$, $X=(0,1)$ 非一致收斂。

事实上，若取 $x_n=\frac{1}{n}$，則

$$|r_n(x_n)|=|S_n(x_n)-S(x_n)|=2ne^{-1}\to\infty.$$

[例 6]　在例 1 中，若取 $x_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)$，則

$$|r_n(x_n)|=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\to e^{-1},$$

故非一致收斂。

从一致收斂概念和柯西收斂原理很容易得到一致收斂的柯西充要条件。

定理 3　函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 X 上一致收斂的充分必要条件为，对任給的 $\varepsilon>0$，可得正整数 $N=N(\varepsilon)$，使 $n>N$ 时，不等式

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\varepsilon$$

对任意的正整数 p 和 X 上任意的 x 都成立。

【証明】　若 $S_n(x)$ 一致收斂，設其极限函数为 $S(x)$，那么对任給的 $\varepsilon>0$，可得 $N(\varepsilon)$，使 $n>N$ 时，对 X 上一切 x 成立着

$$|S_n(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

因之　$$|S_{n+p}(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\quad(p=1,2,\cdots),$$

亦即当 $n>N$ 时，对 X 上任意的 x 恒有

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\varepsilon\quad(p=1,2,\cdots).$$

現証明充分性。設对任給的 $\varepsilon>0$，可得正整数 $N(\varepsilon)$，使 $n>N$ 时，对任意的正整数 p 和 X 上任意的 x 成立着

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\varepsilon,$$

現若固定 x，那么 $\{S_n(x)\}$ 是一数列，由上式及数列的柯西收斂原理，即知 $\{S_n(x)\}$ 对 X 上任意的固定的 x 都收斂，亦即 $\{S_n(x)\}$ 在 X 上收斂，設其极限函数为 $S(x)$，在上式中，固定 n 而令 p 趋

于 ∞，即得当 $n>N$ 时，对 X 上一切 x 都有

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon.$$

也就是 $\{S_n(x)\}$ 一致收斂于 $S(x)$.

把 $S_n(x)$ 看成是函数項級数的部分和，就可得到級数的柯西一致收斂判别法。

定理 4　函数項級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 X 上一致收斂的充分必要条件为，对任給的 $\varepsilon>0$，可得正整数 $N(\varepsilon)$，使 $n>N$ 时不等式

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|=|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon$$

对任意的正整数 p 和 X 上任意的 x 都成立。

§2　一致收斂級数的性质

有了一致收斂的概念，我們就可以着手討論 §1 中提及的一些性质和运算了。我們仍从函数列开始。

定理 1　設在 α 的某一鄰域 $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$ 内(可以去掉点 α)，函数列 $S_n(x)$ 一致收斂于 $S(x)$，又对每一 n，存在着极限

$$\lim_{x\to\alpha}S_n(x)=A_n,$$

则
$$\lim_{n\to\infty}A_n \text{ 及 } \lim_{x\to\alpha}S(x)$$

都存在并且相等，亦即

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to\alpha}S_n(x)=\lim_{x\to\alpha}\lim_{n\to\infty}S_n(x).$$

这說明了极限号 $\lim\limits_{x\to\alpha}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}$ 可以交换順序。

【証明】　由一致收斂的柯西充要条件，对任給的 $\varepsilon>0$，可得正整数 N，使 $n>N$ 时，在 $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$ 内恒有

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\varepsilon,$$

取极限 $x\to\alpha$，得到

$$|A_{n+p}-A_n|\leqslant\varepsilon,$$

因之数列 $\{A_n\}$ 收斂。設 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$，由数列极限的定义和一致收斂的定义，对 $\varepsilon>0$ 可得一公共的 N，使

$$|A_N - A| < \frac{\varepsilon}{3}$$

和 $$|S_N(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (0<|x-\alpha|<\delta)$$

同时成立。現在对这个固定的 N，由

$$\lim_{x\to\alpha} S_N(x) = A_N,$$

又可得 $\eta>0$，$(\eta\leqslant\delta)$ 使 $0<|x-\alpha|<\eta$ 时

$$|S_N(x) - A_N| < \frac{\varepsilon}{3},$$

由此，当 $0<|x-\alpha|<\eta$ 时，

$$\begin{aligned}&|S(x) - A|\\ &\leqslant |S(x) - S_N(x)| + |S_N(x) - A_N| + |A_N - A| < \varepsilon.\end{aligned}$$

这就証明了 $\lim\limits_{x\to\alpha} S(x) = A$。

定理 2 若在 $[a, b]$ 上，函数列的每一項 $S_n(x)$ 都連續，且 $S_n(x)$ 一致收斂于 $S(x)$，則其极限函数 $S(x)$ 也在 $[a, b]$ 上連續。

这事实上是定理 1 的特例，此时，对 $[a, b]$ 上任一点 α，$\lim\limits_{x\to\alpha} S_n(x) = S_n(\alpha)$，又由 $S_n(\alpha)$ 收斂于 $S(\alpha)$，故只要把定理 1 中結論的 $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to\alpha} S_n(x)$ 改写为 $S(\alpha)$，$\lim\limits_{x\to\alpha}\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ 改写为 $\lim\limits_{x\to\alpha} S(x)$ 就知道本定理的正确性。

也不难直接予以証明，这时只要由 $S_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收斂于 $S(x)$，故对 $\varepsilon>0$ 可得 N，使

$$|S_N(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (a\leqslant x\leqslant b),$$

特别是

$$|S_N(\alpha) - S(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

現由 $S_N(x)$ 在点 α 的連續性，可得 $\eta>0$，使 $|x-\alpha|<\eta$ 时

$$|S_N(x)-S_N(\alpha)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

于是当 $|x-\alpha|<\eta$ 时，$|S(x)-S(\alpha)|<\varepsilon$。

对端点 a 和 b 可类似地討論，事实上对单側极限也有类似于定理 1 的定理，只要把定理 1 中的 $(\alpha-\delta,\ \alpha+\delta)$ 改成相应的单側极限的邻域即可。

对非一致收斂函数列极限号是否可以交換，和函数是否連續要看具体情况而定。例如 $S_n(x)=x^n$ 在 $[0,\ 1]$ 上的和函数 $S(x)$ 在 $x=1$ 不連續，但 $S_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ 的和函数在 $(-\infty,\ \infty)$ 内每一点都連續。这也説明了对前一情形极限号 $\lim\limits_{x\to\alpha}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}$ 不可以交換，而对后一情形却可交換。

定理 3 設 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,\ b]$ 上一致收斂于 $S(x)$，又 $[\alpha,\ \beta]$ 为 $[a,\ b]$ 上任一閉区間，亦即 $a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b$，而每一 $S_n(x)$ 都在 $[\alpha,\ \beta]$ 上連續，那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta S_n(x)\,dx=\int_\alpha^\beta S(x)\,dx=\int_\alpha^\beta \lim_{n\to\infty}S_n(x)\,dx,$$

亦即极限号与积分号可以互換。又函数列 $\int_\alpha^x S_n(t)\,dt$ 也在 $[\alpha,\ \beta]$ 上一致收斂于 $\int_\alpha^x S(t)\,dt$。

【証明】 由定义对任給的 $\varepsilon>0$，可得 $N(\varepsilon)$，使 $n>N$ 时

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon\quad(a\leqslant x\leqslant b),$$

現由于 $S_n(x)$ 及 $S(x)$ 連續，故它們在 $[\alpha,\ \beta]$ 上的积分存在，并且当 $n>N$ 时

$$\left|\int_\alpha^\beta S_n(x)\,dx-\int_\alpha^\beta S(x)\,dx\right|\leqslant\int_\alpha^\beta|S_n(x)-S(x)|\,dx<\varepsilon(\beta-\alpha).$$

又若将积分上限 β 换为 x，則当 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 时上式仍旧成立，証毕。

当函数列不一致收斂时，結論可能成立可能不成立。例如

$$S_n(x)=2n^2xe^{-n^2x^2},$$

我們有

$$\int_0^1 S(x)\,dx=0,$$

而
$$\int_0^1 S_n(x)\,dx=1-e^{-n^2}\to 1\quad (n\to\infty),$$

而对 $S_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2)\right]_0^1$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+n^2)}{2n}=0=\int_0^1\left(\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}\right)dx.$$

定理4 若在 $[a, b]$ 上函数列 $\{S_n(x)\}$ 的每一項都有連續导数，$\{S_n(x)\}$ 收斂于 $S(x)$，$\{S_n'(x)\}$ 一致收斂于 $\sigma(x)$，則

$$S'(x)=\sigma(x)\ \text{亦即}\ \frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}S_n(x),$$

也就是极限号与求导数号可以交换。又此时 $S_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上也是一致收斂的。

【証明】 由于 $S_n'(x)$ 一致收斂于 $\sigma(x)$，故 $\sigma(x)$ 連續，由定理3

$$\int_a^x\sigma(t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_a^x S_n'(t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\{S_n(x)-S_n(a)\}=S(x)-S(a),$$

由于左边的导数存在，故 $S'(x)$ 存在且 $\sigma(x)=S'(x)$，又从

$$S_n(x)=S_n(a)+\int_a^x S_n'(t)\,dt$$

及定理3卽得 $S_n(x)$ 的一致收斂性。

若 $\{S_n'(x)\}$ 不一致收斂，則結論不一定成立，例如对 $S_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$，由于 $S(x)\equiv 0$，故 $S'(0)=0$，但

$$\lim_{n\to\infty}S_n'(0)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}\right]_{x=0}=\lim_{n\to\infty}1=1,$$

卽 $S'(0)$ 不等于 $\sigma(0)$。

此时 $\{S_n'(x)\}$ 在任一包含 $x=0$ 点的区間必不一致收斂，这从定理4本身就可知道．由此，当 $S'(x)$ 不一致收斂时，可能有 $S'(x)\neq\sigma(x)$．但若 $S_n(x)=\frac{1}{2n}\log(1+n^2x^2)$，虽然 $S_n'(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收斂，但

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}=0,$$

而由于 $S(x)\equiv 0$，故也有 $\frac{d}{dx}S(x)=\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty}S_n(x)=0$．

把上面各定理中的 $S_n(x)$ 都作为函数項級数的 n 項部分和看待，就得到函数項級数相类似的定理。

定理5 若在 α 的某一邻域 $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$ 内(可以去掉点 α)，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致收斂于 $S(x)$，又对每一 n，存在着极限 $\lim_{x\to\alpha}u_n(x)=a_n$，那么 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收斂，$\lim_{x\to\alpha}S(x)$ 存在，且前者的和及后者的极限相等，亦即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to\alpha}u_n(x)=\lim_{x\to\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),$$

也就是說极限号可以与和号互换。

由此求函数項級数的和函数的极限，可以先求每一項的极限，然后再求所得的数項級数的和，因此本定理也称为逐項求极限的定理。

定理6 若在 $[a, b]$ 上級数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的每項 $u_n(x)$ 都連續，且 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致收斂于 $S(x)$，則 $S(x)$ 也在 $[a, b]$ 上連續。

定理7 設 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收斂于 $S(x)$，又 $a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b$，并且每一 $u_n(x)$ 都在 $[\alpha, \beta]$ 上連續，則

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_\alpha^\beta u_n(x)dx=\int_\alpha^\beta S(x)dx=\int_\alpha^\beta\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)dx,$$

亦即和号可以与积分号交换。又在 $[\alpha, \beta]$ 上，函数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{x} u_n(t)\,dt$ 也一致收斂于 $\int_{\alpha}^{x} S(t)\,dt$。

这定理也称为逐項求积分的定理。

定理 8 若在 $[a, b]$ 上，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的每一項都具有連續导数 $u_n'(x)$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 一致收斂于 $\sigma(x)$，又 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收斂于 $S(x)$，則 $S'(x) = \sigma(x)$，亦即

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_n(x)$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致收斂于 $S(x)$。

这定理說明了和号同求导数号可以交換，它也称为逐項求导数的定理。但要注意的是，仅仅在条件"$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致收斂"之下，即使 $u'(x)$ 存在且連續，也不能保証和号同求导数号可以交換(参見习题 16)。

利用逐項积分或逐項求导可以求出某些級数的和(参見习題 13, 14)。

§3 一致收斂級数的判別法

在 §1 里虽然給出了函数列和函数項級数一致收斂的一些判别法，但这些判别法还不是很方便的，特别是对函数項級数来說更是如此，因为在那些判别法里，都要先計算出級数的和 $S(x)$、部分和 $S_n(x)$ 或余和 $r_n(x)$，而柯西充要条件里也要对任意的正整数 p 計算出 p 項的和，这些并不是很容易求得的，有时也不是那么重要的。在級数的运算中更重要的是进行这些运算是否合理，例如 §2 中求极限、导数、积分等，这时虽然不知道級数的和，也需要从級数

本身去考虑它的一致收斂性，这就使我們去寻找一致收斂的其他的判别法。

定理 1（魏尔斯脫拉斯判别法） 若对充分大的 n，恒有实数 a_n，使得 $|u_n(x)|\leqslant a_n$ 对 X 上任意的 x 都成立，并且数項級数 $\sum a_n$ 收斂，则 $\sum u_n(x)$ 在 X 上一致收斂。

【証明】 由 $\sum a_n$ 的收斂性，对任給的 $\varepsilon>0$，可得 $N(\varepsilon)$，使 $n>N(\varepsilon)$ 时，

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon \quad (p=1, 2, \cdots),$$

但对 X 上一切的 x 我們有

$$\begin{aligned}|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)| &\leqslant |u_{n+1}(x)|+\cdots+|u_{n+p}(x)|\\ &\leqslant a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}<\varepsilon,\end{aligned}$$

由柯西一致收斂判别法即得。

魏尔斯脫拉斯判别法还可稍加拓广，参見习题 4。

由定理的証明还可以看到滿足定理条件的級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 也是在 X 上絕对收斂的，亦即对 X 上任意的 x，数項級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 是收斂的。

[例 1] 若 $\sum a_n$ 絕对收斂，則 $\sum a_n\sin nx$ 和 $\sum a_n\cos nx$ 在 $(-\infty, \infty)$ 内都是絕对收斂和一致收斂的級数。

事实上

$$|a_n\sin nx|\leqslant|a_n|,\quad |a_n\cos nx|\leqslant|a_n|,$$

由定理 1 即得。

但由上面的定理和例題不要以为絕对收斂和一致收斂总是同时成立或不成立的，这只有在定理 1 的条件下才有这个結果（参見习题 6, 7）。

定理 2（阿貝尔判别法） 若在 X 上 $\sum\beta_n(x)$ 一致收斂，又对每一固定的 x，$\alpha_n(x)$ 隨 n 而单調。而对任意的 x 和 n，有 $|\alpha_n(x)|$

$\leqslant L$（不依賴于 x 和 n 的定数），那么 $\sum\alpha_n(x)\beta_n(x)$ 在 X 上一致收斂。

这个定理与数項級数的阿貝尔定理相似，其証明也大体相同，只要利用阿貝尔引理即可。事实上，由 $\sum\beta_n(x)$ 的一致收斂性，对任意給定的 $\varepsilon>0$，可得 $N(\varepsilon)$，使 $n>N(\varepsilon)$ 时恒有

$$|\beta_{n+1}(x)+\cdots+\beta_{n+p}(x)|<\varepsilon \quad (p=1,2,\cdots),$$

固定 x，由上式及 $\alpha_n(x)$ 的单調性，利用阿貝尔引理得到

$$|\alpha_{n+1}(x)\beta_{n+1}(x)+\cdots+\alpha_{n+p}(x)\beta_{n+p}(x)|$$
$$<\varepsilon(|\alpha_{n+1}(x)|+2|\alpha_{n+p}(x)|)\leqslant 3L\varepsilon$$
$$(n>N(\varepsilon);\ p=1,2,\cdots),$$

再从柯西一致收斂判别法即得。

［例 2］ 若 $\sum a_n$ 收斂，則 $\sum a_nx^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收斂。

事实上，$\alpha_n(x)=x^n$ 对每一固定的 x，随 n 而单調，又对任意的 x 和 n，$|\alpha_n(x)|\leqslant 1$，应用阿貝尔判别法即得。

在定理中，条件"$|\alpha_n(x)|\leqslant L$"称为函数列$\{\alpha_n(x)\}$在 X 上一致有界，需要注意的是：由函数列的每一項 $\alpha_n(x)$ 在 X 上有界不能推出 $\{\alpha_n(x)\}$ 在 X 上一致有界，事实上，$|\alpha_n(x)|$ 在 X 上的上确界 M_n 是随 n 而变的，可能$\{M_n\}$是一个无界的数列，例如

$$\alpha_n(x)=nx$$

在任意的有限区間 $[a,b]$ 上有界，但 $\{\alpha_n(x)\}$ 非一致有界。

定理 3（狄利克来判别法） 設 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n(x)$ 的部分和

$$B_n(x)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x)$$

在 X 上一致有界，又对每一 x，$\alpha_n(x)$ 随 n 而单調，并且函数列 $\{\alpha_n(x)\}$ 在 X 上一致收斂于零，則 $\sum\alpha_n(x)\beta_n(x)$ 在 X 上一致收斂。

【証明】 設

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x)\right|\leqslant L\quad(\text{不依賴于 } n \text{ 和 } x \text{ 的定数}),$$

那么对 X 上任意的 x 和任意的正整数 p 恒有

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}\beta_i(x)\right|\leqslant\left|\sum_{i=1}^{n+p}\beta_i(x)\right|+\left|\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x)\right|\leqslant 2L,$$

因之，利用阿貝尔引理

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}\alpha_i(x)\beta_i(x)\right|\leqslant 2L(|\alpha_{n+1}(x)|+|\alpha_{n+p}(x)|),$$

再由 $\alpha_n(x)$ 一致收斂于零即得。

［例 3］ 若 a_n 单調地趋于零，則 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$ 在 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 上一致收斂，这里 δ 是小于 π 的任一正数。

事实上，当 $x\in[\delta, 2\pi-\delta]$ 时，

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|=\left|\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{1}{2}x\right|}\leqslant\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\delta},$$

故满足定理的条件。

在 §2 中所說的函数列和函数項級数的每一个性質，事实上也可作为一致收斂的一个判別法，但利用它們只能判断非一致收斂的級数，例如 $S_n(x)=x^n$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上連續，但 $S(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不連續，因此 $S_n(x)=x^n$ 一定不一致收斂。但由 $S_n(x)$ 和 $S(x)$ 在 X 上連續，不能断定 $S_n(x)$ 在 X 上一致收斂，不过对 $S_n(x)$ 加上单調（或对 $u_n(x)$ 加上同号）的条件，$S(x)$ 連續的确是 $\{S_n(x)\}$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致收斂的充要条件。

定理 4（狄尼（Dini）定理） 若在有限区間 $[a, b]$ 上連續函数序列 $\{S_n(x)\}$ 收斂于連續函数 $S(x)$，而对 $[a, b]$ 上每一 x，$S_n(x)$

随 n 而单調，則 $S_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收斂于 $S(x)$。

【証明】 設 $\{S_n(x)\}$ 不一致收斂于 $S(x)$，那么，对某一定数 $\varepsilon>0$，不能得到正整数 N，使 $n>N$ 时

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon;$$

从而可以得到正整数 $n_1, n_2, \cdots$，和 $[a, b]$ 上的点 $x_1, x_2, \cdots$ 滿足

$$|S_{n_k}(x_k)-S(x_k)|\geqslant\varepsilon, \quad n_1<n_2<\cdots,$$

由魏尔斯脱拉斯定理，$\{x_k\}$ 必有收斂的子列，不妨設就是 $\{x_k\}$ 本身，亦即 $x_k\to\xi$，而 $\xi\in[a, b]$。由于 $S_n(\xi)\to S(\xi)$，故对 $\varepsilon>0$，可得 N 使

$$|S_N(\xi)-S(\xi)|<\varepsilon,$$

再从 $S_N(x)-S(x)$ 在点 ξ 連續和 $x_k\to\xi$，得到

$$\lim_{k\to\infty}|S_N(x_k)-S(x_k)|=|S_N(\xi)-S(\xi)|,$$

从而存在正整数 K，使 $k>K$ 时

$$|S_N(x_k)-S(x_k)|<\varepsilon.$$

但由于对每个固定的 x_k，$S_n(x_k)$ 随 n 而单調，因之当 $k>K$，$n\geqslant N$ 时

$$|S_n(x_k)-S(x_k)|\leqslant|S_N(x_k)-S(x_k)|<\varepsilon,$$

这显然与

$$|S_{n_k}(x_k)-S(x_k)|\geqslant\varepsilon, \quad n_1<n_2<\cdots$$

矛盾，事实上总可以取 k 使 $k>K$，$n_k\geqslant N$ 同时成立。

对級数来說，这个定理可以改写为

定理 5 若在有限区間 $[a, b]$ 上連續的函数 $u_n(x)$ 所成的級数 $\sum u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上收斂于連續函数 $S(x)$，且对每一 x，級数的各項同号，那么，$\sum u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收斂于 $S(x)$。

[例 4] $S_n(x)=\dfrac{x^2}{1+n^2x^2}$ 在任一閉区間 $[a, b]$ 上一致收斂。

事实上 $S(x)\equiv0$，$S_n(x)$ 和 $S(x)$ 都在任一区間 $[a, b]$ 上連

續，并且对固定的 x，$S_n(x)$ 随 n 而单調，故从定理 4 就得到 $S_n(x)$ 的一致收斂性。

就这个例子来說，$S_n(x)$ 其实在 $(-\infty, \infty)$ 內也是一致收斂的，这是因为在 $(-\infty, \infty)$ 內

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{x^2}{1+n^2x^2}<\frac{1}{n^2}\to 0 \quad (\text{当 } n\to\infty \text{ 时}),$$

但要注意的是不能由 $S_n(x)$，$S(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 的連續性和 $S_n(x)$ 随 n 的单調性而得出一致收斂性，因为上面的两个定理只能用于閉区間 $[a, b]$ 而不能用于开区間及 $(-\infty, \infty)$ 等等。

[例 5]　$S_n(x)=\dfrac{x^4}{1+n^2x^2}$.

容易知道 $S_n(x)$ 和 $S(x)\equiv 0$ 在 $(-\infty, \infty)$ 都是連續的，并且 $S_n(x)$ 随 n 而单調，但 $S_n(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 并不一致收斂；因为若取 $x_n=n$，則

$$|r_n(x_n)|=\frac{n^4}{1+n^4}\to 1 \quad (n\to\infty).$$

又如 $S_n(x)=x^n$ 在 $0\leqslant x<1$ 上連續且随 n 单調，$S(x)\equiv 0$ 也在 $0\leqslant x<1$ 連續，但 $S_n(x)$ 在这区間也不一致收斂。

最后我們提出一种非一致收斂的情形。

定理 6　若对每一 n，$S_n(x)$（或 $u_n(x)$）在 $x=c$ 左連續，但 $S_n(c)$（或 $\sum u_n(c)$）发散，那么在任意的开区間 $(c-\delta, c)$，$0<\delta<c$ 內，$S_n(x)$（或 $\sum u_n(x)$）必不一致收斂。

【証明】　用反証法，若 $S_n(x)$ 一致收斂，則对任給的 $\varepsilon>0$，可得正整数 $N(\varepsilon)$，使 $n>N(\varepsilon)$ 时，在 $(c-\delta, c)$ 內恒有

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\varepsilon \quad (p=1, 2, \cdots),$$

現在固定 n 和 p，取 $x\to c-0$，得到

$$|S_{n+p}(c)-S_n(c)|\leqslant\varepsilon \quad (n>N(\varepsilon);\ p=1, 2, \cdots),$$

从而 $S_n(c)$ 收斂，与假設矛盾。

［例 6］ 級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$$

在任意的区間 $(\delta, 1)$ 不一致收斂，此处 $\delta<1$.

定理 6 在判断非一致收斂时有很大作用。

习　　題

1．討論下列函数序列在所示区域內的一致收斂性：

(1) $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}$,　　$-\infty<x<\infty$;

(2) $f_n(x)=x^n-x^{2n}$,　　$0\leqslant x\leqslant 1$;

(3) $f_n(x)=\sin\dfrac{x}{n}$,

　(i) $-l<x<l$,　　(ii) $-\infty<x<\infty$;

(4) $f_n(x)=x^n(1-x)$,　　$0\leqslant x\leqslant 1$;

(5) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+nx}$,　　$0\leqslant x\leqslant 1$;

(6) $f_n(x)=\dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n}$,　　$0<x<1$.

2．討論下列級数的一致收斂性：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$,　　$0\leqslant x\leqslant 1$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$,　　$-\infty<x<\infty$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$,　　$-\infty<x<\infty$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{1+n^4x^2}$,　　$-\infty<x<\infty$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx\sin x}{\sqrt{n+x}}$,　　$0\leqslant x\leqslant 2\pi$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(1-e^{-nx})}{n^2+x^2}$,　　$0\leqslant x<\infty$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{1}{3^nx}$,　　$0<x<\infty$.

3. 試証級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$ 在任何区間 $[1+\alpha, \infty)$，$\alpha>0$ 为一致收斂。(提示：当 $h>0$ 时，$\log(1+h)<h$。)

4. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的一般項 $|u_n(x)|\leqslant c_n(x)$，并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n(x)$ 在 $\mathscr{X}$ 上一致收斂，則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $\mathscr{X}$ 上亦一致收斂且絕对收斂。

5. 設 $f_0(x)$ 在 $[0, a]$ 上連續，又 $f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt$，証明 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, a]$ 上一致收斂于 0。

6. 証明級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n+x^2}$ 关于 x 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为一致收斂，但对任何 x 并非絕对收斂，而級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 虽在 $x\in(-\infty, \infty)$ 上絕对收斂，但并不一致收斂。

7. 証明：

(1) 如果 $\sum|f_n(x)|$ 在 $[a, b]$ 上一致收斂，那么 $\sum\limits_{1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上也一致收斂；

(2) 如果 $\sum f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收斂，但 $\sum|f_n(x)|$ 未必一致收斂，以 $\sum\limits_{1}^{\infty}(-1)^n(x^n-x^{n+1})$，$0\leqslant x\leqslant 1$ 为例来說明。

8. 設每一項 $\varphi_n(x)$ 皆是 $[a, b]$ 上的单調函数，如果 $\sum\varphi_n(x)$ 在 $[a, b]$ 的端点为絕对收斂，那么这級数在 $[a, b]$ 上一致收斂。

9. 下列函数列是否一致收斂？

(1) $f_n(x)=(\sin x)^n$, $\qquad 0\leqslant x\leqslant\pi$;

(2) $f_n(x)=(\sin x)^{\frac{1}{n}}$,

(i) $0\leqslant x\leqslant\pi$, $\qquad$ (ii) $\delta\leqslant x\leqslant\pi-\delta$ $\quad(\delta>0)$;

(3) $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$,

(i) $0\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon$, (ii) $1-\varepsilon<x<1+\varepsilon$, (iii) $1+\varepsilon\leqslant x<\infty$ $\quad(\varepsilon>0)$.

10. 証明 $\sum\limits_{1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0, \infty)$ 內連續。

11. 証明函数 $f(x)=\sum\frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty, \infty)$ 內連續，并有連續导函数。

12. 証明函数 $\zeta(x)=\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1, \infty)$ 連續，并有連續各阶导函数。

13. 利用逐項求导法求下列級数之和:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

14. 利用逐項积分法求下列級数之和:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$; (2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$.

15. 試証級数 $\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin(2^n\pi x)}{2^n}$ 在整个实数軸上一致收斂,但在任何区間内不能逐項求微商。

16. 先証

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx,$$

当 $|r|<1$ 时成立,从而証明:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,dx=2\pi\quad(|r|<1).$$

第三章 幂 級 数

§1 幂級数的收斂半徑和它的性质

若函数項級数的一般項是 $x-x_0$ 的幂函数 $a_n(x-x_0)^n$，也就是它具有形式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots,$$

那么称它为幂級数。

幂級数是最簡单的函数項級数，因此它具有一些特殊的性质，正因为如此，它在一些实际問題中以及对数学本身，都有着广泛的应用。

首先，根据柯西判別法，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在使

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|u_n(x)|}<1$$

的 x 值絕对收斂，而当 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|u_n(x)|}>1$ 时，它发散。但对一般的函数項級数来說，解这个不等式不是很容易的，而对幂級数来說，却毫无困难。大家知道，去掉一个級数的有限个項或加上有限个項并不影响級数的斂散，为簡单起見，不妨把 $a_n(x-x_0)^n$ 就作为第 n 項，那么幂級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的斂散，就取决于

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|}=|x-x_0|\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$$

小于1或大于1，也就是，当 $|x-x_0|<1/\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ 时絕对收斂，而当 $|x-x_0|>1/\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ 时发散。又当 $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=0$ 时，幂級数在每点都絕对收斂。当 $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty$ 时，除点 x_0 外，它在每点

都发散。假若我們規定

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}, & 当\ 0<\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}<\infty\ 时,\\ \infty, & 当\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=0\ 时,\\ 0, & 当\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty\ 时;\end{cases}$$

那么可把上述結果归結为下面的定理。

定理 1（柯西–阿达瑪(Hadamard)定理） 冪級数

$$\sum_0^\infty a_n(x-x_0)^n$$

在 $|x-x_0|<R$ 內絕对收斂，在 $|x-x_0|>R$ 內发散。

由此可見，对任何一个冪級数，都存在一个以 x_0 为中心，以 R 为半徑的区間，在这个区間內冪級数絕对收斂，而在区間外，冪級数发散。一般的函数項級数是不具备这种性质的，例如

$$\sum\frac{\cos nx}{n}\quad 在\ x=2k\pi\quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

发散，在其他点收斂，因之在任何区間之外，有使級数收斂的点，也有使級数发散的点。冪級数的这种数 R，称为冪級数的收斂半徑。由定理 1，可以立即得到一个推論。

定理 2（阿貝尔第一定理） 若 $\sum a_n(x-x_0)^n$ 在点 $x=\xi$ 收斂，那么它必在 $|x-x_0|<|\xi-x_0|$ 內絕对收斂，又若 $\sum a_n(x-x_0)^n$ 在 $x=\xi$ 发散，則它必在 $|x-x_0|>|\xi-x_0|$ 也发散。

事实上，在前一情况下，$|\xi-x_0|\leqslant R$，而在后一情况下，$|\xi-x_0|\geqslant R$。这里加上等号是因为在区間 $(x_0-R,\ x_0+R)$ 的端点，冪級数可能收斂可能发散。

［例 1］ $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{x^n}{n}$

由于 $\lim n^{\frac{1}{n}}=1$，故

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\frac{1}{\lim n^{\frac{1}{n}}}}=1,$$

于是級数在 $|x|<1$ 内絕对收斂，在 $|x|>1$ 内发散。从这个例子也可以看到級数在一个端点 $x=-1$ 收斂，而在另一端点 $x=1$ 发散，亦即端点的情况需要另行討論。

[例 2] $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n x^n$ 在不等于零的点都发散。

事实上，

$$R=\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{n^n}}=\frac{1}{\lim n}=0.$$

[例 3] $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 在任何点絕对收斂。

对这种情况，用达朗貝尔判別法較好，因为对任一 x，有

$$\overline{\lim}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\underline{\lim}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\frac{|x|}{n+1}=0.$$

一般，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 存在，則这个极限値就是 $\sum a_n(x-x_0)^n$ 的收斂半徑 R。这是因为級数的每一項与前一項比的絕对值，当 $|x-x_0|<\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 时有

$$\overline{\lim}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}(x-x_0)\right|=\frac{|x-x_0|}{\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}<1,$$

而当 $|x-x_0|>\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 时有

$$\underline{\lim}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}(x-x_0)\right|=\frac{|x-x_0|}{\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}>1.$$

[例 4] $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(3+(-1)^n)^n x^n$ 在 $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ 絕对收斂，在其他

点发散。事实上

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{\lim}(3+(-1)^n)=4,$$

因此 $R=\frac{1}{4}$。又当 $x=\pm\frac{1}{4}$ 时，級数的一般項不趋于零，因此在收斂区間的两个端点上，級数发散。

定理 3（阿貝尔第二定理） 若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的收斂半徑为 R，則此級数在 $(x_0-R,\ x_0+R)$ 內的任一个閉区間 $[a,\ b]$ 上一致收斂，也就是在 $(x_0-R,\ x_0+R)$ 內閉一致收斂；又若級数在 x_0+R 点收斂，則它必在 $[a,\ x_0+R]$ 一致收斂，同理可得 x_0-R 的情形。

【証明】 不妨就 $\sum a_nx^n$ 的情形来証明，这不过是把上面的 $x-x_0$ 作为这里的 x。

設 $\xi=\max\{|a|,\ |b|\}$，則由于在 $[a,\ b]$ 上任一点 x，恒有

$$|a_nx^n|\leqslant|a_n\xi^n|,$$

而 $\sum a_n\xi^n$ 絕对收斂，按魏尔斯脫拉斯判別法卽得定理的第一部分。

現若 $\sum a_nR^n$ 收斂，則由

$$\sum a_nx^n=\sum\frac{x^n}{R^n}a_nR^n$$

以及 $\frac{x^n}{R^n}$ 在 $[0,\ R]$ 上一致有界，且对每一 x，随 n 而单調，故按阿貝尔定理，$\sum a_nx^n$ 在 $[0,\ R]$ 上一致收斂，因之在 $[a,\ R]$ 上一致收斂（若 $-R<a<0$，則还需用到已証得的結果：$\sum a_nx^n$ 在 $[a,\ 0]$ 一致收斂）。

对一般函数項級数，这个定理是不成立的，例如

$$s_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$$

在 $(-\infty,\ \infty)$ 內收斂于零，但它在包含 $x=0$ 的任一閉区間上都不一致收斂。

由这个定理和函数項級数的性质卽得下列冪級数的性质。

定理 4 幂級数 $\sum a_n(x-x_0)^n$ 的和函数 $s(x)$ 在 (x_0-R, x_0+R) 内为一連續函数；特别当幂級数在 x_0-R 或 x_0+R 收斂时，$s(x)$ 也在 x_0-R 或 x_0+R 連續。

定理 5 設 $\sum a_n(x-x_0)^n$ 的收斂半徑为 R，和函数为 $s(x)$，又設 x 为 (x_0-R, x_0+R) 内任一点，那么

$$\int_{x_0}^{x} s(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{x_0}^{x} a_n(x-x_0)^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1},$$

且上式右端的級数的收斂半徑仍为 R。

【証明】 定理的前一部分由 $\sum a_n(x-x_0)^n$ 在 $[x_0, x]$（或 $[x, x_0]$）上的一致收斂性即得。要証明定理的后一部分，只要由

$$\overline{\lim}\left(\frac{|a_n|}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}\overline{\lim}\,|a_n|^{\frac{1}{n}}=\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}$$

即得。

定理 6 $\sum\limits_{0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 和 $\sum\limits_{1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1}$ 有相同的收斂半徑，且若前者的和函数为 $s(x)$，則

$$s'(x)=\sum_{1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1}=\sum_{0}^{\infty}\frac{d}{dx}\{a_n(x-x_0)^n\},$$

証明由定理 1 及一致收斂級数的性质即得。

由此可知，由幂級数所表示的函数 $s(x)$ 在幂級数的收斂区間内可以无穷次求导，并且 $s(x)$ 的导数或积分可以由幂級数逐項求导或逐項求积来得到，而所得的幂級数的收斂半徑既不增大，亦不減小。这些性质都是一般函数項級数不一定有的。

[例 5] 由于在 $(-1, 1)$ 内

$$1-x+x^2-x^3+\cdots=\frac{1}{1+x},$$

故在此区間内

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots=\log(1+x).$$

又由于左边的級数在 $x=1$ 也是收斂的，因此它的和 $s(x)$ 在这点左連續，因之

$$s(1)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\lim_{x\to 1-0}s(x)=\lim_{x\to 1-0}\log(1+x)=\log 2.$$

§2 函数的冪級数展开式

由上一节看到，冪級数不仅形式簡单，而且有很多特殊的性質，这就使我們想到，能否把一个函数表示为冪級数来进行研究。首先，假若函数 $f(x)$ 在某点 x_0 及其某一邻域 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 內能表示为冪級数，也就是在 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 內恒有

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots,$$

那么，它在这个邻域內必須有任意阶的导数，并且

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+\frac{(n+1)!}{1!}a_{n+1}(x-x_0)+\cdots\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),$$

在此式两端令 $x=x_0$，即得

$$f(x_0)=a_0,\quad f'(x_0)=1!a_1,\quad f''(x_0)=2!a_2,\quad \cdots.$$

这說明了函数 $f(x)$ 在 x_0 点的冪級数展开式的系数为

$$a_0=f(x_0),\quad a_1=\frac{f'(x_0)}{1!},\quad a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\quad \cdots,$$

这也說明了冪級数展开式的唯一性。

若 $f(x)$ 在点 x_0 有各阶导数，我們称冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为 $f(x)$ 在 x_0 点的泰勒級数。但要 $f(x)$ 在 x_0 附近能用泰勒級数表示，首先这个泰勒級数应該有一个大于零的收斂半徑，不仅如此，而且还必須級数的和就等于 $f(x)$。为此，我們只要能証明在 x_0 的某一邻域內，余項

$$R_n(x)=f(x)-s_n(x)=f(x)-\sum_{0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

随 n 而收敛于零也就行了。在第二篇中曾經給出了 $R_n(x)$ 的拉格朗日形式，下面，我們再給出它的另一形式：

定理 1 若在 x_0 的某邻域内，$f(x)$ 有一直到 $n+1$ 阶的連續导数，那么在这个邻域内

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

而
$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

【証明】 由上面的式子得到

$$f'(x)=f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+R_n'(x),$$

……………………………………………………………………，

$$f^{(n)}(x)=f^{(n)}(x_0)+R_n^{(n)}(x).$$

在上面各式中，令 $x=x_0$，得到

$$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0,$$

而由最后一式又得出

$$f^{(n+1)}(x)=R_n^{(n+1)}(x).$$

現在考慮

$$R_n(x)=R_n(x)-R_n(x_0)=\int_{x_0}^{x}R_n'(t)dt,$$

逐次用分部积分法即得（注意 x 視为固定的值）

$$\begin{aligned}R_n(x)&=-\int_{x_0}^{x}R_n'(t)d(x-t)=\int_{x_0}^{x}(x-t)R_n''(t)dt\\&=-\frac{1}{2!}\int_{x_0}^{x}R_n''(t)d(x-t)^2=\cdots\\&=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}R^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt\\&=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.\end{aligned}$$

証毕。

在 $R_n(x)$ 的表达式中，由于 $(x-t)^n$ 在 $x_0\leqslant t\leqslant x$（或 $x\leqslant t\leqslant x_0$）上恒有固定的符号，因之可用积分第一中值公式，得到

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n dt=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 为 x_0, x 之間的某一值，这就是曾經給出的拉格朗日余項。

或用狭义的积分第一中值公式，得到

$$\begin{aligned}R_n(x)&=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{n!}\int_{x_0}^{x}dt\\&=\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{n!}[x-\{x_0+\theta(x-x_0)\}]^n(x-x_0)\\&=\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}\quad(0\leqslant\theta\leqslant1),\end{aligned}$$

这称为柯西余項。

定理 1 中的公式我們在第二篇中已經介紹过，它称为泰勒公式，現在的問題是要討論当 $n\to\infty$ 时余項 $R_n(x)$ 是否趋于0。下面将就一些基本初等函数討論 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ 的 x 的范圍，这也就是 $f(x)$ 能用泰勒級数表示的范圍。在实际应用中，为了簡单起見，往往取 $x_0=0$，这时的泰勒級数

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots$$

称为麦克劳林級数，而余項 $R_n(x)$ 分別变为

$$\frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt,\quad \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0\leqslant\theta\leqslant1),$$

$$\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}\quad(0\leqslant\theta\leqslant1).$$

1）e^x 的展开式：由于 e^x 在 $x=0$ 的任一阶导数等于 1，因此附有拉格朗日余項的麦克劳林公式为

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

因为对任意的固定的 x，$e^{\theta x}$ 在 1 与 e^x 之間变动，从而 $n\to\infty$ 时，$e^{\theta x}$ 保持有界，另一方面当 $n\to\infty$ 时，$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$，因之

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}=0.$$

这就証明了

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\quad(-\infty<x<\infty).$$

2) $\sin x$ 和 $\cos x$ 的展开式：对于 $f(x)=\sin x$，显然有

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right),$$

因之

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,\ \cdots,$$
$$f^{(2m)}(0)=0,\ f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m,$$

在定理 1 的公式中，取 $n=2k+2$，因为

$$f^{(2k+2)}(0)=0,\quad f^{(2k+3)}(x)=\sin\left(\frac{2k+3}{2}\pi+x\right),$$

故

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$+\sin\left(\frac{2k+3}{2}\pi+\theta x\right)\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!},$$

但对任一 x，由于正弦函数的有界性，得到

$$\lim_{k\to\infty} R_{2k+2}(x)=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{2k+3}{2}\pi+\theta x\right)\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}=0,$$

从而

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\quad(-\infty<x<\infty).$$

同理

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\quad(-\infty<x<\infty).$$

3) $\log(1+x)$ 的展开式：在 §1 例 5 中已經得到

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \quad (-1<x\leqslant 1),$$

由冪級数展开式的唯一性，我們用不着再利用求导数的办法去做了。

4) $\operatorname{arctg} x$ 的展开式：由于

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots \quad (-1<x<1),$$

两边求积分即得

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots \quad (-1\leqslant x\leqslant 1),$$

上面加上了区間的端点，是由于右边的冪級数在 $x=\pm 1$ 时也是收斂的，由阿貝尔第二定理和 $\operatorname{arctg} x$ 的連續性即得。

5) 二項式 $(1+x)^m$：m 为正整数时直接用二項式定理展开即得。現設 m 不为正整数，那么由

$$f^{(k)}(x)=m(m-1)\cdots(m-k+1)(1+x)^{m-k} \quad (k=1,2,\cdots),$$

因之
$$f^{(k)}(0)=m(m-1)\cdots(m-k+1),$$

而 $(1+x)^m$ 的泰勒公式为

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+R_n(x),$$

此处 $R_n(x)$ 的柯西余項表示式为

$$R_n(x)=\frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{n!}x^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n(1+\theta x)^{m-1},$$

首先，从达朗貝尔判别法容易知道，在 $|x|<1$ 內，級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{n!}x^{n+1}$$

收斂，因此它的一般項趋于零，也就是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{n!} x^{n+1}=0.$$

再从 $x>-1$ 时 $0\leqslant 1-\theta<1+\theta x$，得出

$$0\leqslant\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n<1,$$

又因为 $0\leqslant x<1$ 时，$1\leqslant(1+\theta x)<1+x$；而 $-1<x\leqslant 0$ 时，

$$1+x<1+\theta x\leqslant 1,$$

故不論 x 为 $(-1, 1)$ 中那一点，$(1+\theta x)^{m-1}$ 恒在两个不依賴于 n 的数 1 和 $(1+x)^{m-1}$ 之間，也就是說，当 $n\to\infty$ 时，它保持有界。

綜上所述，我們得到当 $-1<x<1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0,$$

亦卽在 $-1<x<1$ 內，恒有

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots.$$

对于端点 ±1，分下列几种情况討論：

i) $m\leqslant -1$, $x=\pm1$.

此时，級数的一般項的絕对值

$$|u_n|=\left|\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}\right|\geqslant\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n}{n!}=1,$$

故級数发散，也就是說，二項展式只在 $-1<x<1$ 內成立。

ii) $-1<m<0$.

当 $x=-1$ 时，級数为正項級数，其一般項

$$\begin{aligned}u_n&=\left|\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}\right|\\&=|m|\cdot\left|\frac{-m+1}{1}\right|\cdot\left|\frac{-m+2}{2}\right|\cdots\left|\frac{-m+n-1}{n-1}\right|\frac{1}{n}\\&>|m|\cdot\frac{1}{n},\end{aligned}$$

而 $\sum \frac{1}{n}$ 发散，故二項式幂級数展式发散。

当 $x=1$ 时，級数为交錯級数，由于

$$|u_n|=\left|\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}\right|$$
$$>\left|\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}\right|\left|\frac{n-m}{n+1}\right|=|u_{n+1}|$$

及

$$|u_n|=\left(1-\frac{1+m}{1}\right)\left(1-\frac{1+m}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{1+m}{n-1}\right)\left(1-\frac{1+m}{n}\right),$$

而 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1+m}{n}\right)$ 发散于零，即

$$|u_n|\to 0,$$

故按萊伯尼茲定理，二項式級数在 $x=1$ 时收斂。

綜上所述，$(1+x)^m$ 当 $-1<m<0$ 时，在 $-1<x\leqslant 1$ 中可展为二項式級数。

iii) $m>0$，$x=\pm 1$。

首先，由洛毕达法則容易得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\log\left(1-\frac{m}{n}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}=1+m,$$

故若取 α 适合 $1<\alpha<1+m$，則当 n 充分大时，就有

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\log\left(1-\frac{m}{n}\right)>\alpha\log\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

亦即
$$\frac{n+1}{n-m}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha}.$$

現考慮二項式級数，它的一般項之比当 n 充分大时为

$$\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|}=\frac{n+1}{n-m}>\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha}$$

或
$$|u_{n+1}|(n+1)^{\alpha}\leqslant|u_n|n^{\alpha},$$

也就是說$\{|u_n|n^\alpha\}$是有界的，設

$$|u_n|n^\alpha < A \quad (n=1, 2, 3, \cdots),$$

那么

$$|u_n| < \frac{A}{n^\alpha},$$

而級数$\sum \frac{1}{n^\alpha}$收斂，故二項式級数收斂，也就是說，当$m>0$时，$(1+x)^m$在$-1\leqslant x\leqslant 1$上可展为二項式級数。

最后要注意的是，一个函数$f(x)$的泰勒級数并不一定收斂，并且即使收斂也不一定收斂于$f(x)$（参見习題8）。討論泰勒級数是否收斂于$f(x)$的問題主要就要討論它的余項是否趋于零。

§3　冪級数在近似計算中的应用

如果一个函数可以用冪級数来表示，那么若取級数的前若干項，它就可作为函数的近似表示式，而且由于$n\to\infty$时，$R_n(x)\to 0$，因此取的項愈多，結果也愈精确。下面只举两个例子說明冪級数在近似計算中的应用。

［例1］　求e的近似值准确到六位小数。

首先决定究竟取多少項才能达到所要的精确度。由于

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots,$$

故若一直取到$\frac{1}{n!}$，則級数的余和

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right] \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\right\}=\frac{1}{n\cdot n!} \end{aligned}$$

（若用$R_n(x)=\frac{e^\theta}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}$亦可，但結果較差）。經过計

算知道，只要取 $n=9$，則

$$0<r_n<4\cdot10^{-7},$$

但所剩的 10 項中，后七項也不能得到准确值，在計算每一項时，必須去掉某位小数以后的数字，通常可按四舍五入法或簡单地只舍不入或只入不舍。例如我們采取四舍五入的方法，并取七位小数，則得

$$2=2.0000000,\qquad \frac{1}{2!}=0.5000000,$$

$$\frac{1}{3!}=0.1666667,\qquad \frac{1}{4!}=0.0416667,$$

$$\frac{1}{5!}=0.0083333,\qquad \frac{1}{6!}=0.0013889,$$

$$\frac{1}{7!}=0.0001984,\qquad \frac{1}{8!}=0.0000248,$$

$$\frac{1}{9!}=0.0000028.$$

这样后七項每一項計算的誤差不超过 0.5×10^{-7}，因此总的誤差不超过 $7\times0.5\times10^{-7}=3.5\times10^{-7}$，連同 r_n 誤差不超过7.5×10^{-7}，因此不超过 10^{-6} 而达到所要求的精确度。經过簡单地計算，得到 e 的近似值为 2.7182816，其誤差不超过 7.5×10^{-7}。若考虑到 r_n 的符号，我們还可得到更精确的估計式：

$$2.718281-3.5\times10^{-7}\leqslant e\leqslant 2.718281+7.5\times10^{-7},$$

也还可以考虑計算每一項时是舍还是入和舍入的約数，以获得更好的結果。

［例 2］ 計算 $I=\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 准确到 0.0001.

首先将

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\cdots$$

从零到 1 积分，得到

$$I=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\frac{1}{1320}+\frac{1}{9360}-\frac{1}{75600}+\cdots,$$

这是交錯級数，它的余和的絕对值小于余和第一項的絕对值，現由于 $\frac{1}{75600}<1.5\times10^{-5}$，故取前七項即可，从

$$1+\frac{1}{10}=1.10000,\qquad -\frac{1}{3}=-0.33333,$$

$$-\frac{1}{42}=-0.02381,\qquad \frac{1}{216}=0.00463,$$

$$-\frac{1}{1320}=-0.00076,\qquad \frac{1}{9360}=0.00011$$

可得
$$\begin{aligned}I&\doteq(1.10000+0.00463+0.00011)\\&\quad-(0.33333+0.02381+0.00076)\\&=1.10654-0.35790=0.74864.\end{aligned}$$

其誤差不超过 $1.5\times10^{-5}+5\times0.5\times10^{-5}=4\times10^{-5}<0.0001$.

习 題

1. 求下列各幂級数的收斂区間：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n+1)}{n+1}x^{n+1}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x\right]^n$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$; (6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$.

2. 求級数的收斂半徑：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$; (2) $\sum\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n$.

3. 設幂級数 $\sum a_nx^n$ 的收斂半徑为 R，$\sum b_nx^n$ 的收斂半徑为 Q，討論下列級数的收斂半徑：

(1) $\sum a_nx^{2n}$; (2) $\sum(a_n+b_n)x^n$;

(3) $\sum a_nb_nx^n$.

4．設对充分大的 n，$|a_n|\leq|b_n|$，那末級数 $\sum a_nx^n$ 的收斂半徑不小于 $\sum b_nx^n$ 的收斂半徑。

5．設 $\sum\limits_0^\infty a_n$ 收斂于 A，$\sum\limits_0^\infty b_n$ 收斂于 B，如果它們的柯西乘积

$$\sum_0^\infty c_n=\sum_0^\infty(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)$$

收斂，则一定收斂于 AB。

（提示：作 $A(x)=\sum a_nx^n$，$B(x)=\sum b_nx^n$ 及 $c(x)=\sum c_nx^n$ 并应用冪級数的阿貝尔第一定理。）

6．設 $f(x)=\sum\limits_0^\infty a_nx^n$ 当 $|x|<r$ 收斂，那么当 $\sum\limits_0^\infty\dfrac{a_n}{n+1}r^{n+1}$ 收斂时成立

$$\int_0^r f(x)\,dx=\sum_0^\infty\frac{a_n}{n+1}r^{n+1},$$

不論 $\sum\limits_0^\infty a_nx^n$ 当 $x=r$ 时是否收斂。

7．利用上題証明 $\displaystyle\int_0^1\frac{\log(1-t)}{t}\,dt=-\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}$。

8．求 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{\sin(2^n\cdot x)}{n!}$ 的馬克劳林級数，說明它的馬克劳林級数并不表示这个函数。

9．証明 $J_0(x)=1+\displaystyle\sum_{k=1}^\infty(-1)^k\frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}$ 适合

$$xJ_0''(x)+J_0'(x)+xJ_0(x)=0;$$

反之求适合 $xu''+u'+xu=0$ 的冪級数形式的解。

10．証明：

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 滿足 $y^{(\mathrm{IV})}=y$；

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty\frac{x^n}{(n!)^2}$ 滿足 $xy''+y'-y=0$。

11．展开：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{a-x}\ (a\neq0)$ 成为 x 的冪級数，并确定收斂范圍；

(2) $f(x)=\log x$ 为 $(x-2)$ 的冪級数。

12．利用已知展开式展开下列函数为冪級数，并确定成立的范圍：

(1) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；　　(2) $\sin^2x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$；

(3) $\sqrt{x^3}$ 展为 $(x-1)$ 的幂級数。

13. 展开 $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$ 为 x 的幂級数，并推出 $1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$.

14. 求下列函数的幂級数展开式，并推出收斂半徑：

(1) $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$;　　(2) $\int_0^x \cos t^2 dt$.

15. 利用幂級数展开式确定下列极限值：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\cos x}{x^3\sin x}-\frac{3}{x^4}\right]$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

16. 求一幂級数 $f(x)$ 使适合 $f''(x)+f(x)=0$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, 这幂級数的收斂半徑如何?

17. 利用近似公式計算下列近似值(到第三位小数)：

(1) $\sqrt[8]{70}$;　　(2) $\int_0^1\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$;

(3) $\int_0^{\frac{1}{10}}\frac{\log(1+t)}{t}\,dt$.

第四章　广义积分

§1 无穷限的积分

一、在定积分的定义中，說到一种和式的极限，那时，被积函数必为有界函数，而区間是有限的区間。現在我們研究定积分概念的两种推广，就是区間无穷或函数在有限区間上为无界的两种情形，这些推广不論在理論上或是在应用上都有重大的意义。

我們先考察函数 $y=\frac{1}{x^2}$，当 $x\geqslant 1$ 时，y 随 x 的增大而减小，位于曲綫 $y=\frac{1}{x^2}$ 之下，x 軸之上而夹在 $x=1, x=A$ 直綫之間的区域的面积为（图 4-4-1）

$$I(A)=\int_1^A\frac{dx}{x^2}=1-\frac{1}{A},$$

当 A 增大时，面积也增大；但始終保持有界，且

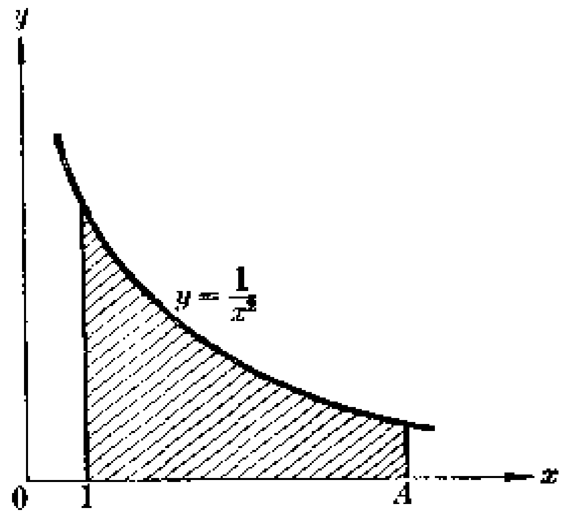


图 4-4-1

$$\lim_{A\to\infty}I(A)=1,$$

自然，可以把阴影区域的面积的极限了解为位于曲綫 $y=\frac{1}{x^2}$ 之下、x 軸之上、直綫 $x=1$ 之右向右无限延展的区域的面积。

但是，如果对曲綫 $y=\frac{1}{x}$，$x>1$，考察同样的問題，有

$$\int_1^A\frac{1}{x}\,dx=\ln A\to\infty\quad(A\to\infty).$$

在这情形下，相应的区域的面积将随 A 增大而无限地增大，而无限

延展的区域就沒有有限的面积了。

討論上述类型的积分在变动积分限时的极限問題就是广义积分的中心問題。

定义 設函数 $f(x)$ 对于任意的 $A(A>a)$ 在区間 $[a, A]$ 上可积，当有限的极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,dx$$

存在时，称这极限值 I 为 $f(x)$ 在区間 $[a, +\infty)$ 上（或是从 a 到 $+\infty$）的广义积分，記作：

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = I = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,dx.$$

这时也称积分 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 是收斂的，并且用記号 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 来表示它的值；如果上述的极限不存在，称积分 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 是发散的，这时虽仍用同样的記号，但已不表示数值了。

我們注意到，在这个定义里，只假定 $f(x)$ 在 $[a, A]$ 上可积，沒有要求它是連續函数。

类似地，如果 $f(x)$ 在任意的 $[A', b]$ 上可积，而 $\lim\limits_{A'\to-\infty}\int_{A'}^b f(x)\,dx$ 存在，称这极限值为 $f(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 上的积分，否則就說积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ 是发散的。

又当 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$，$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ 皆收斂，規定这些值的和为 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上的积分，記为 $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$，也称 $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ 收斂。显然在收斂时

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{\substack{A\to+\infty\\ A'\to+\infty}}\int_{-A'}^A f(x)\,dx.$$

須要注意的是：这里 $A\to+\infty$ 和 $A'\to-\infty$ 两者之間是独立变化的，如果上式右边的极限不存在，$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ 称为发散的。

如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，就有

$$\int_a^A f(x)\,dx = F(A) - F(a).$$

因此$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ 收斂，相当于 $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A) \equiv F(+\infty)$ 存在，从而

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(a).$$

同样有
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(-\infty)$$

或
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(-\infty).$$

[例 1] 討論积分$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$，$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}$，$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ 的收斂性。

$$\int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x \Big|_0^A = \operatorname{arc\,tg} A - \operatorname{arc\,tg} 0$$

$$= \operatorname{arc\,tg} A \to \frac{\pi}{2} \quad (A\to+\infty),$$

所以积分$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ 收斂，数值等于 $\frac{\pi}{2}$。

同样，$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{A'\to-\infty}[\operatorname{arc\,tg} 0 - \operatorname{arc\,tg} A'] = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

因此
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

[例 2] 討論$\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ $(a>0)$的收斂情形，这里 p 是实数。

設 $p\neq 1$，
$$\int_a^A \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}\,x^{1-p}\Big|_a^A = \frac{1}{1-p}\,(A^{1-p} - a^{1-p})$$

$$\xrightarrow[A\to+\infty]{}\begin{cases}\infty, & 1-p>0,\\ -\dfrac{1}{1-p}\,a^{1-p}, & 1-p<0.\end{cases}$$

当 $p=1$，
$$\int_a^A \frac{dx}{x} = \ln A - \ln a \to \infty \quad (A\to+\infty).$$

所以积分 $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ 当 $p>1$ 时收敛（数值等于 $\frac{1}{p-1}a^{1-p}$），当 $p\leqslant 1$ 时发散。这个例题在以后的柯西收斂判别法中取为基本的积分。

[例 3] $\int_a^\infty \cos x\, dx$ 是发散的积分。

因为 $\int_a^A \cos x\, dx = \sin A - \sin a$，当 $A\to\infty$ 时，$\sin A$ 的极限不存在，所以 $\int_a^\infty \cos x\, dx$ 发散。

以后对于无穷限积分的討論，仅对 $\int_a^\infty f(x)dx$ 型的积分来进行，因为一切結論很容易推到 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$，$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ 型的积分去。

二、从无穷限积分的定义容易看出它有以下的簡单性质：如果所写出的积分是收斂的，就成立

1° $$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$$

以及 $$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx,$$

其中 a, c 是任意的数；

2° $$\int_a^\infty kf(x)dx = k\int_a^\infty f(x)dx,\ k\text{ 是常数；}$$

3° $$\int_a^\infty [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^\infty f(x)dx \pm \int_a^\infty g(x)dx;$$

4° 分部积分法对无穷限积分成立

$$\int_a^\infty u dv = uv\Big|_a^\infty - \int_a^\infty v du;$$

5° 对无穷限积分，也有换元法則。

这些結論皆容易从定义得到。

三、收斂的条件　对于无穷限积分，只在一些簡单的情形容易直接算出它的数值。在不少的問題中，和級数的討論一样，只需

要判断积分是否收敛。在知道积分收敛时，根据对于收敛的积分所建立的一些运算方法，有时也可能进一步求出积分的数值。因此在广义积分的問題中，判别它們的收敛性是很重要的。

由于$\int_a^{\infty} f(x)dx$的收敛性問題是函数$I(A)=\int_a^A f(x)dx$的极限問題，所以根据函数的极限存在的充分和必要条件（柯西条件）得到以下的收敛原理。

柯西收敛原理：积分$\int_a^{\infty} f(x)dx$收敛的充分和必要条件是：对于任意的$\varepsilon>0$，存在$A_0(A_0\geqslant a)$，当A，$A'\geqslant A_0$时，

$$
\begin{aligned}
|I(A')-I(A)| &= \left|\int_a^{A'} f(x)dx-\int_a^A f(x)dx\right| \\
&= \left|\int_A^{A'} f(x)dx\right|<\varepsilon
\end{aligned}
$$

成立。

如果当$x\geqslant a$时，$f(x)\geqslant 0$，那末$\int_a^A f(x)dx$是A的上升函数，只要$\int_a^A f(x)dx$有界，就可断定$\int_a^{\infty} f(x)dx$收敛了，这和正項級数收敛性的結論是类似的。

四、絕对收敛积分 設$\int_a^A f(x)dx$对于任何$A\geqslant a$存在，又$\int_a^{\infty}|f(x)|dx$收敛，就称$\int_a^{\infty} f(x)dx$絕对收敛，也称$f(x)$在$[a,\infty)$上絕对可积，收敛而不絕对收敛的积分称为条件收敛积分。

定理 如果$\int_a^{\infty} f(x)dx$絕对收敛，那末$\int_a^{\infty} f(x)dx$必为收敛。

这是因为对于一切大于a的A，A'，下式是成立的：

$$
\left|\int_A^{A'} f(x)dx\right|\leqslant\left|\int_A^{A'}|f(x)|dx\right|.
$$

五、无穷限积分与无穷級数的联系 記$I(A)=\int_a^A f(x)dx$。我們知道函数的极限与数列的极限的关系是：$\lim\limits_{A\to\infty} I(A)$存在同以下的事实等价，对任何发散于$+\infty$的数列$\{A_n\}$，$A_n\geqslant a$，数列$\{I(A_n)\}$有同一极限值。

任意选取上述的数列 $\{A_n\}$，并置 $a=A_0$，就有

$$\int_a^{A_n} f(x)\,dx=\int_{A_0}^{A_1} f(x)\,dx+\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx+\cdots+\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)\,dx,$$

記 $u_k=\int_{A_{k-1}}^{A_k} f(x)\,dx$，于是

$$\int_a^{A_n} f(x)\,dx=u_1+u_2+\cdots+u_n=\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

因此，如果积分 $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ 收斂于 L，那末每一个这样的級数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 也收斂于 L。从此得到以下推論：如果找到一个数列 $\{A_n\}$，使所作出的級数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 不收斂，或是找到两个数列，使所作出的两个級数不收斂于同一值，就能断定 $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ 不收斂。

另一方面，每一无穷級数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$，可以看作一个阶梯函数的无穷积分的极限过程中，一个特别的数列的极限(图 4-4-2)。这只要置 $f(x)=u_k$，$k\leqslant x<k+1$，因而

$$\sum_{k=1}^{n} u_k=\int_1^{n+1} f(x)\,dx.$$

所以 $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ 在作为 $\int_1^{A} f(x)\,dx$ 的极限过程中，当取 $\{A_n\}=\{n\}$ 时，就得到数列 $\left\{\sum_{k=1}^{n} u_k\right\}$。

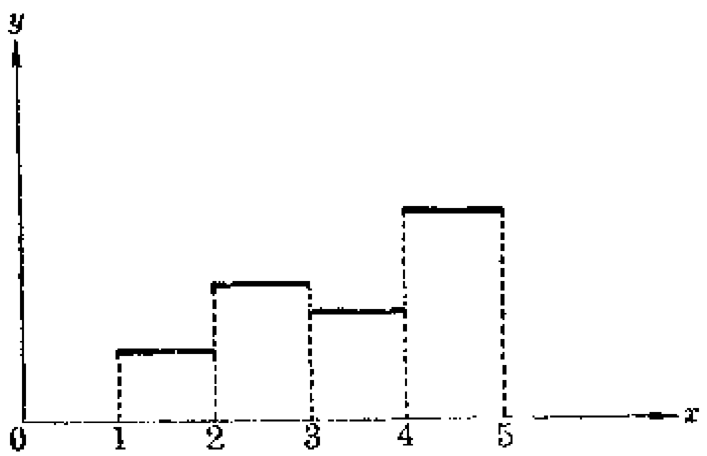


图 4-4-2

我們知道級数上的柯西积分判别法也是应用类似的考虑得到的。以后我們将要看到广义积分和无穷級数、函数項級数和含参变量广义积分之間的种种联系，需要經常加以对比。

§2 无穷限积分的收敛性判别法

一、几种基本的收斂性判别法

在积分$\int_a^A f(x)\,dx$（A 为任何大于 a 的数）存在的假定下，有如下的判别法：

1° 比較判别法：設从某一值 $a_0\geqslant a$ 起，常有 $|f(x)|\leqslant\varphi(x)$，而积分$\int_a^\infty\varphi(x)\,dx$ 收斂，那末积分$\int_a^\infty f(x)\,dx$ 絕对收斂；又如果 $|f(x)|\geqslant\varphi(x)\geqslant 0$，而积分$\int_a^\infty\varphi(x)\,dx$ 发散，那末积分$\int_a^\infty|f(x)|\,dx$ 发散。

这个判别法直接从收斂性条件推出，同时它有极限形式。

2° 比較判别法的极限形式：

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|f(x)|}{\varphi(x)}=l$，$0\leqslant l<+\infty$，且$\int_a^\infty\varphi(x)\,dx$ 收斂，那末积分$\int_a^\infty f(x)\,dx$ 絕对收斂。

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|f(x)|}{\varphi(x)}=l$，$0<l\leqslant\infty$，且$\int_a^\infty\varphi(x)\,dx$ 发散，那末积分$\int_a^\infty|f(x)|\,dx$ 发散。

【証明】 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|f(x)|}{\varphi(x)}=l\neq 0$，那末对于 ε（使 $l-\varepsilon>0$），存在 x_0，当 $x\geqslant x_0$ 时

$$0<l-\varepsilon<\frac{|f(x)|}{\varphi(x)}<l+\varepsilon,$$

即
$$(l-\varepsilon)\varphi(x)<|f(x)|<(l+\varepsilon)\varphi(x)$$

成立，显然$\int_a^\infty\varphi(x)\,dx$ 与$\int_a^\infty|f(x)|\,dx$ 同时收斂或发散。

在 $l=0$，$l=\infty$ 时可以类似地說明。

3° 柯西判别法：在1°，2°中取 $\varphi(x)=\frac{c}{x^p}\ (c>0)$，就得到柯西判别法：

如果 $|f(x)|\leqslant\frac{c}{x^p}$，$p>1$，那末 $\int_a^\infty f(x)dx$ 絕对收斂；

如果 $|f(x)|\geqslant\frac{c}{x^p}$，$p\leqslant 1$，$f(x)$ 自某一值起保持定号，那末积分 $\int_a^\infty f(x)dx$ 发散。

4° 柯西判別法的极限形式：

如果 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{|f(x)|}{\frac{1}{x^p}}=\lim\limits_{x\to\infty}x^p|f(x)|=l\ (0\leqslant l<\infty;\ p>1)$，那末积分 $\int_a^\infty f(x)dx$ 絕对收斂。

如果 $\lim\limits_{x\to\infty}x^p|f(x)|=l$，而 $0<l\leqslant\infty$，$p\leqslant 1$，那末 $\int_a^\infty|f(x)|dx$ 发散。

［例1］ 判定 $\int_1^\infty\frac{\sin x}{x\sqrt{1+x^2}}dx$ 的收斂性。

因为
$$\left|\frac{\sin x}{x\sqrt{1+x^2}}\right|\leqslant\frac{1}{x^2},$$
所以积分絕对收斂。

［例2］ 对于任何 α，$\int_1^\infty x^\alpha e^{-x}dx$ 收斂。

因为对于任何固定的 α，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot(x^\alpha e^{-x})=0$，由4°知积分收斂。

［例3］ 討論积分 $\int_2^\infty\frac{dx}{x^\lambda\ln x}$ 的收斂性，其中 λ 是实数。

$$\lim_{x\to+\infty}x^p\cdot\frac{1}{x^\lambda\ln x}=\lim_{x\to+\infty}x^{p-\lambda}\frac{1}{\ln x}=\begin{cases}0, & \lambda>p,\\ \infty, & \lambda<p,\\ 0, & \lambda=p.\end{cases}$$

在上面的极限值为零以及当 $p>1$ 时，从而 $\lambda>1$ 时，积分收斂；在上面的极限值为 ∞ 以及当 $p<1$ 时，从而 $\lambda<1$ 时，积分发散；当 $\lambda=1$ 时，$\int_2^\infty\frac{dx}{x\ln x}=\ln\ln x\Big|_2^\infty=\infty$，所以积分发散。綜合起来，

$\int_2^\infty \frac{dx}{x^\lambda \ln x}$ 当 $\lambda>1$ 时收斂，$\lambda\leqslant 1$ 时发散。

二、第二中值定理

前面的一些判别法都是討論积分 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 的絕对收斂性的，对于一般的积分，将介紹阿貝尔判别法和狄利克来判别法，这些判别法和級数中的同名的判别法十分相似。为了讲这些判别法，先証明第二中值定理，它的作用相当于阿貝尔变换式。

第二中值定理 設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，而 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单調，那末在 $[a,b]$ 上存在 ξ，使

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

特别，如果 $g(x)$ 单調上升且 $g(a)\geqslant 0$，那末有 ξ，使

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx. \qquad (2)$$

【証明】 由假定，$f(x)$、$g(x)$ 在区間 $[a,b]$ 上皆可积，因而 $f(x)\,g(x)$ 可积。我們先在 $g(x)$ 非負、单調上升的假定下証明(2)，然后再推出一般情形的公式(1)。

在 $[a,b]$ 上取一列分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$，記 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，ω_i 是 $g(x)$ 在 Δx_i 上的振幅，把所討論的积分作如下改变

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)\,dx = \sum_{i=1}^n g(x_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$
$$+\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,[g(x)-g(x_i)]\,dx \equiv \sigma+\rho.$$

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界：$|f(x)|\leqslant L$，估計

$$|\rho| = \left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,[g(x)-g(x_i)]\,dx\right|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)|\,|g(x)-g(x_i)|\,dx$$

$$\leqslant L\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\omega_i\,dx=L\sum_{i=1}^{n}\omega_i\,\Delta x_i,$$

由于 $g(x)$ 可积，所以当 $\lambda=\max\Delta x_i\to 0$ 时，$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\,\Delta x_i\to 0$；因此，$\lim_{\lambda\to 0}\rho=0$，从而

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}g(x_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)dx.$$

以上的改变說明在一定的精确度的范圍内，积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 的被积函数的因子之一可以用阶梯函数代替。以下实质上是应用阿貝尔变換式来进行討論的。

記 $F(x)=\int_x^b f(x)dx$，那末 $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的連續函数，有最大值 M 和最小值 m，$m\leqslant F(x)\leqslant M$，显然有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)dx=F(x_{i-1})-F(x_i),\ F(x_n)=F(b)=0.$$

从而

$$\begin{aligned}\sigma&=\sum_{i=1}^{n}g(x_i)\left[F(x_{i-1})-F(x_i)\right]\\&=\sum_{i=1}^{n}g(x_i)F(x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}g(x_i)F(x_i)\\&=g(x_1)F(x_0)+\sum_{i=2}^{n}g(x_i)F(x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n-1}g(x_i)F(x_i)\\&=g(x_1)F(x_0)+\sum_{i=1}^{n-1}\left[g(x_{i+1})-g(x_i)\right]F(x_i),\end{aligned}$$

因为 $g(x_1)\geqslant g(x_0)=g(a)\geqslant 0$，$g(x_{i+1})-g(x_i)\geqslant 0$，所以

$$m\left\{g(x_1)+\sum_{i=1}^{n-1}(g(x_{i+1})-g(x_i))\right\}$$

$$\leqslant\sigma\leqslant M\left\{g(x_1)+\sum_{i=1}^{n-1}(g(x_{i+1})-g(x_i))\right\},$$

$$mg(b)\leqslant\sigma\leqslant Mg(b),$$

因此 $\lim\sigma=\mu g(b)$，而 μ 在 m，M 之間。因为 $F(x)$ 連續，有 $[a,b]$ 之間的 ξ 存在，使 $\mu=F(\xi)=\int_\xi^b f(x)dx$，从而公式(2)

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

得到証明。

在 $g(x)$ 是一般的单調上升情形，作 $\psi(x)=g(x)-g(a)$，ψ 为单調上升且 $\psi(a)\geqslant 0$，公式(2)对 $\psi(x)$ 成立，即有 ξ 使下式成立：

$$\int_a^b f(x)[g(x)-g(a)]dx=[g(b)-g(a)]\int_\xi^b f(x)dx,$$

这就是公式(1)

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

三、两个常用的判别法

阿貝尔判别法：如果 $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上可积，$g(x)$ 单調有界，那末积分 $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ 收斂。

【証明】 依假定，可以利用第二中值定理，在任何 $[A,A']$ 上，存在 ξ，使

$$\int_A^{A'} f(x)g(x)dx=g(A)\int_A^\xi f(x)dx+g(A')\int_\xi^{A'} f(x)dx.$$

因为 $\int_a^\infty f(x)dx$ 收斂，所以对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $A_0\geqslant a$，使当 A'，$A\geqslant A_0$ 时，成立

$$\left|\int_A^\xi f(x)dx\right|<\varepsilon,\quad \left|\int_\xi^{A'} f(x)dx\right|<\varepsilon,$$

又 $|g(x)|<L$，所以当 A'、$A\geqslant A_0$ 时，有

$$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)dx\right|$$
$$\leqslant |g(A)|\left|\int_A^\xi f(x)dx\right|+|g(A')|\left|\int_\xi^{A'} f(x)dx\right|\leqslant 2L\varepsilon.$$

根据柯西收斂原理推知积分 $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ 收斂。

狄利克来判别法：如果 $F(A)=\int_a^A f(x)dx$ 有界：$\left|\int_a^A f(x)dx\right|$

$\leqslant K$，$g(x)$ 单調且当 $x\to+\infty$ 时趋向于零，那末积分 $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ 收斂。

【証明】 因 $g(x)\to 0\,(x\to+\infty)$，对任何 $\varepsilon>0$，有 A_0，使当 $A'>A\geqslant A_0$ 时，$|g(A)|<\varepsilon$，$|g(A')|<\varepsilon$。又因 $\left|\int_a^A f(x)dx\right|\leqslant K$，所以

$$\left|\int_A^\xi f(x)dx\right|=\left|\int_a^\xi f(x)dx-\int_a^A f(x)dx\right|\leqslant 2K.$$

同样有
$$\left|\int_\xi^{A'} f(x)dx\right|\leqslant 2K.$$

利用第二中值定理，得到只要 A'，$A\geqslant A_0$，就有

$$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)dx\right|$$
$$\leqslant|g(A)|\left|\int_A^\xi f(x)dx\right|+|g(A')|\left|\int_\xi^{A'} f(x)dx\right|\leqslant 4K\varepsilon.$$

所以积分 $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ 收斂。

[例 1] 积分 $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ 收斂，而不絕对收斂。

因为 $\left|\int_1^A \sin x\,dx\right|=|\cos A-\cos 1|\leqslant 2$，又 $\frac{1}{x}$ 单調而当 $x\to\infty$ 时趋于零，由狄利克来判别法知道 $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ 收斂。但是

$$\frac{|\sin x|}{x}\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x},$$

再应用狄利克来判别法知道 $\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x}dx$ 收斂，因为 $\left|\int_1^A \cos 2x\,dx\right|=\frac{1}{2}|\sin 2A-\sin 2|\leqslant 1$ 以及 $\frac{1}{2x}\to 0\,(x\to 0$，单調地)；另外 $\int_1^\infty \frac{dx}{2x}$ 发散，所以 $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx$ 发散。

类似的討論得到 $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\lambda}dx$ 和 $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^\lambda}dx$ 当 $1>\lambda>0$ 时收斂但非絕对收斂（参見习題 4）。

[例 2] 积分$\int_1^\infty \frac{\sin x \cdot \operatorname{arc\,tg} x}{x^\lambda} dx \,(1 \geq \lambda > 0)$ 收斂。

因为$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\lambda} dx$ 收斂，又 $\operatorname{arc\,tg} x$ 在$[1, \infty)$上单調有界，由阿貝尔判别法知道所討論的积分是收斂的。

§3 无界函数的积分

一、无界函数的积分的定义

当函数$f(x)$在一区間$[a, b]$上是无界的情形，我們把定积分概念作如下的推广。

定义 設函数$f(x)$在$x=b$点的邻近无界，但对于任意充分小的正数η，$f(x)$在$[a, b-\eta]$上可积，即

$$\phi(\eta) = \int_a^{b-\eta} f(x)\, dx$$

存在。如果$\lim\limits_{\eta\to 0} \phi(\eta)$存在，那末称此极限值是无界函数$f(x)$从$a$到$b$的积分，記为$\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\eta\to 0}\int_a^{b-\eta} f(x)\,dx$；也称无界函数$f(x)$在$[a, b]$上可积，或称广义积分$\int_a^b f(x)\,dx$收斂。如果上述的极限不存在，就說积分$\int_a^b f(x)\,dx$发散。

我們注意，在記号上并看不出同常义积分有什么区别。

同样，如果$f(x)$在$[a+\eta', b]$上(η'充分小的任意正数)可积，又在a点邻近无界，当$\lim\limits_{\eta'\to 0}\int_{a+\eta'}^b f(x)\,dx$存在时，称此极限值为在$a$点邻近无界的函数在$[a, b]$上的积分，也称积分(广义积分)$\int_a^b f(x)\,dx$收斂。

一般地，如果$f(x)$在$[a, b]$内部一点c附近无界，那末規定当两个广义积分

$$\int_a^c f(x)\,dx, \quad \int_c^b f(x)\,dx$$

皆收斂时，称它們的和为广义积分$\int_a^b f(x)\,dx$之值。只要其中有一个不收斂，就称积分发散。

由定义可知，如果积分$\int_a^b f(x)\,dx$收斂，那末当η，η'独立地趋于零时，存在极限

$$\lim_{\substack{\eta\to 0\\ \eta'\to 0}}\left(\int_a^{c-\eta} f(x)\,dx+\int_{c+\eta'}^b f(x)\,dx\right).$$

如果函数在一点的邻近无界，我們就称这一点是函数的奇点。在一区間$[a,\ b]$上有有限个奇点或在区間$[a,\ \infty)$上有奇点，我們可以把区間分成只含一个奇点的区間或是分成含一个奇点以及一个不含奇点的无穷区間，分别考虑这些区間上的积分，当它們都收斂时，把它們的和定义为所考虑区間上的积分值。

例如　$$\int_0^\infty \frac{dx}{x(2-x)}=\left(\int_0^1+\int_1^3+\int_3^\infty\right)\frac{dx}{x(2-x)}.$$

从无界函数积分的定义知道，如果函数$f(x)$在$[a,\ b]$上以c为奇点，又积分$\int_a^b f(x)\,dx$收斂，那末以下的性质仍旧保持：函数$\int_a^x f(x)\,dx$在$[a,\ b]$上是連續函数。事实上，当$x\neq c$时，結論是明显的；当$x=c$时，$\int_a^c f(x)\,dx$就是根据連續性定义的，因为

$$\lim_{x\to c-0}\int_a^x f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx;$$

又当$x>c$时，

$$\int_a^x f(x)=\left(\int_a^c+\int_c^x\right)f(x)\,dx\to\int_a^c f(x)\,dx\quad (x\to c+0).$$

［例 1］　討論积分$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$的收斂情形。

当$p\leqslant 0$时，积分是常义积分。

当$p>0$时，$\frac{1}{(x-a)^p}$无界，$x=a$是奇点。

当 $p\neq 1$ 时，$\displaystyle\int_{a+\eta}^{b}\frac{dx}{(x-a)^{p}}=\frac{1}{1-p}(x-a)^{1-p}\Big|_{a+\eta}^{b}$

$$=\frac{1}{1-p}[(b-a)^{1-p}-\eta^{1-p}]$$

$$\underset{\eta\to 0}{\longrightarrow}\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}(b-a)^{1-p}, & 1-p>0,\text{ 即 } p<1,\\ +\infty, & 1-p<0,\text{ 即 } p>1.\end{cases}$$

当 $p=1$ 时，

$$\int_{a+\eta}^{b}\frac{dx}{x-a}=\ln(x-a)\Big|_{a+\eta}^{b}=\ln(b-a)-\ln\eta\to+\infty\ (\eta\to+0).$$

所以，当 $p<1$ 时，积分 $\displaystyle\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^p}$ 收斂于 $\dfrac{1}{1-p}(b-a)^{1-p}$；当 $p\geqslant 1$ 时，积分发散。

对于积分 $\displaystyle\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^p}$ 的收斂性有同样的結論。

[例 2] 討論积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 的收斂性。

$x=1$ 是被积函数的奇点，

$$\int_0^{1-\eta}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_0^{1-\eta}=\arcsin(1-\eta)\to\frac{\pi}{2},\ \eta\to 0.$$

（注） 定积分的一些性质对于无界函数积分也是成立的，特别，換元法則成立。

二、收斂性条件和收斂性判別法

設函数 $f(x)$ 以区間 $[a, b]$ 的右端点 b 为奇点，积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ 收斂的充分和必要条件为：对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<\eta$，$\eta'\leqslant\delta$ 时，$|\phi(\eta')-\phi(\eta)|=\left|\displaystyle\int_{b-\eta}^{b-\eta'}f(x)dx\right|<\varepsilon$ 成立。且因为已記 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\lim_{\eta\to 0}\int_a^{b-\eta}f(x)dx$，所以 $\displaystyle\lim_{\eta\to 0}\int_{b-\eta}^{b}f(x)dx=0$。

同样，如果 $f(x)$ 在 $x=a$ 有奇点，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ 收斂的充分和必要条件为：对于任何 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$，使当 $0<\eta$，$\eta'\leqslant\delta$ 时，

不等式 $\left|\int_{a+\eta}^{a+\eta'} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$ 成立。这时 $\lim\limits_{\eta\to 0}\int_a^{a+\eta} f(x)\,dx = 0$.

和无穷限积分的情形一样，可以証明以下的性质和判别法。

如果 $\int_a^{b-\eta} f(x)\,dx$ 和 $\int_a^b |f(x)|\,dx$ 存在，那末 $\int_a^b f(x)\,dx$ 必为收斂。这时称积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 为絕对收斂，收斂而不絕对收斂的积分称为条件收斂的。

下面我們將敘述几种收斂性判别法，而不加証明。

1° 柯西判别法（設 $f(x)$ 在 $x=a$ 有奇点）：

如果 $|f(x)| \leqslant \frac{c}{(x-a)^p}$ $(c>0)$，$p<1$，那末 $\int_a^b f(x)\,dx$ 絕对收斂。

如果 $|f(x)| \geqslant \frac{c}{(x-a)^p}$ $(c>0)$，$p\geqslant 1$，那末 $\int_a^b |f(x)|\,dx$ 发散。

柯西判别法的极限形式为：設

$$\lim_{x\to a}(x-a)^p|f(x)| = k.$$

如果 $0\leqslant k<\infty$，$p<1$，那末 $\int_a^b f(x)\,dx$ 为絕对收斂。

如果 $0<k\leqslant\infty$，$p\geqslant 1$，$f(x)$ 有定号，那末 $\int_a^b f(x)\,dx$ 发散。

2° 阿貝尔判别法：設 $f(x)$ 在 $x=a$ 有奇点，$\int_a^b f(x)\,dx$ 收斂，$g(x)$ 单調有界，那末积分 $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ 收斂。

3° 狄利克来判别法：設 $f(x)$ 在 $x=a$ 有奇点，$\int_{a+\eta}^b f(x)\,dx$ 是 η 的有界函数，$g(x)$ 单調且当 $x\to a$ 时趋于零，那末积分 $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ 收斂。

对 $\int_{a+\eta}^{a+\eta'} f(x)g(x)\,dx$ 应用第二中值定理可以証明后面的两个結論。

[例 3]　$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ 收斂。

因为 $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{3}{4}}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{x^{-\frac{1}{4}}}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}}=0$.

[例 4] 討論积分 $\int_0^1 \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x^r}dx$ $(2\geqslant r>0)$ 的收斂情形。

当 $0<r<1$, $\left|\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x^r}\right|\leqslant\dfrac{1}{x^r}$, 积分絕对收斂。

又 $$\left|\int_\eta^1 \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx\right|\leqslant\left|\sin 1-\sin\frac{1}{\eta}\right|\leqslant 2,$$

$$\int_0^1\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^r}dx=\int_0^1 x^{2-r}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx,$$

当 $2-r>0$ 即 $r<2$ 时，由狄利克来判别法，从 x^{2-r} 单調趋向于零 $(x\to0)$推知积分收斂。当 $r=2$ 时，$\int_\eta^1\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx=\sin\frac{1}{\eta}-\sin 1$，当 $\eta\to0$ 时无极限，所以积分 $\int_0^1\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$ 发散。

以下两个例题是下一章中要特别討論的两个欧拉积分。

[例 5] $\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$.

当 $s-1<0$ 时，被积函数在 $x=0$ 有奇点，同时积分又是无穷限积分。把这积分分成 $\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx+\int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}dx=I_1+I_2$，当两个积分皆收斂时，$\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$ 才收斂。

对于 I_1，$x^{s-1}e^{-x}$ 当 $x\to0$ 时等价于 x^{s-1}，所以当 $s-1>-1$ 即 $s>0$ 时 I_1 收斂，当 $s-1\leqslant-1$ 即 $s\leqslant0$ 时积分发散。

对于 I_2，由 §1 中例 2 知为收斂的，所以 $\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$ 当 $s>0$ 时收斂，其他情形发散。

[例 6] $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=I_1+I_2.$$

对 I_1，因为当 $x\to 0$ 时，$x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ 等价于 x^{p-1}，所以当 $p>0$ 时 I_1 收斂，$p\leqslant 0$ 时 I_1 发散。

对 I_2，因为当 $x\to 1$ 时，$x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ 等价于 $(1-x)^{q-1}$，所以当 $q>0$ 时 I_2 收斂，当 $q\leqslant 0$ 时 I_2 发散。

合并起来，积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ 当 $p>0$，$q>0$ 时收斂，其他情形发散。

三、一些补充事項

1° 积分的主值：无穷限积分 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ 之值是当 A，A' 独立地趋于∞时，$\int_{-A'}^{A}f(x)dx$ 的极限值。有时对于某些函数 $f(x)$，这样的极限并不存在，但是当 $A=A'$ 并令 $A\to\infty$ 时，$\int_{-A}^{A}f(x)\,dx$ 的极限存在，称这极限值为 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ \infty)$ 上积分的柯西的主值 (Valeur Principale)，記为

$$\text{V. P.}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}f(x)dx.$$

[例 7]　$\text{V. P.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\lim\limits_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}\frac{x}{1+x^2}dx=0.$

同样，对于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界，而 c 是唯一的奇点的情形，定义

$$\text{V. P.}\int_a^b f(x)dx=\lim_{\eta\to 0}\left[\int_a^{c-\eta}f(x)dx+\int_{c+\eta}^{b}f(x)dx\right].$$

[例 8]　設 $a<c<b$，求 $\int_a^b\frac{dx}{x-c}$ 的主值。

$$\int_a^{c-\eta}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\eta}^{b}\frac{dx}{x-c}$$
$$=\ln(c-x)\Big|_a^{c-\eta}+\ln(x-c)\Big|_{c+\eta}^{b}=\ln\frac{b-c}{c-a},$$

所以

$$\text{V. P.}\int_a^b\frac{dx}{x-c}=\ln\frac{b-c}{c-a}.$$

广义积分及其柯西主值之間的关系，参見习题 5。

2° 两种广义积分的平方可积和絕对可积之間的关系：对于无穷限的积分，平方可积和絕对可积互不相关，例如 $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{\frac{3}{4}}}$ 发散，但 $\int_1^\infty \frac{dx}{(x^{\frac{3}{4}})^2}=\int_1^\infty \frac{dx}{x^{\frac{6}{4}}}$ 收斂。

又如，定义函数 $f(x)=\begin{cases} n^2, & n\leqslant x<n+\frac{1}{n^4}, \\ 0, & n+\frac{1}{n^4}\leqslant x<n+1, \end{cases} \quad (n=1,2,\cdots).$

显然 $\int_1^{N+1} f(x)dx=\sum_{n=1}^N n^2\cdot\frac{1}{n^4}=\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$，当 $N\to\infty$ 时收斂，且 $\int_1^\infty f(x)dx$ 收斂；但是 $\int_1^{N+1}[f(x)]^2dx=\sum_{n=1}^N n^4\cdot\frac{1}{n^4}=N$，当 $N\to\infty$ 时无极限，从而 $\int_1^\infty f^2(x)dx$ 发散。

从后面的例子也可以看出，即使 $f(x)\geqslant 0$，$\int_1^\infty f dx$ 收斂。当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 并不一定趋于零，这里它甚至于是无界函数。但在某些条件下，却能保証 $f(x)$ 趋于零（参見习題 6）。

对于无界函数的积分，平方可积一定絕对可积，因为

$$|f(x)|\leqslant\frac{1+(f(x))^2}{2}.$$

但絕对可积的函数不一定平方可积。例如 $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}$ 收斂，但 $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{4}{3}}}$ 发散。

3° 两种广义积分之間有密切的联系。設 $\int_a^b f(x)dx$ 中的 $f(x)$ 以 a 为奇点，作变换 $y=\frac{1}{x-a}$，就有 $\int_a^b f(x)dx=\int_{\frac{1}{b-a}}^\infty \frac{f\left(a+\frac{1}{y}\right)}{y^2}dy$，这是无穷限积分。

§4 广义重积分

对于重积分我們也可以在两方面加以推广，得到区域无界和

函数无界的两种广义重积分，它們在数学物理中有很多应用。

一、区域无界的情形

定义　設 D 是平面上一无界区域(如全平面、半平面、有限区域的外部等等)。函数 $f(N)$ 在 D 上各点 N 有定义，用任意光滑曲綫 γ 在 D 中划出有限区域 σ (图 4-4-3)。設二重积分 $\iint\limits_{\sigma} f(N)d\sigma$ 存在，当曲綫 γ 連續变动，使所划出的区域 σ 无限扩展而趋于区域 D 时，如果不論 γ 的形状如何，也不論扩展的过程怎样，而

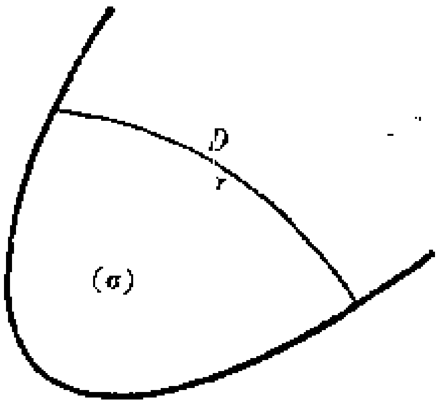


图　4-4-3

$$\lim_{(\sigma)\to D}\iint\limits_{\sigma} f(N)d\sigma$$

常有同一极限值 I，就称 I 是函数 $f(N)$ 在无界区域 D 上的积分，記为

$$I=\iint\limits_{D} f(N)d\sigma.$$

这时也称函数 $f(N)$ 在 D 上的积分收斂，或在 D 上为广义可积。

我們現在討論积分存在的条件。

广义重积分存在的充分必要条件：对任何 $\varepsilon>0$，D 中有有界区域 σ_0，当 D 中的任意两个区域 σ',σ'' 滿足 $\sigma''\supset\sigma'\supset\sigma_0$ 时，成立

$$\left|\iint\limits_{\sigma''} f(N)d\sigma-\iint\limits_{\sigma'} f(N)d\sigma\right|=\left|\iint\limits_{\sigma''-\sigma'} f(N)d\sigma\right|<\varepsilon,$$

其中 $\sigma''-\sigma$ 表示属于 σ'' 而不属于 σ' 的点的全体。

特别，如果 $f(N)$ 在 D 上非負，只要取一列区域

$\sigma_1\subset\sigma_2\subset\cdots\subset\sigma_{n-1}\subset\sigma_n\subset\cdots$，当 $n\to\infty$ 时 σ_n 扩展为 D.

如果 $\left\{\iint\limits_{\sigma_n} f(N)d\sigma\right\}$ 有界，积分 $\iint\limits_{D} f(N)d\sigma$ 就收斂，否則积分发散。

所以在 $f(N)\geqslant 0$ 时，只要区域按一种方式扩展就行了。

如果对重积分也定义絕对收斂积分，从收斂性条件立即知道絕对收斂积分一定是收斂的。但是对于广义重积分，收斂也包含了絕对收斂。这个結論我們不作証明，讀者可以参看菲赫金戈兹的微积分学教程三卷 588 段。

現在我們介紹广义重积分（区域无界情形）的柯西判别法。

定理 設 $f(N)$ 在无界区域 D 上的任意有界区域上二重积分存在：

1° 如果 $f(N)$ 在 D 内相当远处满足

$$|f(N)|\leqslant\frac{c}{r^p},$$

其中 c 为正常数，r 是 N 点到原点的距离，且 $p>2$，那末积分

$$\iint_D f(N)\,d\sigma$$

收斂。

2° 如果 $f(N)$ 在 D 内满足

$$|f(N)|\geqslant\frac{c}{r^p},$$

而 D 含有頂点为原点的无限扇形区域（图 4-4-4），且 $p\leqslant 2$，那末积分

$$\iint_D f(N)\,d\sigma$$

发散。

【証明】 1° 作以原点为中心的圓域 K_r，取 D 和 K_r 的公共部分 D_r 为扩展的区域。显然，当 $r\to\infty$ 时，$D_r\to D$。

設当 $r\geqslant r_0$ 时，$|f(N)|\leqslant\frac{c}{r^p}$ 成立，当 $r''>r'\geqslant r_0$ 时，記 $D_{r'}$，$D_{r''}$ 相差的部分为 $D_{r'r''}$。那末

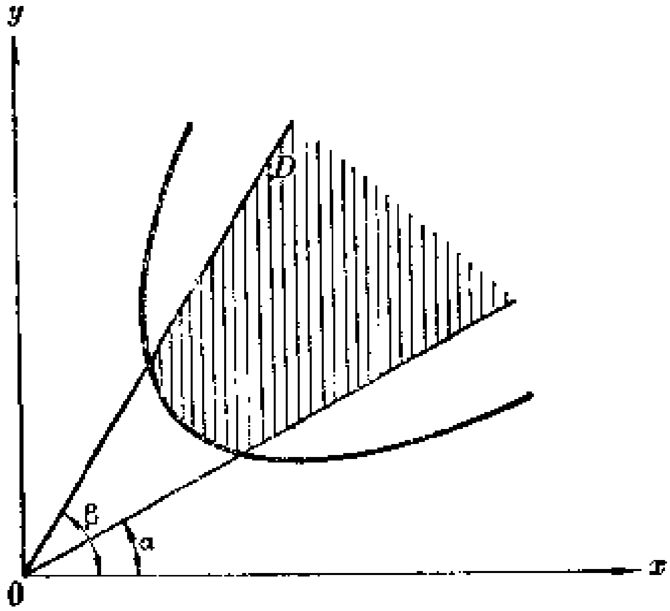


图 4-4-4

$$\iint_{D_{r'r''}} |f(N)| d\sigma \leqslant \iint_{D_{r'r''}} \frac{c}{r^p} d\sigma \leqslant \iint_{r' \leqslant r \leqslant r''} \frac{c}{r^p} d\sigma = c\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r'}^{r''} \frac{r dr}{r^p}$$

$$= 2c\pi \cdot \frac{1}{2-p}\left[\frac{1}{r''^{p-2}} - \frac{1}{r'^{p-2}}\right],$$

对于任意的 $\varepsilon>0$，可求到 $r^* \geqslant r_0$，当 $r''>r' \geqslant r^*$ 时，使上式右边小于 ε，从而 $\iint_D f(N) d\sigma$ 收敛。

2° 如果 D 含有所説的无限扇形区域

$$\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta, \quad r \geqslant r_0.$$

这里 (r, φ) 是平面上的极坐标；又

$$|f(N)| \geqslant \frac{c}{r^p},$$

所以

$$\iint_{D_{r_0R}} |f(N)| d\sigma \geqslant \iint_{D_{r_0R}} \frac{c}{r^p} d\sigma \geqslant c\int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_0}^R \frac{r dr}{r^p}$$

$$= c(\beta-\alpha)\int_{r_0}^R \frac{dr}{r^{p-1}}$$

$$
=\begin{cases} \dfrac{c(\beta-\gamma)}{2-p}\left[\dfrac{1}{R^{p-2}}-\dfrac{1}{r_0^{p-2}}\right]\to\infty\ (R\to\infty),\ p<2, \\ c(\beta-r)\ln\dfrac{R}{r_0}\to\infty(R\to\infty),\ p=2. \end{cases}
$$

因之积分$\iint\limits_{D}|f(N)|d\sigma$ 发散，从而$\iint\limits_{D}f(N)d\sigma$ 发散。

二、无界函数的二重积分

定义 設 $f(N)$ 在有界区域 Σ 上有奇点或奇綫（函数在这些点或綫的邻域内无界）。以 Σ 中的光滑曲綫 γ 来隔开奇点或奇綫，γ 所圍的区域記为 Δ，如果在区域 $\Sigma-\Delta$ 上的积分 $\iint\limits_{\Sigma-\Delta}f(N)d\sigma$ 存在，且当 Δ 收縮到奇点或奇綫时，这些积分的极限值存在且与 γ 的取法和收縮的方式无关，則称这极限值是 Σ 上的无界函数的二重积分，記为 $\iint\limits_{\Sigma}f(\sigma)d\sigma$（图4-4-5）。

柯西判别法

1° 設在 Σ 内函数 $f(N)$ 有奇点 B，如果对于和 B 充分邻近的点 N，有

$$
|f(N)|\leqslant\frac{c}{r^p},
$$

其中 r 是 N 与 B 点的距离，且 $p<2$. 那末积分

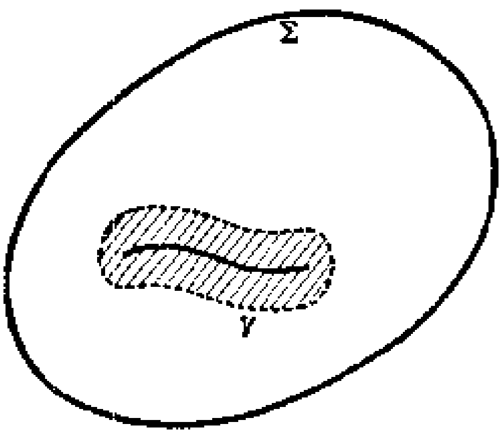


图 4-4-5

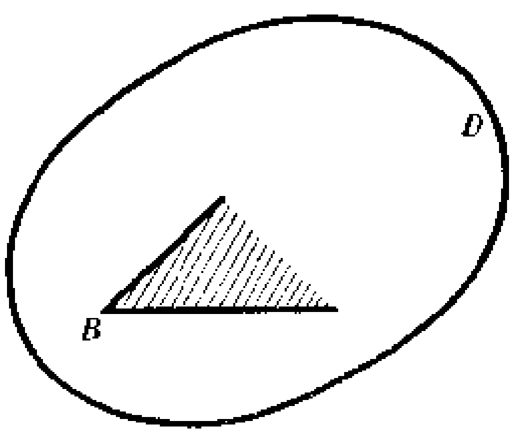


图 4-4-6

$$\iint_{\Sigma} f(N)\,d\sigma$$

收斂。

2° 設在 Σ 內函数 $f(N)$ 有奇点 B，在 B 的邻近

$$|f(N)| \geqslant \frac{c}{r^p},$$

r 的意义同 1°，且 Σ 含有以 B 为頂点的角狀区域，又 $p \geqslant 2$。那末积分

$$\iint_{\Sigma} f(N)\,d\sigma$$

发散（图 4-4-6）。

証明可以和前面一样来进行，这里从略。

［例］ 考慮积分 $\displaystyle\iint_{[0,1;0,1]} \frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{x}}$，$x=0$ 是奇綫。

因为 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}>0$，以 $x=\varepsilon>0$ 的直綫分开奇綫，那末

$$\iint_{[\varepsilon,1;0,1]} \frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{x}} = \int_0^1 y\,dy \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^1 \to 1 \quad (\varepsilon\to 0),$$

所以二重积分收斂。

习 題

1. 計算下列积分的数值：

(1) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^2-1}$；　(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+p)(x^2+q)}$ $(p, q>0)$；

(3) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2} x\,dx$ $(a>0)$。

2. 討論下列积分的收斂性：

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$；　(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x \operatorname{arc\,tg} x}{1+x^3}\,dx$；

(3) $\displaystyle\int_1^\infty \sin\frac{1}{x^2}\,dx$；　(4) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x|\sin x|}$；

(5) $\int_0^{\infty}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}dx$.

3. 証明对于无穷限积分，分部积分公式成立（当公式中各部分有意义时）

$$\int_a^{\infty}f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)\Big|_a^{\infty}-\int_a^{\infty}g(x)f'(x)dx.$$

从此証明$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$收斂而等于$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

4. 討論下列积分的絕对收斂性及条件收斂性：

(1) $\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx$;　　(2) $\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$, $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$;

(3) $\int_a^{\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\sin x\,dx$,　$P_m(x)$, $Q_n(x)$ 各为 m, n 次多项式且当 $x\geqslant a$ 时 $Q_n(x)\neq 0$;

(4) $\int_2^{\infty}\frac{\log\log x}{\log x}\sin x\,dx$.

5. 証明广义积分及其柯西主值之間的关系：

(1) 若$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$收斂，其值为 A，则柯西主值 V. P. $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ 存在，且等于 A，但反之不然；

(2) 若$f(x)\geqslant 0$, V. P.$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$存在，其值为 A，则$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ 收斂，且收斂于 A.

6. 証明：(1) 設 $f(x)$ 为 $[0,+\infty)$ 上的一致連續函数，并且积分$\int_0^{\infty}f(x)dx$收斂，則$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$；如果仅仅积分$\int_0^{\infty}f(x)dx$收斂，以及$f(x)\geqslant 0$，是否仍旧成立$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$?

(2) 若$f(x)$, $g(x)$ 在任何区間$[a, A]$可积，又 $f^2(x)$, $g^2(x)$ 在 $[a,\infty)$ 积分收斂，那么$[f(x)+g(x)]^2$ 和$|f(x)\cdot g(x)|$在$[a,\infty)$上皆可积。

7. 下列积分是否收斂？如果收斂数值如何？

(1) $\int_0^{\frac{1}{2}}\operatorname{ctg}x\,dx$;　　(2) $\int_0^1\log x\,dx$.

8. 討論下列积分的收斂性：

(1) $\int_0^1\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}dx$;　　(2) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$;

(3) $\int_0^1\frac{\log x}{1-x^2}dx$;　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$.

9. 討論下列积分的收斂性：

(1) $\int_0^1 |\log x|^p dx$； (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^m} dx$；

(3) $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\log x\,dx$。

10. 討論积分$\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x} dx$的条件收斂性和絕对收斂性。

11. 討論下列积分的收斂性：

(1) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2 x(x-2)}}$； (2) $\int_0^\infty \frac{\log(1+x)}{x^a} dx$；

(3) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^p+x^q}$； (4) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x^a} dx$；

(5) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p \log^q x}$； (6) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}}$。

12. 設 $f(x)$ 当 $x\to+0$ 时单調趋向于 $+\infty$，若 $\int_0^1 f(x)dx$ 收斂，必須 $\lim_{x\to0} xf(x)=0$ $\left[考慮积分\int_{\frac{x}{2}}^x f(x)dx\right]$。

13. 討論下列积分的絕对收斂和条件收斂性：

(1) $\int_0^\infty \frac{x^p\sin x}{1+x^q} dx \quad (q\geqslant0)$； (2) $\int_0^\infty \frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^\lambda} dx \quad (\lambda>0)$；

(3) $\int_0^\infty \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n} dx$。

14. 設 $f(x)$ 单調下降，$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$，如果导数 $f'(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上連續，那末积分$\int_0^\infty f'(x)\sin^2 x\,dx$ 收斂。

15. 計算下列积分的柯西主值：

(1) $\int_0^3 \frac{dx}{1-x}$； (2) $\int_{-\infty}^\infty \sin x\,dx$.

16. 設 $f(x)$在$(0,\infty)$ 上連續，且 $f(0)=\lim_{x\to+0} f(x)$，$f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty} f(x)$皆存在，又 $0<\eta<A$。証明存在正数 δ 和 ξ，使成立

$$\int_\eta^A \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx = [f(\delta)-f(\xi)]\ln\frac{b}{a},$$

其中 a，b 是正数。从此推得伏汝兰尼 (Froullani) 公式

$$\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}.$$

17. 如在上題中 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在，但 $\int_c^{\infty}\frac{f(x)}{x}\,dx$ $(c>0)$ 存在，則成立公式

$$\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

18. 証明：

(1) $\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx=0$；　　(2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2$；

(3) $x\int_x^{\infty}\sin^2\frac{1}{t}\,dt\to 1$　(当 $x\to\infty$)。

19. 如果对于任何 x，$\lim\limits_{p\to\infty}\int_{x-p}^{x+p}f(t)\,dt=\varphi(x)$ 成立，那末 $\varphi(x)$ 有以下性质

$$\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2}=\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

20. 設 $\varphi(x)$ 是連續函数，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=1$，記 $\psi(x)=\int_x^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x^{1+\alpha}}\,dx$ $(\alpha>0)$，那末当 $x\to\infty$ 时，$\psi(x)$ 等价于 $\frac{c}{x^{\alpha}}$，并确定 c 的数値。

21. 計算下列广义重积分之値：

(1) $\iint\limits_{\substack{xy\geqslant 1\\ x\geqslant 1}}\frac{dx\,dy}{x^p y^q}$；　　(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$。

22. 討論下面广义重积分的收斂性：

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx\,dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$；

(2) $\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p}\,dx\,dy$，　$0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M$；

(3) $\int_0^a\int_0^a\frac{\varphi(x,y)}{|x-y|^p}\,dx\,dy$，　$0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M$；

(4) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p}\,dx\,dy$，$0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M$。

23. 証明：設 $\mathscr{D}$ 由在第一象限的抛物綫 $y=x^2$，圓周 $x^2+y^2=1$ 及 x 軸所圍成的区域，則 $\iint\limits_{\mathscr{D}}\frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$ 存在。

24. 求均匀正圓錐体关于在它的頂点处的质量为 m 的质点的引力。

第五章　含参变量的广义积分

§1　含参变量广义积分的一致收斂性

一、一致收斂积分的定义

在概率論和数理方程中常出現由含参变量的广义积分所表示的函数。和含参变量的常义积分的情形一样，我們往往需要討論这些函数的性质，如連續性、可微性等等。但是这些性质的建立比含参变量的常义积分情形要复杂些。我們首先来定义积分的一致收斂性，它和函数項級数的一致收斂性的意义是相当的。对于具有一致收斂性的积分，以后会看到，可以把某一个具有奇性部分的积分略而不計，而把問題归結为对含参变量的常义积分的討論。

定义1　設 $f(x, y)$ 在 $a\leqslant x<\infty$, $c\leqslant y\leqslant d$ 上确定，又对每个固定的 y 值，无穷限积分 $\int_a^{\infty} f(x, y)\,dx$ 存在。因此，对于任意的正数 ε，可以确定 $A_0(\varepsilon, y)\geqslant a$，使当 A', $A\geqslant A_0(\varepsilon, y)$ 时，成立

$$\left|\int_A^{A'} f(x, y)\,dx\right|<\varepsilon \quad 或 \quad \left|\int_A^{\infty} f(x, y)\,dx\right|<\infty.$$

如果对于任意的正数 ε，存在一个与 $[c, d]$ 上的 y 无关的 $A_0(\varepsilon)$，使上述不等式当 A', $A\geqslant A_0(\varepsilon)$ 时成立，就称 $\int_a^{\infty} f(x, y)\,dx$ 关于 y 在 $[c, d]$ 上为一致收斂。

这里的区間 $[c, d]$ 可以换为其他区間如 $[c, d)$, (c, d), $[c, \infty)$ 等等。对于其他类型的无穷限积分的一致收斂性可以同样定义。对于无界函数的积分，也有类似的定义。

定义2　設 $\int_a^b f(x, y)\,dx$ 对于 $[c, d]$ 上的每一 y 值，以 $x=b$ 为

奇点的积分存在，如果对于任何 $\varepsilon>0$，存在与 $[c, d]$ 上的 y 无关的 $\delta_0(\varepsilon)$，使当 $0<\eta, \eta'<\delta_0(\varepsilon)$ 时，

$$\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x, y)\,dx\right|<\varepsilon \quad 或 \quad \left|\int_{b-\eta}^{b} f(x, y)\,dx\right|<\varepsilon$$

成立，就称 $\int_a^b f(x, y)\,dx$ 关于 y 在$[c, d]$上一致收斂。

二、一致收斂积分的判别法

我們只对无穷限的积分 $\int_a^{\infty} f(x, y)\,dx$ 来讲这些判别法，对于其他类型的含参变量广义积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x, y)\,dx$ 和无界函数的积分可以类似地叙述，我們不一一說明。

以下常假定积分 $\int_a^{\infty} f(x, y)\,dx$ 已經收斂。

1° 魏尔斯脫拉斯判别法：設有函数 $F(x)$，使

$$|f(x, y)|\leqslant F(x), \quad a\leqslant x<\infty, \quad c\leqslant y\leqslant d.$$

如果积分

$$\int_a^{\infty} F(x)\,dx$$

收斂，那末 $\int_a^{\infty} f(x, y)\,dx$ 关于 y 在$[c, d]$上一致收斂。

【証明】 由一致收斂性定义 1 和不等式

$$\left|\int_A^{A'} f(x, y)\,dx\right|\leqslant\left|\int_A^{A'} |f(x, y)|\,dx\right|\leqslant\left|\int_A^{A'} F(x)\,dx\right|$$

就可推出結論。因为这时对 $\varepsilon>0$，有 A_0，使当 $A', A\geqslant A_0$ 时，

$$\left|\int_A^{A'} F(x)\,dx\right|<\varepsilon$$

成立。

魏尔斯脫拉斯判别法还有一个簡单的拓广，参見习題 1。

对于含参变量广义积分也有阿貝尔判别法和狄利克来判别法。

2° 阿貝尔判别法：設 $\int_a^{\infty} f(x, y)\,dx$ 关于 y 在 $[c, d]$ 上一致

收斂，$g(x, y)$对x单調且关于y为一致有界，即存在正数L，对所討論范圍上的一切x，y成立：$|g(x, y)|<L$。那末积分

$$\int_a^{\infty} f(x, y) g(x, y) dx$$

关于y在$[c, d]$上一致收斂。

【証明】 根据$\int_a^{\infty} f(x, y) dx$的一致收斂性，对任意正数$\varepsilon>0$，都存在$A_0 \geqslant a$，使当$A'$，$A \geqslant A_0$时，成立

$$\left|\int_A^{A'} f(x, y) dx\right|<\varepsilon.$$

因此，当A'，$A \geqslant A_0$时，按第二中值定理中的公式

$$\begin{aligned} & \int_A^{A'} f(x, y) g(x, y) dx \\ & \quad=g(A, y) \int_A^{\xi(y)} f(x, y) dx+g(A', y) \int_{\xi(y)}^{A'} f(x, y) dx, \end{aligned}$$

有

$$\left|\int_A^{A'} f(x, y) g(x, y) dx\right| \leqslant 2 L \varepsilon.$$

所以$\int_a^{\infty} f(x, y) g(x, y) dx$关于$y$在$[c, d]$上一致收斂。

3° 狄利克来判别法：設积分$\int_a^A f(x, y) dx$对于$A \geqslant a$，$y \in[c, d]$一致有界，即存在正数K，使对上述的A，y成立

$$\left|\int_a^A f(x, y) dx\right| \leqslant K;$$

又$g(x, y)$关于x为单調，并且当$x \rightarrow+\infty$时，$g(x, y)$关于$[c, d]$上的y一致趋于零，即对任意給定的正数ε，有A_0，使当$x \geqslant A_0$时，对一切$y \in[c, d]$成立

$$|g(x, y)|<\varepsilon.$$

那末积分$\int_a^{\infty} f(x, y) g(x, y) dx$关于$y$在$[c, d]$上一致收斂。

【証明】 由所設的条件可推出对任何A'，$A \geqslant a$，有

$$\left|\int_A^{A'} f(x, y) dx\right| \leqslant\left|\int_a^A f(x, y) dx\right|+\left|\int_a^{A'} f(x, y) dx\right| \leqslant 2 K.$$

从此及$|g(x,y)|<\varepsilon$推知当$A, A'\geqslant A_0$时，

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)g(x,y)dx\right| \leqslant |g(A,y)|\left|\int_A^{\xi(y)} f(x,y)dx\right|$$

$$+|g(A',y)|\left|\int_{\xi(y)}^{A'} f(x,y)dx\right| < \varepsilon\cdot 2K+\varepsilon\cdot 2K=4K\varepsilon.$$

所以$\int_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx$关于$y$在$[c,d]$上一致收斂.

(注) 在后面两个判别法中，如果$f(x,y)$或$g(x,y)$中实质上不含y，有关的条件中的一致性自然就满足了。

[例 1] 討論$\int_0^\infty ye^{-yx}dx\ (y\geqslant 0)$的一致收斂性。

显然，积分对$[0,\infty)$上的一切y是收斂的。

当$y>0$，$\int_A^\infty ye^{-yx}dx=\int_{Ay}^\infty e^{-t}dt=e^{-Ay}$.

要使$e^{-Ay}<\varepsilon$，必須

$$A>\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{y},$$

因此对于ε和y，可取

$$A_0(y,\varepsilon)=\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{y}.$$

对于$[c,\infty)$ $(c>0)$上的y，可以取

$$A_0(\varepsilon)\geqslant\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{c}.$$

因此得到$\int_0^\infty ye^{-yx}dx$在$[c,\infty)$上的一致收斂性。但由于当$y\to 0$时，$A_0(y,\varepsilon)\to\infty$。所以积分在$(0,\infty)$上不一致收斂，在$[0,\infty)$上自然也不一致收斂了。

[例 2] $I(p)=\int_0^1 x^{p-1}dx$ 在 $p\geqslant p_0>0$ 的范圍上一致收斂，在$p>0$的范圍上不一致收斂。

因为当 $p\geqslant p_0>0$ 时，有 $0\leqslant x^{p-1}\leqslant x^{p_0-1}$，而 $\int_0^1 x^{p_0-1}dx$ 收斂。所以由魏尔斯脱拉斯判别法知道积分在 $p\geqslant p_0$ 的范圍上一致收斂。可是当 $p\to 0$ 时，

$$\int_0^\eta x^{p-1}dx=\frac{\eta^p}{p}\to\infty.$$

所以 $\int_0^1 x^{p-1}dx$ 在 $p>0$ 的范圍上不一致收斂。

[例 3]　$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx$ 在 $\alpha\geqslant 0$ 范圍上关于 α 一致收斂。

因为 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ 收斂，不含参数 α，所以关于 α 一致收斂。$e^{-\alpha x}$ 关于 x 是单調函数，关于 α 是 x 的一致有界函数

$$0\leqslant e^{-\alpha x}\leqslant 1\quad(\alpha\geqslant 0,\ x\geqslant 0),$$

由阿貝尔判别法知道 $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx$ 在 $\alpha\geqslant 0$ 上关于 α 一致收斂。

在很多情形要用到以下的結論。

定理　設 $f(x, y)$ 在 $[a, \infty; c, d]$ 上連續，对 $[c, d)$ 上的每一 y，$\int_a^\infty f(x, y)dx$ 收斂，但积分在 $y=d$ 点发散。那末这积分在 $[c, d)$ 上一定不一致收斂。

【証明】　用反証法，假定积分在 $[c, d)$ 上一致收斂，那末对于 $\varepsilon>0$，存在 A_0，当 $A, A'\geqslant A_0$ 时，$\left|\int_A^{A'} f(x, y)dx\right|<\varepsilon$ 对 $[c, d)$ 上的一切 y 成立。

由假定，$f(x, y)$ 在 $[A, A'; c, d]$ 上連續，所以 $\int_A^{A'} f(x, y)\,dx$ 是 y 的連續函数。在所得到的不等式中令 $y\to d$，得到当 $A', A\geqslant A_0$ 时成立 $\left|\int_A^{A'} f(x, d)dx\right|\leqslant\varepsilon$，而 ε 是任意給定的。因此 $\int_a^\infty f(x, y)dx$ 在 $y=d$ 点也收斂，而有矛盾，所以积分 $\int_a^\infty f(x, y)dx$ 在 $[c, d)$ 上不一致收斂。

例題 2 就可以根据这个定理得到結論，利用这个結論可以避免去証某些积分在 $[c, d)$ 上的一致收斂性。

§2 一致收斂积分的性质

这一节我們也只对无穷限积分来討論，对于无界函数的积分有类似的結論，就不一一列述。同时注意到，这些定理的条件和結論是和函数項級数中所討論的完全一样。

一、連續性定理

設 $f(x, y)$ 在 $[a, \infty; c, d]$ 上連續，$\int_a^{\infty} f(x, y)dx$ 关于 y 在 $[c, d]$ 上一致收斂，那末 $I(y)=\int_a^{\infty} f(x, y)dx$ 是 y 在 $[c, d]$ 上的連續函数。

【証明】 因为 $\int_a^{\infty} f(x, y)dx$ 在 $[c, d]$ 上一致收斂，所以对于任意給定的 $\varepsilon>0$，常存在 $A_0(\varepsilon)$，使当 $A\geqslant A_0$ 时，

$$\left|\int_A^{\infty} f(x, y)dx\right|<\varepsilon$$

对 $[c, d]$ 上一切 y 成立，因此当 $y+\Delta y$ 在 $[c, d]$ 上时，也成立

$$\left|\int_A^{\infty} f(x, y+\Delta y)dx\right|<\varepsilon.$$

又 $f(x,y)$ 在 $[a, A; c, d]$ 上連續，所以 $\int_a^{A} f(x, y)dx$ 是 y 在 $[c, d]$ 上的連續函数，对 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $|\Delta y|<\delta$ 时，

$$\left|\int_a^{A} f(x, y+\Delta y)dx-\int_a^{A} f(x, y)dx\right|<\varepsilon.$$

因此，当 $|\Delta y|<\delta$ 时，有

$$|I(y+\Delta y)-I(y)|\leqslant\left|\int_a^{A} f(x, y+\Delta y)dx-\int_a^{A} f(x, y)dx\right|$$

$$+\left|\int_A^{\infty} f(x, y+\Delta y)dx\right|+\left|\int_A^{\infty} f(x, y)dx\right|<3\varepsilon.$$

即 $I(y)$ 是 $[c, d]$ 上的連續函数。

这个連續性定理是下面較一般的极限运算通过积分号定理的特殊情形。

极限交換定理　設 y 在某一个 y_0 的邻域内固定时，积分

$$\int_a^\infty f(x, y)\,dx$$

存在；当 $y\to y_0$ 时，$f(x, y)$ 在任何 x 的区間 $[a, A]$ 上一致趋于极限函数 $\varphi(x)$，而 $\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$ 收斂。如果 $I(y)=\int_a^\infty f(x, y)\,dx$ 关于 y 在上述 y_0 的邻域内一致收斂。那末成立公式：

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^\infty f(x, y)\,dx=\int_a^\infty \lim_{y\to y_0} f(x, y)\,dx=\int_a^\infty \varphi(x)\,dx.$$

証明和連續性定理相类似。实际上，$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$ 存在的假定还可以从定理的条件推导出来，这里从略。

二、狄尼定理

对于含参变量的积分，也有由函数的連續性导出积分一致收斂的定理。

設 $f(x, y)$ 在 $a\leqslant x<\infty$，$c\leqslant y\leqslant d$ 上是連續函数，且保持同一符号，又 $I(y)=\int_a^\infty f(x, y)\,dx$ 是 $[c, d]$ 上的連續函数。那末 $\int_a^\infty f(x, y)\,dx$ 关于 y 在 $[c, d]$ 上一致收斂。

証明用反証法进行。

設 $f(x, y)\geqslant 0$。如果 $\int_a^\infty f(x, y)\,dx$ 在 $[c, d]$ 上不一致收斂，那末对某一 $\varepsilon>0$，不存在 $A_0(\varepsilon)$，使当 $A\geqslant A_0$ 时，

$$0\leqslant\int_A^\infty f(x, y)\,dx<\varepsilon \text{ 对}[c, d]\text{中的一切 } y \text{ 成立。}$$

由于 $\int_A^\infty f(x, y)\,dx\leqslant\int_{A_0}^\infty f(x, y)\,dx$，所以也可以說为不存在 A_0，使

$$0\leqslant\int_{A_0}^\infty f(x, y)\,dx<\varepsilon$$

对$[c, d]$中的一切y成立. 因此，对于任意大于a的正整数n，不等式$0\le\int_n^\infty f(x, y)dx<\varepsilon$不能对$[c, d]$中的一切$y$成立，所以在$[c, d]$中有$y_n$，使$\int_n^\infty f(x, y_n)dx\ge\varepsilon$成立，这样的点列$\{y_n\}$有子点列$\{y_{n_k}\}$收斂于$[c, d]$中的一点$y_0$.

因为$\int_m^\infty f(x, y)dx=\int_a^\infty f(x, y)dx-\int_a^m f(x, y)dx$的右边两項都是連續函数，所以左边也是如此. 对于任何$m(>a)$，总有$n_k\ge m$，

$$\int_m^\infty f(x, y_{n_k})dx\ge\int_{n_k}^\infty f(x, y_{n_k})dx\ge\varepsilon,$$

令$y_{n_k}\to y_0$，得到$\int_m^\infty f(x, y_0)dx\ge\varepsilon$对任何$m(>a)$成立，这和

$$\int_a^\infty f(x, y_0)dx$$

是收斂的假定相矛盾。这样証明了定理。

三、积分順序交換定理

✓**积分順序交換定理(I)** 設$f(x, y)$在$[a, \infty; c, d]$上連續，$\int_a^\infty f(x, y)dx$关于$y\in[c, d]$一致收斂，那末$I(y)=\int_a^\infty f(x, y)dx$在$[c, d]$上的积分可以在积分号下进行：

$$\int_c^d dy\int_a^\infty f(x, y)dx=\int_a^\infty dx\int_c^d f(x, y)dy.$$

我們利用含参变量积分与函数項級数的联系来証明定理。为此我們先說明一下它們之間的联系。

設积分$\int_a^\infty f(x, y)dx$在$[c, d]$上一致收斂，并設$\{A_n\}$为一单調上升数列，$A_0=a$，$A_n\to\infty$ $(n\to\infty)$. 置

$$u_n(y)=\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x, y)dx,$$

那末級数

$$\sum_{n=1}^\infty u_n(y)$$

在$[c, d]$上一致收斂。因为对于任意給定的$\varepsilon>0$，总存在A_0，当

$A', A \geqslant A_0$ 时，对一切 $y \in [c, d]$ 成立

$$\left|\int_{A}^{A'} f(x, y)\, dx\right| < \varepsilon.$$

現在 $A_n \to \infty$，設当 $n > N$ 时成立

$$A_n > A_0.$$

因此，当 $m > n > N$ 时，对一切 $y \in [c, d]$ 有

$$|u_n(y) + \cdots + u_m(y)| < \varepsilon,$$

这説明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)$ 在 $[c, d]$ 上一致收斂。

利用以上事实来証明积分順序交換定理。

由假定，按以上所述可推知級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)$ 在 $[c, d]$ 上一致收斂，并且 $\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x, y)\, dx = u_n(y)$ 在 $[c, d]$ 上都連續。所以

$$\begin{aligned}\int_c^d I(y)\, dy &= \int_c^d \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)\, dy = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^d u_n(y)\, dy \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^d dy \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x, y)\, dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} dx \int_c^d f(x, y)\, dy \\ &= \int_a^{\infty} dx \int_c^d f(x, y)\, dy.\end{aligned}$$

这里我們用到常义积分的順序交換定理。

如果 y 的变动范圍也是无穷区間，就有以下的关于积分順序交換的定理。

积分順序交換定理(II) 設 $f(x, y)$ 在 $[a, \infty; c, \infty)$ 上連續，两个积分 $\int_a^{\infty} f(x, y)\, dx$，$\int_c^{\infty} f(x, y)\, dy$ 依次关于 y 在任何 $[c, C]$ 上，关于 x 在任何 $[a, A]$ 上为一致收斂的，并且

$$\int_a^{\infty} dx \int_c^{\infty} |f(x, y)|\, dy, \quad \int_c^{\infty} dy \int_a^{\infty} |f(x, y)|\, dx$$

有一个存在。那末

$$\int_a^\infty dx\int_c^\infty f(x, y)dy = \int_c^\infty dy\int_a^\infty f(x, y)dx.$$

【証明】 設 $\int_a^\infty dx\int_c^\infty |f(x, y)|dy$ 存在，从而

$$\int_a^\infty dx\int_c^\infty f(x, y)dy$$

也存在，并且对于任何給定的 $\varepsilon>0$，存在 $A>a$，使

$$\int_A^\infty dx\int_c^\infty |f(x, y)|dy<\varepsilon$$

成立。这样，对于任何 $C>c$，有

$$\int_A^\infty dx\int_C^\infty |f(x, y)|dy<\varepsilon.$$

由于 $\int_c^\infty f(x,y)dy$ 关于 x 在 $[a,A]$ 上一致收斂，所以对于 $\frac{\varepsilon}{A-a}$，可取 C 充分大，使

$$\left|\int_C^\infty f(x, y)dy\right|<\frac{\varepsilon}{A-a}$$

对于 $[a, A]$ 中的一切 x 成立。因此，

$$\begin{aligned}\left|\int_a^\infty dx\int_C^\infty f(x, y)dy\right| &\leqslant \left|\int_a^A dx\int_C^\infty f(x, y)dy\right| \\ &\quad + \left|\int_A^\infty dx\int_C^\infty f(x, y)dy\right| \\ &\leqslant \int_a^A \left|\int_C^\infty f(x, y)dy\right|dx \\ &\quad + \int_A^\infty dx\int_C^\infty |f(x, y)|dy \\ &\leqslant \int_a^A \frac{\varepsilon}{A-a}dx+\varepsilon=2\varepsilon.\end{aligned}$$

另由 $\int_a^\infty f(x, y)dx$ 关于 y 在 $[c, C]$ 上一致收斂的假定，根据前一定理，它在 $[c, C]$ 上的积分順序可交換，合并以上几个不等式，推知当 C 充分大时，下式成立：

$$\left|\int_a^\infty dx\int_c^\infty f(x,y)dy-\int_c^C dy\int_a^\infty f(x,y)dx\right|$$

$$=\left|\int_a^\infty dx\int_c^\infty f(x,y)dy-\int_a^\infty dx\int_c^C f(x,y)dy\right|$$

$$=\left|\int_a^\infty dx\int_C^\infty f(x,y)dy\right|<2\varepsilon.$$

因此 $\int_c^\infty dy\int_a^\infty f(x,y)dx=\int_a^\infty dx\int_c^\infty f(x,y)dy$ 証得。

四、积分号下求微商的定理

設 $f(x,y)$，$f_y(x,y)$ 在 $[a,\infty;c,d]$ 上連續，$\int_a^\infty f(x,y)dx$ 存在，$\int_a^\infty f_y(x,y)dx$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收斂。那末

$$I(y)=\int_a^\infty f(x,y)dx$$

的微商存在，且

$$\frac{d}{dy}\int_a^\infty f(x,y)dx=\int_a^\infty\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)dx.$$

【証明】 記 $\varphi(y)=\int_a^\infty f_y(x,y)dx$，由連續性定理，知 $\varphi(y)$ 是 $[c,d]$ 上的連續函数，沿区間 $[c,y]$ $(c<y<d)$ 积分 $\varphi(y)$，得到

$$\int_c^y\varphi(y)dy=\int_c^y dy\int_a^\infty f_y(x,y)dx=\int_a^\infty dx\int_c^y f_y(x,y)dy$$

$$=\int_a^\infty f(x,y)dx-\int_a^\infty f(x,c)dx=I(y)-I(c).$$

左边有导数，因此 $I(y)$ 也有导数，导微两边，由于 $\varphi(y)$ 連續，得到

$$I'(y)=\varphi(y).$$

这就是所要証明的。

(注) 在以上的几个定理中，一致收斂性是充分条件。可以看出，有了这个假定，就在"ε"的精确度范圍內，无穷限积分可以当作有界区間上的积分一样看待，从而含参变量常义积分的性质就成立了。

§3 例 题

这一节中应用前节所讲的几个定理来討論一些积分，通过对这几个例題的分析，可使我們了解定理的作用，有的积分本身是以后要用到的。

[例 1] 求狄利克来积分

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

引入一个因子 $e^{-\alpha x}$ 到被积函数，而考慮积分

$$I(\alpha)=\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx\quad(\alpha\geqslant 0).$$

这是含参变量 α 的积分。有了因子 $e^{-\alpha x}$，常能保持积分有一致收斂性。这时 $I=I(0)$.

記
$$f(x,\alpha)=\begin{cases}1, & x=0,\\ e^{-\alpha x}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0.\end{cases}$$

那末 $f_\alpha(x,\alpha)=-e^{-\alpha x}\sin x$，显然 $f(x,\alpha)$，$f_\alpha(x,\alpha)$ 是 $0\leqslant x<\infty$，$0\leqslant\alpha<\infty$ 上的連續函数，又

$$\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

由 §1 例 3 知道关于 $\alpha\geqslant 0$ 为一致收斂。所以 $I(\alpha)$ 是 $[0,\infty)$ 上的連續函数，从而

$$I=I(0)=\lim_{\alpha\to 0}I(\alpha).$$

下面来求 $I(\alpha)$. 为此考慮 $I'(\alpha)$ $(\alpha>0)$. 因为

$$\int_0^{\infty}f_\alpha(x,\alpha)\,dx=-\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\sin x\,dx,$$

这个积分关于 α 在任何区間 $[\varepsilon,\infty)$ $(\varepsilon>0)$ 上一致收斂，这是因为 $|e^{-\alpha x}\sin x|\leqslant e^{-\varepsilon x}$，而 $\int_0^{\infty}e^{-\varepsilon x}dx$ 收斂。由积分号下求微商的定理，

得到在(ε, ∞)内成立

$$I'(\alpha)=\int_0^\infty -e^{-\alpha x}\sin x\,dx=\frac{e^{-\alpha x}(\alpha\sin x+\cos x)}{1+\alpha^2}\Bigg|_{x=0}^{x=\infty}$$

$$=-\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

但对任何$\alpha_0>0$，常可取到$[\varepsilon, \infty)$含有α_0。因此$I'(\alpha_0)$存在，也就是

$$I'(\alpha)=-\frac{1}{1+\alpha^2}$$

对$\alpha>0$成立。所以当$\alpha>0$时

$$I(\alpha)=-\operatorname{arctg}\alpha+C.$$

另一方面，

$$|I(\alpha)|=\left|\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx\right|\leqslant\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha},$$

当$\alpha\to\infty$时，$I(\alpha)\to 0$。因此得到

$$0=-\frac{\pi}{2}+C,$$

即

$$C=\frac{\pi}{2}.$$

所以　$$I=I(0)=\lim_{\alpha\to 0}I(\alpha)=\lim_{\alpha\to 0}\left(-\operatorname{arctg}\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

推論　作变换$\beta x=z$，可以得到

$$\int_0^\infty\frac{\sin\beta x}{x}\,dx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \beta>0,\\ 0, & \beta=0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & \beta<0.\end{cases}$$

[例 2]　計算欧拉-泊松积分

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx.$$

这个积分也可以用重积分来計算，现在作为前节定理的应用

来进行計算。

积分 I 的存在性由 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2e^{-x^2}=0$ 推知。对于 $u\geqslant\delta>0$，作变量代换 $x=ut$，u 看为参数。这时 $I=\int_0^\infty ue^{-u^2t^2}dt$。以 e^{-u^2} 乘这等式的两边，再对 u 从 δ 到 ∞ 积分：

$$I\int_\delta^\infty e^{-u^2}du=\int_\delta^\infty e^{-u^2}du\int_0^\infty ue^{-u^2t^2}dt=\int_\delta^\infty du\int_0^\infty ue^{-u^2(1+t^2)}dt.$$

我們說明，右边积分的順序可以变換。

因为 $0<ue^{-u^2(1+t^2)}\leqslant ue^{-u^2}$，而 $\int_\delta^\infty ue^{-u^2}du$ 收斂，由魏尔斯脫拉斯判别法，知道 $\int_\delta^\infty ue^{-u^2(1+t^2)}du$ 关于 t 在 $[0, \infty)$ 上一致收斂；又

$$\int_0^\infty ue^{-u^2(1+t^2)}dt=Ie^{-u^2}$$

关于 u 在 $[\delta, \infty)$ 上連續，并且 $ue^{-u^2(1+t^2)}\geqslant0$，由狄尼定理知道积分

$$\int_0^\infty ue^{-u^2(1+t^2)}dt$$

关于 u 在 $[\delta, U]$ 上一致收斂；此外 $ue^{-u^2(1+t^2)}$ 是 $\delta\leqslant u<\infty, 0\leqslant t\leqslant\delta$ 上的連續函数，同时

$$\int_\delta^\infty du\int_0^\infty ue^{-u^2(1+t^2)}dt$$

存在，应用前节的积分順序変換定理 II，得到

$$I\int_\delta^\infty e^{-u^2}du=\int_\delta^\infty du\int_0^\infty ue^{-u^2(1+t^2)}dt=\int_0^\infty dt\int_\delta^\infty ue^{-u^2(1+t^2)}du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{e^{-\delta^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt. \tag{*}$$

但由于 $\dfrac{e^{-\delta^2(1+t^2)}}{1+t^2}\leqslant\dfrac{1}{1+t^2}$，$\int_0^\infty\dfrac{dt}{1+t^2}$ 收斂，

所以 $\int_0^\infty\dfrac{e^{-\delta^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$ 关于 δ 在 $[0, \infty)$ 上一致收斂；又因为这积分的被积函数是連續的，因此含参变量 δ 的积分 $\int_0^\infty\dfrac{e^{-\delta^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$ 是 δ 在 $[0, \infty)$ 上的連續函数。在等式 $(*)$ 的两边令 $\delta\to0$，得到

$$I^2=I\int_0^{\infty}e^{-u^2}du=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}.$$

这样得到
$$I=\int_0^{\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(注) 在推导过程中，u 的变化区間取为 $[\delta,\infty)$ 而不直接取 $[0,\infty]$，是因为狄尼定理不适用。实际上，这时积分

$$\int_0^{\infty}ue^{-u^2(1+t^2)}dt$$

在 $u\neq 0$ 时为 Ie^{-u^2}，在 $u=0$ 时等于零，而在 $0\leqslant u<\infty$ 上不連續。

如果不限于用前节的积分顺序交换定理 II，是可以直接証明积分 $\int_0^{\infty}du\int_0^{\infty}u^2e^{-u^2(1+t^2)}dt$ 的顺序可交换的。为此，只須說明当 $T\to\infty$ 时下式趋向于零卽可：

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{\infty}du\int_0^{\infty}ue^{-u^2(1+t^2)}dt-\int_0^{T}dt\int_0^{\infty}ue^{-u^2(1+t^2)}du\right|\\
&=\left|\int_0^{\infty}du\int_0^{\infty}ue^{-u^2(1+t^2)}dt-\int_0^{\infty}du\int_0^{T}ue^{-u^2(1+t^2)}dt\right|\\
&=\int_0^{\infty}du\int_T^{\infty}ue^{-u^2(1+t^2)}dt=\int_0^{\infty}e^{-u^2}du\int_T^{\infty}ue^{-u^2t^2}dt\\
&=\int_0^{\infty}e^{-u^2}du\int_{uT}^{\infty}e^{-z^2}dz=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{T}}}e^{-u^2}du\int_{uT}^{\infty}e^{-z^2}dz\\
&\quad+\int_{\frac{1}{\sqrt{T}}}^{\infty}e^{-u^2}du\int_{uT}^{\infty}e^{-z^2}dz\leqslant\int_0^{\frac{1}{\sqrt{T}}}e^{-u^2}du\int_0^{\infty}e^{-z^2}dz\\
&\quad+\int_{\frac{1}{\sqrt{T}}}^{\infty}e^{-u^2}du\int_{\sqrt{T}}^{\infty}e^{-z^2}dz\leqslant I\int_0^{\frac{1}{\sqrt{T}}}e^{-u^2}du+I\int_{\sqrt{T}}^{\infty}e^{-z^2}dz\\
&\leqslant I\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{T}}}dt+\int_{\sqrt{T}}^{\infty}e^{-z^2}dz\right)=I\left(\frac{1}{\sqrt{T}}+\int_{\sqrt{T}}^{\infty}e^{-z^2}dz\right).
\end{aligned}$$

因为 $\int_0^{\infty}e^{-z^2}dz$ 收斂，所以当 T 趋于∞时，上式右边趋于零。从而积分顺序是可交换的。

[例 3] 計算 $I(y)=\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos 2yx\,dx\ (a>0)$ 之值。

考虑积分

$$\int_0^\infty f_y(x,y)\,dx=-2\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\sin 2yx\,dx.$$

由于 $|xe^{-a^2x^2}\sin 2yx|\leqslant xe^{-a^2x^2}$，又 $\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}dx$ 收斂，所以

$$\int_0^\infty f_y(x,y)\,dx$$

一致收斂。从而

$$I'(y)=-2\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\sin 2yx\,dx.$$

对右边分部积分，得到

$$I'(y)=\frac{1}{a^2}e^{-a^2x^2}\sin 2yx\Big|_{x=0}^{x=\infty}-\frac{2y}{a^2}\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos 2yx\,dx$$
$$=-\frac{2y}{a^2}I(y).$$

积分这个方程，得到

$$I(y)=Ce^{-\frac{y^2}{a^2}}.$$

在原来的积分式中置 $y=0$，

$$C=I(0)=\int_0^\infty e^{-a^2x^2}dx=\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2a},$$

所以
$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos 2yx\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{y^2}{a^2}}.$$

§4 欧拉积分[Beta 函数 $B(p,q)$ 与 Gamma 函数 $\Gamma(s)$]

一、定义

在数理方程、概率論等方面經常遇到以下的含参变量的积分

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,\quad \Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx,$$

它們依次称为第一类和第二类欧拉积分。这些积分在定积分計算

上有許多应用，不少积分可以用它們来表示，从而可通过查表計算数值。

这两种积分的收斂范圍，在前一章§3例5、例6中已討論过，即 $B(p, q)$ 当 $p>0$，$q>0$ 时收斂；$\Gamma(s)$ 当 $s>0$ 时收斂，其他情形皆发散。

二、連續性

1° 对任何 $p>0$，$q>0$，常有 p_0，q_0，使 $p\geqslant p_0>0$，$q\geqslant q_0>0$；因为 $x^{p-1}(1-x)^{q-1}\leqslant x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}$，而 $\int_0^1 x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}dx$ 收斂，所以 $B(p, q)$ 在 $[p_0, \infty; q_0, \infty)$ 上一致收斂，从而 $B(p, q)$ 在这范圍上連續。由于函数在一范圍上連續是指在这范圍上的每一点連續，这样就得到 $B(p, q)$ 在 $p>0$，$q>0$ 时連續。

2° $\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$ 在任何 $[s_0, S_0]$ $(0<s_0<S_0)$ 上一致收斂。事实上，$\Gamma(s)=\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx+\int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}dx=I_1(s)+I_2(s)$.

对 I_1，$x^{s-1}e^{-x}\leqslant x^{s_0-1}e^{-x}$，而 $\int_0^1 x^{s_0-1}e^{-x}dx$ 收斂，所以 I_1 关于 s 在 $[s_0, S_0]$ 上一致收斂，从而 $I_1(s)$ 是这范圍上的連續函数。

对 I_2，$x^{s-1}e^{-x}\leqslant x^{S_0-1}e^{-x}$，而 $\int_1^\infty x^{S_0-1}e^{-x}dx$ 收斂，所以 I_2 关于 s 在 $[s_0, S_0]$ 上一致收斂，从而 $I_2(s)$ 是这范圍上的連續函数。因此 $\Gamma(s)$ 在 $[s_0, S_0]$ 上連續，由于連續的局部性（在一点連續只与函数在这一点的邻近情况有关），所以 $\Gamma(s)$ 在 $s>0$ 的范圍上連續。

因此 $B(p, q)$，$\Gamma(s)$ 在它們的定义范圍上是連續函数。

三、$\Gamma(s)$ 的簡单性质

1° 遞推公式 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ $(s>0)$ 成立。

$$\Gamma(s+1)=\int_0^\infty x^s e^{-x}dx=-x^s e^{-x}\Big|_0^\infty+s\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx=s\Gamma(s).$$

設 $n<s\leqslant n+1$，即 $0<s-n\leqslant 1$，应用这个公式 n 次，得到

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)=s(s-1)\Gamma(s-1)=\cdots$$
$$=s(s-1)\cdots(s-n)\Gamma(s-n).$$

从这个公式知道，如果 $\Gamma(s)$ 在 $0<s\leqslant 1$ 中之值已知，那末在其他范圍的数值由乘法可以計算。

設 $s=n+1$ 为正整数，那末

$$\Gamma(n+1)=n(n-1)\cdots 2\cdot 1\cdot\Gamma(1)=n!\int_0^\infty e^{-x}dx=n!,$$

即 $n!=\Gamma(n+1)=\int_0^\infty x^n e^{-x}dx$。因此 $\Gamma(s+1)$ 可以看成 $n!$ 在实数上的推广。

2° 由于 $\Gamma(s)=\dfrac{\Gamma(s+1)}{s}$ 及 $\Gamma(1)=1$，所以当 $s\to 0$ 时，

$$\Gamma(s)\to\infty.$$

3° 在 $\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$ 中作变换 $x=\alpha u$ $(\alpha>0)$ 得到

$$\Gamma(s)=\alpha^s\int_0^\infty u^{s-1}e^{-\alpha u}du.$$

又作变换 $x=u^2$，得到

$$\Gamma(s)=2\int_0^\infty u^{2s-1}e^{-u^2}du.$$

因此 $\Gamma(s)$ 有种种表示式，在后一表示式中，令 $s=\dfrac{1}{2}$，得到

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^\infty e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}\quad\text{(注意前节例 2)}.$$

四、$B(p,q)$ 的簡单性质

1° 对称性：对

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

作变换 $x=1-t$, $1-x=t$, $dx=-dt$，得到

$$B(p,q)=-\int_1^0(1-t)^{p-1}t^{q-1}dt$$
$$=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt=B(q,p).$$

2° $B(p, q)$的其他表示式:

令$x=\cos^2\varphi$，就有$1-x=\sin^2\varphi$，$dx=-2\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi$，

$$B(p, q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

$$=-2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^{2(p-1)}\varphi\sin^{2(q-1)}\varphi\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi\,d\varphi.$$

如果令 $x=\dfrac{1}{1+z}$，$1-x=\dfrac{z}{1+z}$，$dx=-\dfrac{dz}{(1+z)^2}$，那末

$$B(p, q)=\int_0^\infty \frac{z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}dz$$

$$=\int_0^1 \frac{z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}dz+\int_1^\infty \frac{z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}dz,$$

在后一积分中，置$z=\dfrac{1}{t}$，再换t为z，得到

$$\int_1^\infty \frac{z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}dz=-\int_1^0 \frac{\dfrac{1}{t^{q-1}}\cdot\dfrac{1}{t^2}}{\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{p+q}}dt$$

$$=\int_0^1 \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt=\int_0^1 \frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}}dz,$$

所以
$$B(p, q)=\int_0^1 \frac{z^{p-1}+z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}dz.$$

3° 递推公式:

設$p>0, q>1$，那末，$B(p, q)=\dfrac{q-1}{p+q-1}B(p, q-1)$；

設$p>1, q>0$，那末，$B(p, q)=\dfrac{p-1}{p+q-1}B(p-1, q)$。

先証明前一式，后一式可类似証明。当$p>0$，$q>1$，有

$$
\begin{aligned}
B(p, q) &= \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \\
&= \frac{x^p(1-x)^{q-1}}{p}\Big|_0^1 + \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}dx \\
&= \frac{q-1}{p}\int_0^1 [x^{p-1} - x^{p-1}(1-x)](1-x)^{q-2}dx \\
&= \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}dx - \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \\
&= \frac{q-1}{p} B(p, q-1) - \frac{q-1}{p} B(p, q).
\end{aligned}
$$

从这等式可解得第一个公式。

設 $p>1$, $q>1$, 对每个变量应用以上公式，就有

$$
\begin{aligned}
B(p, q) &= \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1) \\
&= \frac{(q-1)(p-1)}{(p+q-1)(p+q-2)} B(p-1, q-1).
\end{aligned}
$$

五、Beta 函数与 Gamma 函数的关系

我們要証明下面的关系式成立：

$$
B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (p>0;\ q>0).
$$

【証明】 設 $s>0$, $\alpha>0$, 作变换 $\alpha u = x$, 得到

$$
\Gamma(s) = \alpha^s \int_0^\infty u^{s-1}e^{-\alpha u}du,
$$

所以

$$
\frac{\Gamma(s)}{\alpha^s} = \int_0^\infty u^{s-1}e^{-\alpha u}du.
$$

因此当 $p>0$, $q>0$, $z\geqslant 0$ 时，与这等式对比有

$$
\frac{\Gamma(p+q)}{(1+z)^{p+q}} = \int_0^\infty u^{p+q-1}e^{-(1+z)u}du.
$$

又由 $B(p, q)$ 的一个表示式

$$
B(p, q) = \int_0^\infty \frac{z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}\, dz,
$$

得到 $$\Gamma(p+q)B(p, q)=\int_0^\infty \Gamma(p+q)\frac{z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}dz$$
$$=\int_0^\infty dz\int_0^\infty z^{q-1}u^{p+q-1}e^{-(1+z)u}du.$$

当 $p>1$, $q>1$ 时，可以說明这积分的順序可交換，这是因为 $f(z, u)=z^{q-1}u^{p+q-1}e^{-(1+z)u}$ 在 $[0, \infty; 0, \infty)$ 上非負，

$$\int_0^\infty dz\int_0^\infty f(z, u)du=\Gamma(p+q)B(p, q)\text{存在；}$$

$$\int_0^\infty f(z, u)du=z^{q-1}\int_0^\infty u^{p+q-1}e^{-(1+z)u}du=z^{q-1}\frac{\Gamma(p+q)}{(1+z)^{p+q}}$$

在 $z\geqslant 0$ 时連續，由 §2 中狄尼定理，知道 $\int_0^\infty f(z, u)du$ 关于 z 在任何 $[0, Z]$ 上一致收斂；又

$$\int_0^\infty f(z, u)dz=e^{-u}u^{p+q-1}\int_0^\infty z^{q-1}e^{-uz}dz$$
$$=e^{-u}u^{p+q-1}\frac{\Gamma(q)}{u^q}=\Gamma(q)u^{p-1}e^{-u}$$

在 $u\geqslant 0$ 时連續，同理，$\int_0^\infty f(z, u)dz$ 关于 u 在 $[0, U]$ 上一致收斂。应用 §2 中的积分順序交換定理 II，推知所写出的二次无穷限积分的順序可交換，得到

$$\Gamma(p+q)B(p, q)=\int_0^\infty du\int_0^\infty f(z, u)dz$$
$$=\int_0^\infty \Gamma(q)u^{p-1}e^{-u}du=\Gamma(q)\Gamma(p).$$

因而当 $p>1$, $q>1$ 时已証得公式：

$$B(p, q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

如果 $p>0$, $q>0$，由已証得公式有

$$B(p+1, q+1)=\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)},$$

两边用递推公式，得到

$$\frac{p\cdot q}{(p+q+1)(p+q)}B(p, q)=\frac{p\Gamma(p)\cdot q\Gamma(q)}{(p+q+1)(p+q)\Gamma(p+q)},$$

消去双方相同的因子,得到当 $p>0$, $q>0$ 时的公式

$$B(p, q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

从証得的公式可以看出, Beta 函数实际上可以用 Gamma 函数表示,有了 Gamma 函数表,經过算术运算,就可以得到 Beta 函数之値。

[例 1] 求二項式积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}dx$ $(p, q, m>0)$ 之值。

作代換 $x^m=t$, 便有

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}dx=\frac{1}{m}\int_0^1 t^{\frac{p}{m}-1}(1-t)^{q-1}dt$$

$$=\frac{1}{m}B\left(\frac{p}{m}, q\right)=\frac{1}{m}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)}.$$

[例 2] 勒让得(Legendre)公式

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s-1}}\Gamma(2s)$$

成立。

这个公式也称为 Gamma 函数的变数加倍公式。

因为 $$B(s, s)=\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{s-1}dx$$

$$=\int_0^1[x(1-x)]^{s-1}dx$$

$$=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{s-1}dx$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{s-1}dx,$$

作变换 $\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}\sqrt{t}$, $dx=-\frac{1}{4}\frac{dt}{\sqrt{t}}$, 得到

$$B(s, s)=\frac{1}{2^{2s-1}}\int_0^1 (1-t)^{s-1}t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2^{2s-1}}B\left(\frac{1}{2}, s\right).$$

利用两种函数的关系式,有

$$\frac{\Gamma^2(s)}{\Gamma(2s)}=\frac{1}{2^{2s-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(s)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right)},$$

在第三段已得到 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, 所以有

$$\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s-1}}\Gamma(2s).$$

最后提一下,关于 $\Gamma(s)$ 成立余元关系:

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}$$

以及斯特林(Stirling)公式:

$$\Gamma(s+1)=\left(\frac{s}{e}\right)^s\sqrt{2\pi s}\,(1+o(1))\quad(s\to\infty).$$

特别当 $s=n$, 就有 $n!$ 的渐近公式:

$$n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\,(1+o(1))\quad(n\to\infty).$$

这些公式我們都不証明。

习　题

1. 設在$[a, \infty; c, d]$内成立$|f(x, y)|\leqslant F(x, y)$, 并且积分$\int_a^\infty F(x, y)dx$关于$y\in[c, d]$一致收斂, 則$\int_a^\infty f(x, y)dx$ 关于 $y\in[c, d]$ 亦一致收斂, 且絕对收斂。
2. 証明下列积分在所給定区間內一致收斂:

(1) $\int_0^\infty \frac{\cos xy}{x^2+y^2}\,dx \quad (y\geqslant a>0)$;

(2) $\int_0^\infty \frac{\cos xy}{x^2+1}\,dx \quad (-\infty<y<\infty)$;

(3) $\int_0^1 \log xy\,dx \quad \left(\frac{1}{b}\leqslant y\leqslant b,\ b>1\right)$.

3．討論下列积分在指定区間的一致收斂性：

(1) $\int_1^\infty x^\alpha e^{-x}dx \quad (a\leqslant\alpha\leqslant b;\ a, b$ 为任意实数$)$;

(2) $\int_0^\infty \sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha x^2}dx \quad (0<\alpha<\infty)$;

(3) $\int_{-\infty}^\infty e^{-(x-\alpha)^2}dx$,

(i) $a<\alpha<b$,　　(ii) $-\infty<\alpha<\infty$;

(4) $\int_0^1 x^{p-1}\log^2 x\,dx$,

(i) $p\geqslant p_0>0$,　　(ii) $p>0$;

(5) $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx \quad (\alpha>0)$.

4．証明：

(1) $\int_0^\infty \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}\,dx$ 在每一不含 $\alpha=0$ 的任何区間上是連續函数；

(2) $F(p)=\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^p(\pi-x)^{2-p}}\,dx$ 在$(0, 2)$內連續。

5．設 $f(t)$ 当 $t>0$ 时連續，如果 $\int_0^\infty t^\lambda f(t)\,dt$ 当 $\lambda=a$, $\lambda=b$ 时皆收斂，那末 $\int_0^\infty t^\lambda f(t)\,dt$ 关于 λ 在$[a, b]$上一致收斂。

6．从等式 $\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int_a^b e^{-xy}dy$ 出发，計算积分

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx \quad (b>a>0).$$

7．利用公式 $\int_0^\infty \frac{dx}{a+x^2}=\frac{\pi}{2\sqrt{a}}\ (a>0)$，計算积分

$$I_n=\int_0^\infty \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}} \quad (n\text{ 正整数}).$$

8．試証明 $\Gamma(s)$ 的导数存在，求出 $\Gamma'(s)$ 的积分表达式，說明推导过程是合理的。

9. (1) 从$\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$推出$L(c)=\int_0^{\infty} e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}} dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2c}$;

(2) 利用积分号下求微商法引出$\frac{dL}{dc}=-2L$来求得同一結果，并推出

$\int_0^{\infty} e^{-ay^2-\frac{b}{y^2}} dy\,(a>0,\ b>0)$之值。

10. (1) 从等式$\frac{1}{\alpha^2+x^2}=\int_0^{\infty} e^{-t(\alpha^2+x^2)}dt$出发，計算$J=\int_0^{\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2+x^2} dx$之值$(x>0)$;

(2) 利用积分$\int_0^{\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2+x^2} dx=\frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta}$ $(\alpha,\ \beta>0)$推出积分

$$I=\int_0^{\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2+x^2} dx$$

之值。

11. 証明: (1) $B(p,q)B(p+q,\gamma)=B(q,\gamma)B(q+\gamma,p)$;

(2) $\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)\sqrt{\pi}}{2^k}$.

12. 証$\int_0^{\infty} e^{-x^k} dx=\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)$　$(k>0)$.

13. 証$\int_{-1}^{1} (1+x)^{\alpha}(1-x)^{\beta}dx=2^{\alpha+\beta+1}B(\alpha+1,\beta+1)$.

14. 試証$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x\, dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a x\, dx=\frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2},\frac{a+1}{2}\right)$　$(a>0)$,

并由此推出:

(1) 当a是奇数,則

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x\, dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a x\, dx=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(a-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots a};$$

(2) 当a是偶数,則

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x\, dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a x\, dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdots(a-1)}{2\cdot 4\cdots a}.$$

第六章　富里埃(Fourier)級数

§1　三角級数和富里埃級数

一、引　言

在物理学中时常要遇到周期現象，与所考察的周期現象有关的各种量在經过时間 T 之后(其中 T 是周期)重新取原来的数值，这些量由时間 t 的周期函数表示：

$$f(t+T)=f(t).$$

例如，单摆在振幅很小时的摆动可用函数

$$A\sin(\omega t+\varphi)$$

表示，又如交流电的电流强度 I 随时間的变化关系为

$$I=I_0\sin(\omega t+\varphi),$$

其中 ω 是綫圈轉动的角速度，φ 为初位相。这两个函数都是 t 的周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$ 的周期函数，它們所描述的周期現象称为調和振动。

叠合若干个形式

$$y_0=A_0\sin\varphi_0,\quad y_1=A_1\sin(\omega t+\varphi_1),$$

$$y_2=A_2\sin(2\omega t+\varphi_2),\ \cdots,\ y_n=A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$$

的量，仍然是周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$ 的量。如果取 $\omega t=x$ 为自变量，那末就得到函数

$$\sum_{k=0}^{n}A_k\sin(k\omega t+\varphi_k)=\sum_{k=0}^{n}A_k\sin(kx+\varphi_k);$$

对于变量 x 来說，是周期为 2π 的函数，称它为 n 阶三角多項式，$A_k\sin(kx+\varphi_k)$ 称为第 k 級調和素。因此由 n 阶三角多項式所表示的振动現象是可以分解为有限个調和素的振动的。

一般地，以形式为 $A_k\sin(kx+\varphi_k)$ 的项所作的无穷級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(kx+\varphi_k)$$

称为三角級数。显然，如果一个三角級数在某一长度为 2π 的区間上是收斂的，那末由于这級数的每一項有周期性，所以它表示周期函数。

如果把第 k 級調和素 $A_k\sin(kx+\varphi_k)$ 改写为

$$A_k\sin(kx+\varphi_k)=A_k\sin\varphi_k\cos kx+A_k\cos\varphi_k\sin kx$$
$$\equiv a_k\cos kx+b_k\sin kx,$$

同时为以后的方便計，把第零級調和素这个常数記为 $\frac{a_0}{2}$。这样，n 阶三角多項式就可写为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

而三角級数取形式

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

并且，如果一个三角級数只有余弦項，即一切 $b_k=0$，

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx,$$

則称为余弦級数；同样，

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx$$

称为正弦級数。显然，如果这些級数收斂，那末前者是偶函数，后者是奇函数。

对于三角級数，如同对一般的函数項級数一样，要决定它的收斂点(与收斂范圍)，这就是收斂問題。对于一个周期为 2π 的函数 $f(x)$，能否有三角級数，它在所討論的范圍上收斂且收斂于函数

$f(x)$，这就是展开問題，以后会看到，对于相当广泛一类的函数，可以給出肯定的答复。这些問題是和展开函数为幂級数的問題相当的，而是这一章的中心問題。

三角級数理論的历史可以追溯到很远，早在十八世紀，在研究两端固定在 x 軸上的横弦振动問題时，討論到方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

其中函数 $y=y(t,x)$ 表示弦上横坐标为 x 的点在时刻 t 关于横軸 x 的偏移。1747 年和稍后，达朗貝尔和欧拉先后确认这方程的通解是

$$y=f(x-at)+\varphi(x+at),$$

f,φ 是两个任意函数；1753 年 D. 貝努利(D. Bernoulli)把 y 表示为系数是 t 的函数的关于 x 的三角級数，也指出它是通解。在当时对于函数只理解为有一个解析表达式的函数的情形下，如何統一这两方面的結論是一直被注意的問題；不仅是含两个不同函数 f 和 φ 的量(函数)以一个三角級数来代替的問題难以理解，并且一个不一定是周期的函数展开为周期 2π 的三角級数也引起疑問。后来富里埃研究热傳导問題时，又遇到这样的問題。1882 年他明确地提出区間 $(-\pi,\pi)$ 上的任意函数可展开为三角級数的問題。現在我們知道，关于展开問題，对函数还应加上条件，可是那时富里埃沒有給出这些条件；后来經过不少人的工作，才有严格的論証，也逐漸澄清了很久以来关于函数概念的含混之处，統一了長期以来的爭論。由于富里埃提出函数展开为三角級数的問題，同时他对于一些特殊情况的研究，确能解决实际問題，因而富里埃的工作是有很大貢献的，后来，就把函数所"展成"的三角級数称为富里埃級数。

三角級数(主要指富里埃級数)的理論不仅在函数概念方面起

过很大的作用，还有許多数学上的基本概念来自三角級数，因此这一理論一直是現代数学的一个重要分支。

在这一章除了关于三角級数的收斂問題和展开問題而外，也介紹平方平均收斂和封閉性概念，最后还簡单介紹富里埃积分并指出它的收斂問題和富里埃級数的收斂問題的关系。

二、三角函数系的正交性

在三角級数的展开問題（富里埃級数）的討論中，三角函数系的正交性起主要作用，現在来介紹这个概念。

設 c 是任意实数，$[c, c+2\pi]$ 是长度为 2π 的区間，由于三角函数 $\cos kx$, $\sin kx$ 是周期为 2π 的函数，經过簡单計算，有

$$\left.\begin{aligned}&\int_c^{c+2\pi}\cos kx\,dx=\int_0^{2\pi}\cos kx\,dx=0,\\&\int_c^{c+2\pi}\sin kx\,dx=\int_0^{2\pi}\sin kx\,dx=0,\end{aligned}\quad (k=1,2,\cdots)\right\}\tag{1}$$

利用三角公式

$$\sin kx\cos lx=\frac{1}{2}[\sin(k+l)x+\sin(k-l)x],$$

$$\sin kx\sin lx=\frac{1}{2}[\cos(k-l)x-\cos(k+l)x],$$

$$\cos kx\cos lx=\frac{1}{2}[\cos(k-l)x+\cos(k+l)x],$$

容易証明

$$\left.\begin{aligned}&\int_c^{c+2\pi}\sin kx\cos lx\,dx=0,\\&\int_c^{c+2\pi}\sin kx\sin lx\,dx=0,\quad (k\neq l;\ k,l=1,2,\cdots)\\&\int_c^{c+2\pi}\cos kx\cos lx\,dx=0;\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

最后有

$$\left.\begin{aligned}&\int_c^{c+2\pi}\cos^2 kx\,dx=\int_0^{2\pi}\cos^2 kx\,dx=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2kx}{2}\,dx=\pi,\\&\int_c^{c+2\pi}\sin^2 kx\,dx=\pi,\qquad\qquad (k=1,2,\cdots)\\&\int_c^{c+2\pi}1^2dx=2\pi.\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

我們考察函数系

$$\{1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \cdots\},$$

其中每一个函数在长为 2π 的区間上定义,其中任何两个不同的函数的乘积沿区間上的积分等于零(見(1),(2))。我們称这个函数系在长为 2π 的区間上具有正交性；以后为确定起見，长度为 2π 的区間常取为 $[-\pi,\pi]$ 或 $[0,2\pi]$。

三、富里埃系数

回到把函数展开为三角級数的問題，我們首先在一些特殊的假定下,討論一下展开式的系数和被展开的函数之間的关系.

設函数 $f(x)$ 已展开为全区間上的一致收斂的三角級数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).\qquad(4)$$

在以上的假定下,把等式(4)沿区間 $[-\pi,\pi]$ 积分,右边級数可以逐項积分,由(1)得到

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi=a_0\pi,$$

即
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,$$

又設 n 是任一正整数,对(4)式的两边乘以 $\cos nx$, 沿 $[-\pi,\pi]$ 积分,由假定,右边可以逐項积分,从(1),(2)和(3),得到

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\,dx\right)$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=a_n\pi,$$

即
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

同样可得
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

因此得到

$$\left.\begin{aligned} a_k&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \quad (k=0,1,2,\cdots),\\ b_k&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \quad (k=1,2,\cdots). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

自然計算这些系数的积分也可以沿别的长度为 2π 的区間来积。

以上是在 $f(x)$ 已展开为一致收斂的三角級数的假定下得到系数的表示式的。一般地，只要周期函数 $f(x)$ 在区間 $[-\pi,\pi]$ 上可积和絕对可积[如果 $f(x)$ 是有界函数，假定它是可积的，由于有界可积函数一定絕对可积，所以它也是絕对可积的；如果 $f(x)$ 是无界函数，就假定它是絕对可积的，因而也是可积的。这样，不論在哪一种情形，都是可积和絕对可积了]，就可以按公式(5)来确定所有的数 a_k, b_k，从而作出三角級数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

我們称这級数是 $f(x)$ 关于三角函数系 $\{1,\cos kx,\sin kx\}$ 的富里埃級数，而 a_k, b_k 称为 $f(x)$ 的富里埃系数，記为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx). \tag{6}$$

由 $f(x)$ 計算系数 a_k, b_k 的公式(5)称为欧拉-富里埃公式。

对于函数 $f(x)$ 尽管已經作出富里埃級数，但还不能断定它是收斂的，并且即使它在一点 x 收斂了，还不一定收斂于函数值 $f(x)$，这些問題以后要詳細討論。

最后我們可以把在这一段开始說明的一些事实归結为以下

定理 如果周期 2π 的函数 $f(x)$ 可以展开为一致收斂的三角級数,那末这个三角級数就是它的富里埃級数。

§2 一般正交函数系

在数学物理問題上,还常常要把一个函数按具有某种特性的函数系作展开,这些函数系中的函数往往是某些微分方程的解;其所以能按函数系作級数展开的依据,也是这些函数系有正交性,我們就来說明它。

定义 設 $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ 是一族在区間 $[a, b]$ 上定义的可积和平方可积函数,如果条件

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx=0, \quad \text{当 } m\neq n$$

成立,則称 $\{\varphi_n(x)\}$ 是 $[a, b]$ 上的正交系。

在討論时,常要求在 $m=n$ 时

$$\int_a^b [\varphi_n(x)]^2dx=\lambda_n\neq 0.$$

例如,要是 $\varphi_n(x)$ 是連續函数,这个要求就把恒等于零的函数排除在正交系之外了,显然这样做是有意义的。

特別,当对于正交系中的每一函数成立 $\lambda_n=1$ 时,称 $\{\varphi_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的标准正交系。

显然,如果 $\{\varphi_n(x)\}$ 是任一正交系,其中 $\lambda_n\neq 0$, 那末 $\left\{\dfrac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}\right\}$ 就是在同一区間上的标准正交系。

設 $\{\varphi_n(x)\}$ 是 $[a, b]$ 上的正交系,又 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是可积和平方可积的,这时 $\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx$ 存在,由公式

$$c_k=\frac{1}{\lambda_k}\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx$$

确定数 c_k，并作級数

$$c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_k\varphi_k(x)+\cdots,$$

称它为 $f(x)$ 关于正交系 $\{\varphi_k(x)\}$ 的富里埃級数，c_k 称为 $f(x)$ 关于 $\{\varphi_k(x)\}$ 的富里埃系数，記为

$$f(x)\sim c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_k\varphi_k(x)+\cdots.$$

和以前一样，如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 已展开为一致收斂的級数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\varphi_k(x),$$

那末这級数一定是 $f(x)$ 关于 $\{\varphi_k(x)\}$ 的富里埃級数。

以后我們主要討論关于三角函数系的富里埃級数，而只在平方平均迫近和封閉性等概念上才提到一般函数系的富里埃級数。

（注）　在一般的富里埃級数的討論中，并不要求函数 $f(x)$ 具有周期性。对于三角函数系的富里埃級数，主要的也只是要求 $f(x)$ 在一长度为 2π 的区間 $[c, c+2\pi]$ 确定。由于三角函数有周期性，所有的討論只要在按 $f(x+2\pi)=f(x)$ 延展后，就可以在其他长度为 2π 的区間上来討論了。

以下举一些正交函数系的例子。

［例 1］　$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$ 在 $[0, \pi]$ 上不是正交系，但 $\{1, \cos x, \cos 2x, \cdots\}$ 和 $\{\sin x, \sin 2x, \cdots\}$ 在 $[0, \pi]$ 上都是正交系。

［例 2］　$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \cdots\right\}$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上的标准正交系。

［例 3］　$\left\{1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \cdots\right\}$

是 $[0, 2l]$ 上或 $[-l, l]$ 上的正交系，$\left\{\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{l},\right.$

$\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{l},\cdots,\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l},\ \cdots\Big\}$ 是 $[0,\ 2l]$ 上的标准正交系。

这可以計算驗証；例如

$$\int_0^{2l}\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{l}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos mt\sin nt\,dt=0,$$

$$\int_0^{2l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ l, & m=n\neq 0.\end{cases}$$

[例 4] 方程 $\operatorname{tg} x=x$ 有无穷許多个根，記它的正根为 ξ_1，ξ_2，…，那末 $\left\{\sin\frac{\xi_n x}{l}\right\}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 是 $[0,\ l]$ 上的正交系。

因为

$$\int_0^l\sin\alpha x\sin\beta x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^l[\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\alpha-\beta)l}{\alpha-\beta}-\frac{\sin(\alpha+\beta)l}{\alpha+\beta}\right]$$

$$=\frac{\cos\alpha l\cos\beta l[\beta\operatorname{tg}\alpha l-\alpha\operatorname{tg}\beta l]}{\alpha^2-\beta^2}.$$

置 $\alpha=\frac{\xi_m}{l}$，$\beta=\frac{\xi_n}{l}$ $(m\neq n)$，就有

$$\int_0^l\sin\frac{\xi_m x}{l}\sin\frac{\xi_n x}{l}\,dx$$

$$=\frac{\cos\xi_m\cos\xi_n\left[\frac{\xi_n}{l}\operatorname{tg}\xi_m-\frac{\xi_m}{l}\operatorname{tg}\xi_n\right]}{\frac{1}{l^2}[\xi_m^2-\xi_n^2]}=0.$$

[例 5] p 阶的贝塞尔（Bessel）函数是二阶微分方程（贝塞尔方程）

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$$

的解，例如

$$J_p(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(p+m+1)}$$

是 $x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$ 的解；

$$J_0(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{(m!)^2}$$

是 $xy''+y'+xy=0$ 的解。在贝塞尔函数的理論中，知道 $J_p(x)$ 有无穷多个正单根 $\xi_1^{(p)},\xi_2^{(p)},\cdots,\xi_n^{(p)},\cdots$；$J_0(x)$ 也有无穷多个正单根 $\{\xi_n^{(0)}\}$。可以証明 $\{\sqrt{x}J_p(\xi_n^{(p)}x)\}$ 在 $[0,1]$ 上是正交系；$\{\sqrt{x}J_0(\xi_n^{(0)}x)\}$ 在 $[0,1]$ 上也是正交系。

現在仅对后面的函数系来驗証正交性。把 $J_0(x)$ 所满足的方程写为

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)=-xy(x),$$

作变换 $x=\alpha x'$，就有 $dx=\alpha dx'$，$y(x)=y(\alpha x')$，然后再把 x' 写为 x，就有：

$$\frac{d}{dx}\left\{x\frac{d}{dx}[J_0(\alpha x)]\right\}=-\alpha^2xJ_0(\alpha x),$$

同样有：

$$\frac{d}{dx}\left\{x\frac{d}{dx}[J_0(\beta x)]\right\}=-\beta^2xJ_0(\beta x).$$

用 $J_0(\beta x)$，$J_0(\alpha x)$ 分乘以上两式，并相减所得到結果，我們有：

$$(\beta^2-\alpha^2)xJ_0(\alpha x)J_0(\beta x)$$
$$=\frac{d}{dx}[J_0(\beta x)\alpha xJ_0'(\alpha x)-J_0(\alpha x)\beta xJ_0'(\beta x)].$$

沿区間 $[0,1]$ 积分这个等式，

$$\int_0^1 xJ_0(\alpha x)J_0(\beta x)dx$$
$$=\frac{1}{\beta^2-\alpha^2}[J_0(\beta x)\alpha xJ_0'(\alpha x)-J_0(\alpha x)\beta xJ_0'(\beta x)]\Big|_0^1$$
$$=\frac{1}{\beta^2-\alpha^2}[\alpha J_0(\beta)J_0'(\alpha)-\beta J_0(\alpha)J_0'(\beta)].$$

置 $\alpha=\xi_m$, $\beta=\xi_n$, $m\neq n$, 即得

$$\int_0^1 xJ_0(\xi_m x)J_0(\xi_n x)\,dx=0.$$

(注) 貝塞尔函数有无穷多个正单根的定理可参看托尔司托夫的富里埃級数第八章。

[例 6] 勒让得多項式。

在解数学物理問題中除了貝塞尔函数而外，也常常遇到勒让得多項式：

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n\{(x^2-1)^n\}}{dx^n}\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

明显地写出前面几个，

$$P_0(x)=1,\qquad P_1(x)=x,$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\quad P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x).$$

利用二項式公式

$$(x^2-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!}x^{2n-2k},$$

容易得出：

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k},$$

它是 n 次多項式。以下說明这个多項式組 $\{P_n(x)\}$ 是在 $[-1,1]$ 上的正交系。事实上，直接計算可以証明以下公式

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \dfrac{2}{2n+1}, & m=n.\end{cases}$$

設 $m<n$, 利用分部积分法：

$$I_{mn}\equiv\int_{-1}^{1}\frac{d^m\{(x^2-1)^m\}}{dx^m}\cdot\frac{d^n\{(x^2-1)^n\}}{dx^n}\,dx$$

$$=\frac{d^m\{(x^2-1)\}^m}{dx^m}\cdot\frac{d^{n-1}\{(x^2-1)^n\}}{dx^{n-1}}\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$-\int_{-1}^{1}\frac{d^{m+1}\{(x^2-1)^m\}}{dx^{m+1}}\cdot\frac{d^{n-1}\{(x^2-1)^n\}}{dx^{n-1}}dx,$$

由于 $(x^2-1)^n$ 以 $x=\pm1$ 为 n 重根，所以右边第一项等于零，继續利用分部积分法，得到

$$\begin{aligned} I_{mn} &= +\int_{-1}^{1}\frac{d^{m+2}\{(x^2-1)^m\}}{dx^{m+2}}\cdot\frac{d^{n-2}\{(x^2-1)^n\}}{dx^{n-2}}dx \\ &= (-1)^m\int_{-1}^{1}\frac{d^{2m}\{(x^2-1)^m\}}{dx^{2m}}\cdot\frac{d^{n-m}\{(x^2-1)^n\}}{dx^{n-m}}dx \\ &\overset{?}{=} (-1)^m(2m)!\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-m}\{(x^2-1)^n\}}{dx^{n-m}}dx. \end{aligned}$$

当 $n>m$ 时，

$$\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-m}\{(x^2-1)^n\}}{dx^{n-m}}dx=0.$$

当 $n=m$ 时，

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-m}\{(x^2-1)^n\}}{dx^{n-m}}dx \\ &=\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx=(-1)^n\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx \\ &=(-1)^n\cdot2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}t\,dt=(-1)^n\cdot2\frac{2n(2n-2)\cdots4\cdot2}{(2n+1)\cdots5\cdot3}. \end{aligned}$$

所以

$$\int_{-1}^{1}\frac{d^m\{(x^2-1)^m\}}{dx^m}\cdot\frac{d^n\{(x^2-1)^n\}}{dx^n}dx =\begin{cases}0, & \text{当 } n>m, \\ \dfrac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n+1)!}, & \text{当 } m=n.\end{cases}$$

再由

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx \\ &=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2^{n+m}m!n!}\cdot\frac{d^m\{(x^2-1)^m\}}{dx^m}\cdot\frac{d^n\{(x^2-1)^n\}}{dx^n}dx, \end{aligned}$$

就可証明所需要的关系式。

（注） 勒让得多項式 $P_n(x)$ 是二阶綫性微分方程

$$[(1-x^2)y']'+n(n+1)y=0$$

的解。

§3 狄利克来积分和黎曼引理

一、設 $f(x)$ 是周期 2π 的可积和絕对可积的函数，如前一节所說明的，对它能作关于三角函数系的富里埃級数。現在討論在什么条件下，所得的級数在点 x 收斂？又在收斂的情况下，它的和怎样？在收斂性問題上，富里埃級数比泰勒級数来得复杂，那时，只要討論泰勒公式中的余項的收斂情况，并确定收斂半徑就行了。但另一方面对于能展为幂級数的函数 $f(x)$ 的要求是較强的。

我們現在把富里埃級数的部分和表示为含参变量的积分，再从而討論收斂性問題。

設 $$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

其中

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,dt\quad(k=0,1,2,\cdots);$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,dt\quad(k=1,2,\cdots).$$

富里埃級数的部分和

$$S_n[f(x)]\equiv\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx)\right]dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt,\qquad(*)$$

由三角公式

$$2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\frac{1}{2}+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cdots+\cos n\varphi\right]$$

$$=\sin\frac{\varphi}{2}+\left(\sin\frac{3\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi}{2}\right)+\cdots$$

$$+\left(\sin\frac{2n+1}{2}\varphi-\sin\frac{2n-1}{2}\varphi\right)$$

$$=\sin\frac{2n+1}{2}\varphi,$$

当 $\sin\frac{\varphi}{2}\neq 0$，有公式

$$\frac{1}{2}+\cos\varphi+\cdots+\cos n\varphi=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}},$$

当 $\varphi=0$ 时把右边了解为 $\varphi\to 0$ 时的极限值，这式也就成立。把这公式应用到(*)，得到

$$S_n[f(x)]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}dt.$$

經过驗証知道，被积函数是 t 的周期为 2π 的函数，可以把积分区間换为 $[x-\pi,\ x+\pi]$，因此

$$S_n[f(x)]=\frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi}f(t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}dt,$$

作代换 $t-x=u$，得

$$S_n[f(x)]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+u)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}du$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}+\int_{-\pi}^{0}\right]f(x+u)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}du.$$

在这里的几种形状的积分皆称为狄利克来积分。又因为

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{2\sin\frac{2n+1}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}du$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos ku\right]du=1,$$

所以

$$S_n[f(x)]-s=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)-2s]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}du.$$

这样，把考察 $S_n[f(x)]$ 收斂問題以及收斂于 s 的問題，变为討論上述积分是否收斂和收斂于零的問題了。如果記

$$\varphi(u)=f(x+u)+f(x-u)-2s,$$

那末富里埃級数在 x 点是否收斂，就看能否取到适当的 s，使以下的极限式成立：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(u)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}du=0,$$

如果这极限式成立，$f(x)$ 的富里埃級数在 x 点就收斂于 s。

二、黎曼引理

为了討論上述积分的收斂問題，先讲一个重要的引理。

黎曼引理 設函数 $\psi(u)$ 在区間 $[a,b]$ 上可积和絕对可积，那末以下的極限式成立：

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b \psi(u)\sin pu\,du=0,\quad \lim_{p\to\infty}\int_a^b \psi(u)\cos pu\,du=0.$$

【証明】 1° 先設 $\psi(u)$ 在 $[a,b]$ 上有界可积。我們注意到对任意区間 $[a,b]$，常有

$$\left|\int_a^b \sin pu\,du\right|=\left|\frac{-\cos pb+\cos pa}{p}\right|\leqslant\frac{2}{p}.$$

現在把区間 $[a,b]$ 分为小区間 $a=u_0<u_1<\cdots<u_n=b$，$\Delta u_i=u_i-u_{i-1}$，M_i，m_i 是 $\psi(u)$ 在 Δu_i 的上、下确界，$\omega_i=M_i-m_i$，和証明第二中值定理时相仿，换 $\psi(u)$ 为阶梯函数，我們有：

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b \psi(u)\sin pu\,du\right|\\
&=\left|\sum_{i=1}^n\int_{u_{i-1}}^{u_i}\psi(u)\sin pu\,du\right|\\
&=\left|\sum_{i=1}^n\int_{u_{i-1}}^{u_i}[\psi(u)-m_i]\sin pu\,du+\sum_{i=1}^n\int_{u_{i-1}}^{u_i}m_i\sin pu\,du\right|\\
&\leqslant\sum_{i=1}^n\int_{u_{i-1}}^{u_i}|\psi(u)-m_i|du+\sum_{i=1}^n|m_i|\left|\int_{u_{i-1}}^{u_i}\sin pu\,du\right|\\
&\leqslant\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta u_i+\frac{2}{p}\sum_{i=1}^n|m_i|.
\end{aligned}$$

由于 $\psi(u)$ 可积，对于任意正数 ε，存在分法，使

$$\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta u_i<\frac{\varepsilon}{2},$$

这时 $\sum\limits_{i=1}^n|m_i|$ 已定，再取 p 充分大 $p\geqslant p_0$，可使

$$\frac{2}{p}\sum_{i=1}^n|m_i|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此，只要 $p\geqslant p_0$，就有

$$\left|\int_a^b \psi(u)\sin pu\,du\right| < \varepsilon,$$

此即
$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b \psi(u)\sin pu\,du=0.$$

2° 設 $\psi(u)$ 是无界可积的，不妨設只有 b 点是奇点。因为 $|\psi(u)|$ 可积，所以对 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，使

$$\int_{b-\eta}^b |\psi(u)|\,du<\varepsilon,$$

从而
$$\left|\int_a^b \psi(u)\sin pu\,du\right|$$
$$\leqslant\left|\int_a^{b-\eta}\psi(u)\sin pu\,du\right|+\left|\int_{b-\eta}^b\psi(u)\sin pu\,du\right|,$$

右边的第一项根据 1°，当 p 充分大，可使它小于 ε；而后一积分的絕对值小于 $\int_{b-\eta}^b|\psi(u)|\,du<\varepsilon$，所以当 p 充分大时，

$$\left|\int_a^b \psi(u)\sin pu\,du\right|<2\varepsilon,$$

即
$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b \psi(u)\sin pu\,du=0.$$

同理可証明
$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b \psi(u)\cos pu\,du=0.$$

三、黎曼引理的应用

利用黎曼引理可以証明富里埃級数的一些性质。

1° **局部性定理** 函数 $f(x)$ 的富里埃級数在 x 点的收斂和发散情况，只和 $f(x)$ 在这一点的充分邻近区域的值有关。

【証明】 将 $S_n[f(x)]$ 的积分分成两部分

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi [f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^\delta+\int_\delta^\pi\right],$$

这里 $0<\delta<\pi$。把第二个积分写为

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2\sin\frac{u}{2}}\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,du,$$

积分号下的分式函数是可积和絕对可积的函数 $f(x+u)+f(x-u)$ 同有界連續函数 $\dfrac{1}{2\sin\frac{u}{2}}$ 的乘积，因此也是可积和絕对可积的。由黎曼引理推知，当 $n\to\infty$ 时，这一积分趋向于零。所以 $S_n[f(x)]$ 的收斂問題就完全决定于积分

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}[f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du$$

当 $n\to\infty$ 的极限情况。但在这积分中只牵涉到函数 f 在区間 $[x-\delta,\ x+\delta]$ 内的值，又 δ 是任意正数，这就証明了結論。

从以上的說明推知，如果两个函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 x 点的一邻域内取值相同，不論在其他点处数值如何，它們的富里埃級数在 x 点的收斂或发散情况相同。

$2°$ 应用黎曼引理立即推出：可积和絕对可积函数的富里埃系数 a_n，b_n 趋向于零

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt=0.$$

$3°$ 为了便于得到收斂性的充分条件，应用黎曼引理可以进一步改变要討論的积分，就是要証明当 $n\to\infty$ 时，两个积分

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\varphi(u)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du,\qquad \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\varphi(u)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{u}\,du$$

的收斂情况相同，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(u)\left[\frac{1}{2\sin\frac{u}{2}}-\frac{1}{u}\right]\sin\frac{2n+1}{2}u\,du=0.$$

并且，类似于 1° 的討論，可推知富里埃級数的收斂問題，只要討論

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}[f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{u}du$$

当 $n\to\infty$ 的收斂情况。

事实上，

$$\frac{1}{2\sin\frac{u}{2}}-\frac{1}{u}=\frac{u-2\sin\frac{u}{2}}{2u\sin\frac{u}{2}}$$

$$=\frac{u-2\left[\frac{u}{2}-\frac{1}{3!}\left(\frac{u}{2}\right)^3+\cdots\right]}{2u\left[\frac{u}{2}-\frac{1}{3!}\left(\frac{u}{2}\right)^3+\cdots\right]}\to 0\quad(u\to 0),$$

它是 $[0,\pi]$ 上的有界連續函数（在 $u=0$ 时，规定它的值等于零），又 $\varphi(u)$ 可积和絶对可积，所以 $\varphi(u)\left[\frac{1}{2\sin\frac{u}{2}}-\frac{1}{u}\right]$ 也是如此，应用黎曼引理就得到要証的結論。

§4 富里埃級数的收斂性定理（狄尼判別法及其推論）

一、这一节和下一节要討論关于富里埃級数的收斂性判別法。

狄尼定理（狄尼判别法） 設能取到适当的 s，使由函数 f 对于 x 点所作出的 $\varphi(u)=f(x+u)+f(x-u)-2s$ 満足条件：对某正数 h，使在 $[0,h]$ 上，$\frac{\varphi(u)}{u}$ 为可积和絶对可积，那末 $f(x)$ 的富里埃級数在 x 点收斂于 s。

【証明】 因为 f 可积和絕对可积，所以

$$\frac{\varphi(u)}{u}=\frac{f(x+u)+f(x-u)-2s}{u}$$

在 $[h,\pi]$ 上可积和絕对可积，又由假定 $\frac{\varphi(u)}{u}$ 在 $[0,h]$ 上也是如此，由黎曼引理知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{\varphi(u)}{u}\sin\frac{2n+1}{2}u\,du=0,$$

这表示
$$\lim_{n\to\infty}S_n[f(x)]=s.$$

通常遇到的函数中，在一点 x 是連續或是有第一类間断的情形还是基本的，这时 $f(x+0)$ 和 $f(x-0)$ 存在，以后我們也只討論这种函数的收斂性問題，而常假設

$$s=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

来进行討論。即当 f 在点 x 連續时，取 $s=f(x)$。以后还可以証明这样选取 s 是正确的，現在我們取这样的 s，利用狄尼定理得到一些收斂的充分条件。

对于上面所說的点 x，在取了这样的 s 以后，可写出

$$\frac{\varphi(u)}{u}=\frac{f(x+u)+f(x-u)-f(x+0)-f(x-0)}{u}$$
$$=\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}+\frac{f(x-u)-f(x-0)}{u},$$

显然，如果

$$\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}\quad 和\quad \frac{f(x-u)-f(x-0)}{u}$$

在 $[0,h]$ 上是可积和絕对可积的，$\frac{\varphi(u)}{u}$ 就能满足狄尼定理的条件，从而 $f(x)$ 的富里埃級数在 x 点收斂于 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ 了。

二、李普希茲判別法

如果函数 $f(x)$ 在 x 点連續，并且对于充分小的正数 u，在一点的李普希茲条件

$$|f(x\pm u)-f(x)|<Lu^{\alpha}\quad(0<u\leqslant h)$$

成立，其中 L, α 皆是正数，且 $\alpha\leqslant 1$，那末 $f(x)$ 的富里埃級数在 x 点收斂于 $f(x)$。更一般地，如果对于充分小的 u 成立

$$|f(x\pm u)-f(x\pm 0)|<Lu^{\alpha},$$

L, α 同前，那末 $f(x)$ 的富里埃級数在 x 点收斂于

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

【証明】 設 $\alpha=1$, $\dfrac{f(x\pm u)-f(x\pm 0)}{u}$ 有界，在 $[0, h]$ 上普通可积，所以适合狄尼定理的条件。

設 $\alpha<1$,

$$\left|\frac{f(x\pm u)-f(x\pm 0)}{u}\right|\leqslant\frac{L}{u^{1-\alpha}},$$

因为 $1-\alpha<1$，所以 $\dfrac{f(x\pm u)-f(x\pm 0)}{u}$ 广义可积和絕对可积，也适合狄尼定理的条件，从而結論成立。

三、重要推論

如果 $f(x)$ 在 x 点有有限导数 $f'(x)$，或是有两个单側的有限导数

$$f'_{+}(x)=\lim_{u\to+0}\frac{f(x+u)-f(x)}{u},$$

$$f'_{-}(x)=\lim_{u\to+0}\frac{f(x-u)-f(x)}{-u},$$

甚至只是有更一般的有限导数

$$\lim_{u\to+0}\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u},\quad\lim_{u\to+0}\frac{f(x-u)-f(x-0)}{-u},$$

那末 $f(x)$ 的富里埃級数在 x 点收斂于 $f(x)$ 或

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

因为这时对于函数 $f(x)$ 在 x 点的 $\alpha=1$ 的李普希兹条件是成立的。

§5 狄利克来引理、狄利克来-约当判别法

一、狄利克来引理

設 $g(u)$ 在区間 $[0, h]$ $(h>0)$ 上是单調增加函数,那末成立

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^h g(u)\frac{\sin pu}{u}du=\frac{\pi}{2}g(+0).$$

【証明】 把所考察的积分写为

$$g(+0)\int_0^h\frac{\sin pu}{u}du+\int_0^h[g(u)-g(+0)]\frac{\sin pu}{u}du,$$

对第一个积分作代換 $pu=t$, 得到

$$g(+0)\int_0^{ph}\frac{\sin t}{t}dt,$$

当 $p\to\infty$ 时,这积分趋向于 $g(+0)\frac{\pi}{2}$. 現在証明第二个积分当 $p\to\infty$ 时趋向于零。对于任意的正数 ε, 存在 $\delta>0$ (設 $\delta<h$), 使当 $0<u\leqslant\delta$ 时, $0\leqslant g(u)-g(+0)<\varepsilon$, 把第二个积分分成两个积分

$$\int_0^\delta[g(u)-g(+0)]\frac{\sin pu}{u}du$$
$$+\int_\delta^h[g(u)-g(+0)]\frac{\sin pu}{u}du=I_1+I_2.$$

因为 $g(u)-g(+0)$ 是单調增加函数,又当 $u\to0$ 时以零为极限,对 I_1 可应用第二中值定理,有

$$\int_0^\delta[g(u)-g(+0)]\frac{\sin pu}{u}du$$
$$=[g(\delta)-g(+0)]\int_\eta^\delta\frac{\sin pu}{u}du=[g(\delta)-g(+0)]\int_{p\eta}^{p\delta}\frac{\sin t}{t}dt,$$

其中 $0\leq g(\delta)-g(+0)<\varepsilon$，又因子 $\int_{pa}^{p\delta}\frac{\sin t}{t}dt$ 关于 p 一致有界，这是由于 $\left|\int_0^t\frac{\sin t}{t}dt\right|<L$，从而

$$\left|\int_{pa}^{p\delta}\frac{\sin t}{t}dt\right|\leq\left|\int_0^{p\delta}\frac{\sin t}{t}dt-\int_0^{pa}\frac{\sin t}{t}dt\right|\leq 2L.$$

因此对积分 I_1 有估計式 $|I_1|<2L\varepsilon$，对于积分

$$I_2=\int_\delta^h[g(u)-g(+0)]\frac{\sin pu}{u}du,$$

由黎曼引理推知当 $p\to\infty$ 时是以零为极限的，这样引理証得。

推論 如果 $g(u)$ 在 $[0,h]$ 上可以写成两个单調增加函数之差（这样的函数和所謂有界变差函数是一样的），狄利克来引理仍然成立。特别对于单調减少函数引理成立。

二、狄利克来-約当判别法

如果在含有 x 点在內的某一区間上，例如在 $[x-h,x+h]$ 上，函数 $f(x)$ 是按段单調函数，那末这函数的富里埃級数在 x 点收斂于 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$。并且如果函数可写成两个单調增加函数之差，結論也一样成立。

【証明】 所謂在一区間按段单調的函数，是指在这个区間上只有有限个单調区間的函数，函数在 x 点显然是連續的或有第一类間断。既然狄利克来引理对于单調增加函数和单調减少函数都成立，不妨假設 f 在 x 点邻域 $[x-h,x+h]$ 內是增加函数。从 §3，我們知道在 x 点富里埃級数的收斂問題，由当 $n\to\infty$ 时积分

$$\frac{1}{\pi}\int_0^h[f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}du$$

的收斂情况来定；根据 §3，第三段，3° 知道，还可以由积分

$$\frac{1}{\pi}\int_0^h [f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{u}du$$

的极限情况来定。既然 f 在 $[x-h,\ x+h]$ 是增加函数，$f(x+u)$ 在 $[0,h]$ 上是 u 的增加函数，$f(x-u)$ 在 $[0,h]$ 上是 u 的减少函数，那末从狄利克来引理推出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^h [f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{u}du$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

三、前节的狄尼定理和狄利克来-約当定理都是富里埃級数收斂的充分条件，它們互不包含，可用例题来説明。

1° 例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln\dfrac{|x|}{2\pi}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

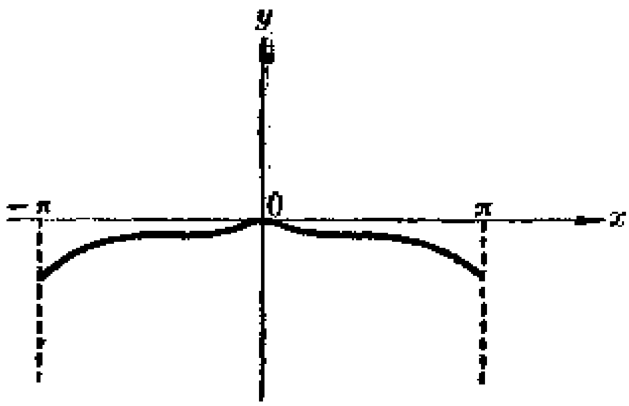


图 4-6-1

在 $[-\pi,\pi]$ 上定义，这函数連續且按段单調（图 4-6-1）。按狄利克来-約当判别法知道它的富里埃級数在 $x=0$ 点收斂于 $f(0)=0$。但是在 $x=0$ 点，对任一 $h>0$，积分

$$\int_0^h\left|\frac{\varphi(u)}{u}\right|du=\int_0^h\frac{|f(u)+f(-u)-2f(0)|}{u}du$$

$$=-\int_0^h\frac{2du}{u\ln\frac{|u|}{2\pi}}=-\int_0^h\frac{2du}{u\ln\frac{u}{2\pi}}$$

是发散的，不满足在 $x=0$ 点的狄尼定理的条件。

2° 又如函数

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{2x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $[-\pi,\pi]$ 上定义，又在 $x=0$ 点的李普希茲条件成立

$$|f(x)-f(0)|=\left|x\cos\frac{\pi}{2x}\right|\leqslant|x|,$$

所以狄尼定理条件满足，但可以証明它不能写成两个单調函数之差，因此狄利克来-約当判别法的条件不成立。这个証明我們这里不来进行，在讲有界变差函数的課程中会遇到这个例子。

四、前一节和这一节关于富里埃級数收斂的問題是对点 x 来討論的，但是如果函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的每一点处适合判别法的条件，自然也就立即得到 $f(x)$ 在一个范圍上的收斂性的結論了。我們这里列举一些結論如下：

1° 如果周期函数 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上有有限导数或有有限的两个单側导数，那末它的富里埃級数在每一点收斂于 $f(x)$ 或 $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

2° 如果周期函数 $f(x)$ 是按段单調函数（在有限区間內只有有限个单調区間），那末它的富里埃級数在每一点收斂于 $f(x)$ 或 $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

五、关于富里埃級数的一致收斂性問題，我們只叙述两个結論，它們的証明需要对黎曼引理和狄利克来引理的一致收斂性的情况进行分析，我們就不詳細討論了。

1° 設周期为 2π 的可积和絕对可积函数 $f(x)$ 在比 $[a,b]$ 更寬的区間上有有界导数 $f'(x)$，那末 $f(x)$ 的富里埃級数在区間

$[a, b]$ 上一致收斂于 $f(x)$。

2° 設周期为 2π 的可积和絕对可积函数 $f(x)$ 在比 $[a, b]$ 更寬的区間上連續且为按段单調函数，那末 $f(x)$ 的富里埃級数在区間 $[a, b]$ 上一致收斂于 $f(x)$。

§6 函数 $f(x)$ 的富里埃級数展开

一、 这一节主要举一些具体例子来說明如何对函数作富里埃級数的展开。容易驗証，所举的例子都是滿足李普希茲条件(或其推論)和狄利克来–約当条件的，所以关于富里埃級数收斂性的結論成立。

如果函数 $f(x)$ 是在长度为 2π 的区間 $(a, a+2\pi]$ 上給定的，利用周期性条件，就可以把它在整个实軸上的值也确定。通常基本区間取为 $(-\pi, \pi]$，$(0, 2\pi]$。如果 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上給定，則 1° 当 $f(-\pi)=f(\pi)$ 时，就可用公式 $f(t+2\pi)=f(t)$ 来延拓；2° 当 $f(-\pi)\neq f(\pi)$ 时，延拓可从 $(-\pi, \pi)$ 或 $(-\pi, \pi]$ 或 $[-\pi, \pi)$ 出发，在从 $(-\pi, \pi)$ 出发时，可以随意指定一值作为 $f(-\pi)=f(\pi)$；又卽使不指定端点之值，对富里埃系数的計算幷沒有影响，因此也不影响富里埃級数的討論。

我們还注意到，如果在 $(-\pi, \pi]$ 中給定的函数 $f(x)$ 是連續的，在作周期延拓后就不一定連續了，除非 $f(-\pi+0)=f(\pi)$。

如果函数 $f(x)$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上可积和絕对可积的奇函数，那末

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx=0,\quad b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx,$$

这时富里埃級数是正弦級数；如果 $f(x)$ 是偶函数，那末

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx=0,$$

而富里埃級数是余弦級数。

[例1] 在 $[-\pi, \pi]$ 上展开函数 $f(x)=x$ 为富里埃級数（图 4-6-2）。

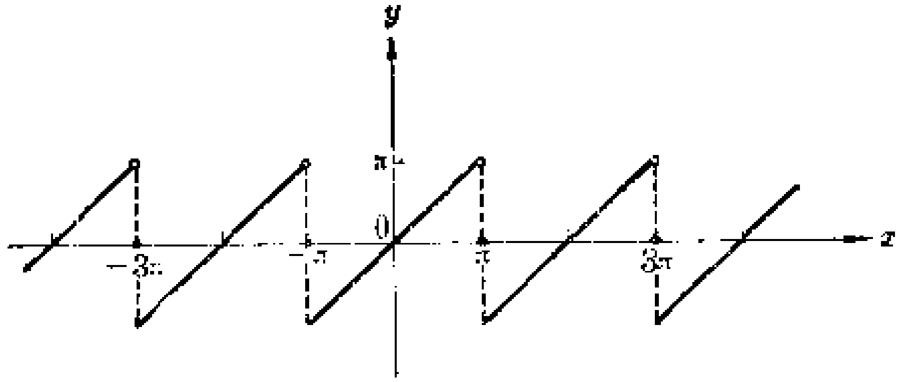


图 4-6-2

在 $[-\pi, \pi]$ 上，x 是奇函数：$a_k=0$；

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin kx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos kx}{k}\bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos kx\,dx\right]$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}\cdot 2}{k},$$

于是

$$f(x)\sim 2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^{k-1}\frac{\sin kx}{k}+\cdots\right).$$

右边級数在 $[-\pi, \pi]$ 上的收斂情况根据 §4 或 §5 知道

$$f(x)\sim 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\sin kx}{k}\quad\begin{cases}x, & -\pi<x<\pi,\\ 0, & x=\pm\pi.\end{cases}$$

而在其他区間上，例如在 $[\pi, 3\pi]$ 上为

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\sin kx}{k}\quad\begin{cases}x-2\pi, & \pi<x<3\pi,\\ 0, & x=\pi, 3\pi.\end{cases}$$

[例2] 在 $[-\pi, \pi]$ 上展开函数

$$f(x)=\begin{cases}c_1, & -\pi<x<0,\\ c_2, & 0<x<\pi\end{cases}$$

为富里埃級数。

当 $c_1=0$ 时，这周期函数在无綫电技术中表示矩形脉冲。

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}c_1\,dx+\int_{0}^{\pi}c_2\,dx\right]=c_1+c_2,$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}c_1\cos kx\,dx+\int_{0}^{\pi}c_2\cos kx\,dx\right]=0,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}c_1\sin kx\,dx+\int_{0}^{\pi}c_2\sin kx\,dx\right]$$

$$=\frac{[(-1)^k-1]}{\pi k}(c_1-c_2)=\begin{cases}0, & k\ \text{为偶数},\\ \dfrac{2(c_2-c_1)}{\pi k}, & k\ \text{为奇数}.\end{cases}$$

所以

$$f(x)\sim\frac{c_1+c_2}{2}+\frac{2(c_2-c_1)}{\pi}\left[\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{\sin kx}{k}+\cdots\right]=\begin{cases}c_1, & -\pi<x<0,\\ c_2, & 0<x<\pi,\\ \dfrac{c_1+c_2}{2}, & x=0,\pm\pi.\end{cases}$$

在这展开式中一般的偶次調和素不存在。

[例 3] 在 $[0, 2\pi]$ 上展开 $f(x)=x$ 为富里埃級数。

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\,dx=2\pi,$$

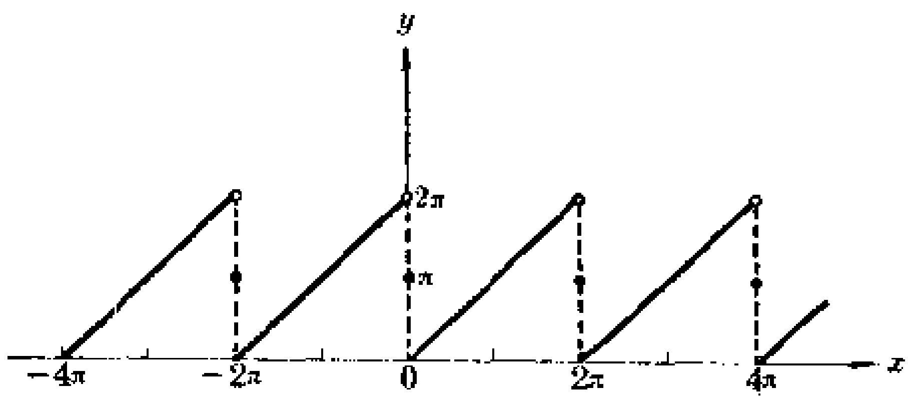


图 4-6-3

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos kx\,dx$$

$$=\frac{1}{k\pi}x\sin kx\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{k\pi}\int_0^{2\pi}\sin kx\,dx=0,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin kx\,dx=-\frac{2}{k}.$$

$$f(x)\sim\pi-2\left(\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\cdots+\frac{\sin kx}{k}+\cdots\right)$$

$$=\begin{cases}x, & 0<x<2\pi,\\ \pi, & x=0,\ 2\pi.\end{cases}$$

从此得到

$$\frac{\pi-x}{2}=\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\cdots+\frac{\sin kx}{k}+\cdots\quad(0<x<2\pi).$$

右边的級数当 $x=0$, $x=2\pi$ 时等于零。因此級数的和不是連續函数，所以級数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$ 在含零或 2π 的区間上不是一致收斂的。

二、設函数 $f(x)$ 是只在长度小于 2π 的区間上給定的可积和絕对可积的函数，如果要按 $\{\cos kx,\ \sin kx\}$ 展开为富里埃級数，可以先把函数补充成为在长 2π 的区間上的可积和絕对可积函数，然后再作周期为 2π 的延拓。

特别，設 $f(x)$ 只在 $(0,\pi]$ 上給出，就可以先补充成为 $(-\pi,\pi]$ 上的函数，从而得到富里埃級数，由种种不同的补充方法，得到种种不同的富里埃級数。但由于局部性定理，这些富里埃級数在原来定义的开区間 $(0,\pi)$ 内的收斂性并不改变。其中有两种延拓方法比較簡单，就是偶函数延拓与奇函数延拓，所得到的分别是余弦級数和正弦級数。

[例 4] 将 $f(x)=x$ 在 $[0,\pi]$ 上展开为余弦級数(图 4-6-4)。

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi,$$

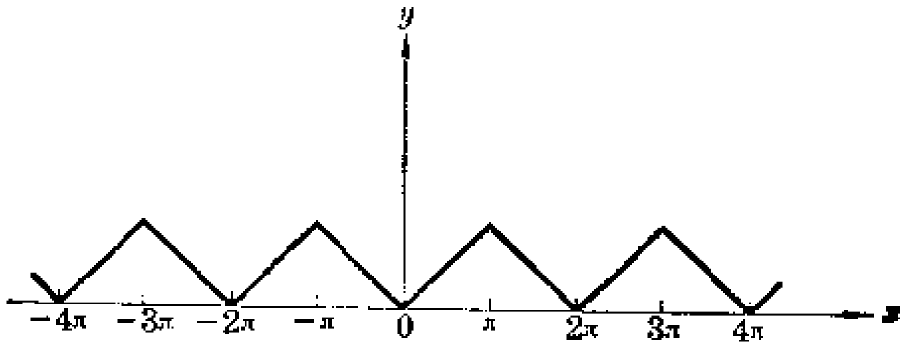


图 4-6-4

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos kx\,dx=\frac{2}{k^2\pi}[(-1)^k-1]=\begin{cases}0, & k\text{ 为偶数,}\\ -\dfrac{4}{\pi k^2}, & k\text{ 为奇数。}\end{cases}$$

$$b_k=0,$$

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\cdots+\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}+\cdots\right)$$

$$(0\leqslant x\leqslant\pi).$$

在 $[-\pi, 0]$ 上,右边的級数之和为 $-x$。

[例 5]　$\cos\gamma x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上是偶函数,試展开为富里埃級数,其中 γ 不是整数。

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos\gamma x\,dx=\frac{2}{\gamma\pi}\sin\gamma\pi,$$

$$\begin{aligned}a_k&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos\gamma x\cos kx\,dx\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[\cos(\gamma+k)x+\cos(\gamma-k)x]dx\\&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\gamma+k)x}{\gamma+k}+\frac{\sin(\gamma-k)x}{\gamma-k}\right]_0^\pi\\&=(-1)^k\frac{2\gamma\sin\gamma\pi}{\pi(\gamma^2-k^2)};\end{aligned}$$

所以在 $[-\pi, \pi]$ 上

$$\cos\gamma x=\frac{2\gamma\sin\gamma\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2\gamma^2}-\frac{\cos x}{\gamma^2-1}+\frac{\cos 2x}{\gamma^2-2^2}-\cdots\right).$$

这級数在 $x=\pm\pi$ 也是收斂的，令 $x=\pi$，并以 $\sin\gamma\pi$ 来除两边得到

$$\operatorname{ctg}\pi\gamma=\frac{2\gamma}{\pi}\left(\frac{1}{2\gamma^2}+\frac{1}{\gamma^2-1}+\frac{1}{\gamma^2-2^2}+\cdots\right).$$

重記 γ 为 x，显然有

$$\operatorname{ctg}\pi x=\frac{2x}{\pi}\left(\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2-2^2}+\cdots\right),$$

它是 $\operatorname{ctg}\pi x$ 按部分分式的展开式。改写这級数为形式

$$\pi\operatorname{ctg}\pi x-\frac{\pi}{\pi x}=\frac{-2x}{1^2-x^2}+\frac{-2x}{2^2-x^2}+\cdots,$$

如果 $0\leqslant x<a<1$，则右边級数在 $[0, a]$ 上一致收斂，因为

$$\sum_1^\infty\frac{2}{n^2-a^2}$$

是收斂級数，所以右边可逐項积分，从而得到

$$\begin{aligned}\ln\frac{\sin\pi x}{\pi x}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)=\ln\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right).\end{aligned}$$

于是得到关于 $\sin\pi x$ 的无穷乘积公式

$$\sin\pi x=\pi x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{k}\right)\left(1+\frac{x}{k}\right).$$

置 $x=\frac{1}{2}$，得到瓦利斯(Wallis)公式：

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots.$$

三、以 $2l$ 为周期的函数的展开式

有时需要把一个确定在 $[-l, l]$ 上的函数按 $\left\{1, \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}\right\}$ 来展开；对确定在 $[0, l]$ 上的函数，有时也需要展开成余弦的或正弦的級数，收斂性的討論对于現在情形也完全适用。

設 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上可积和絕对可积，作变換

$$x=\frac{l\xi}{\pi} \text{ 或 } \xi=\frac{\pi x}{l};$$

当 x 在 $[-l, l]$ 上变动时，ξ 在 $[-\pi, \pi]$ 上变动，那末

$$\varphi(\xi)=f\left(\frac{l\xi}{\pi}\right)=f(x)$$

在 $[-\pi, \pi]$ 上可积和絕对可积，

$$\varphi(\xi)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\xi+b_k\sin k\xi),$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\xi)\cos k\xi\,d\xi=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l\xi}{\pi}\right)\cos k\xi\,d\xi$$

$$=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx\quad(k=0, 1, 2, \cdots),$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx\quad(k=1, 2, \cdots).$$

最后得到

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right).$$

同样，把 $[0, l]$ 上定义的可积和絕对可积函数 $f(x)$ 作余弦級数或正弦級数时，有

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l},\quad a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx,$$

$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{l},\qquad b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

[例 6] 将以下函数展开为正弦級数：

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi x}{l}, & 0<x<\dfrac{l}{2},\\[2mm] 0, & \dfrac{l}{2}<x<l.\end{cases}$$

$$b_1=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\sin^2\frac{\pi x}{l}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=\frac{1}{2},$$

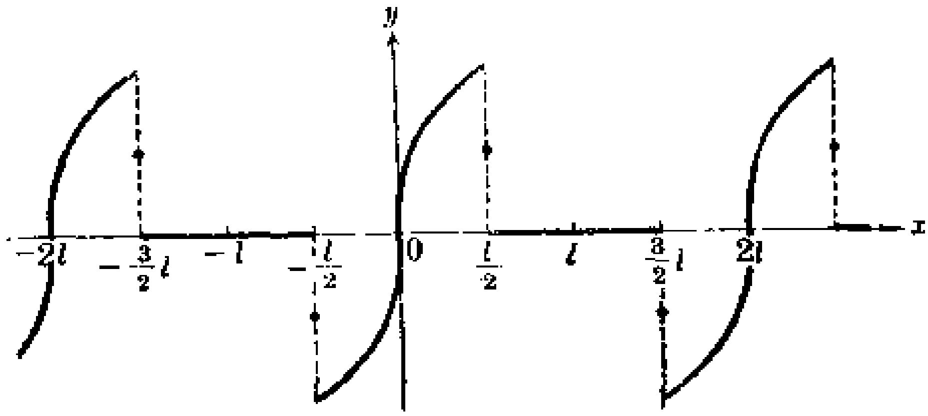


图 4-6-5

$$b_k=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx$$

$$=\begin{cases}0, & k>1,\ k\text{为奇数},\\ -\dfrac{(-1)^{\frac{k}{2}}2k}{\pi(k^2-1)}, & k\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

$$f(x)\sim\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{l}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{4n^2-1}\sin\frac{2n\pi x}{l}$$

$$=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi x}{l}, & 0<x<\dfrac{l}{2},\\ 0, & \dfrac{l}{2}<x<l,\\ \dfrac{1}{2}, & x=\dfrac{l}{2},\\ 0, & x=0,\ l.\end{cases}$$

§7 富里埃級数的逐項积分与逐項微分

一、設 $f(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上按段連續函数，它有富里埃級数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).\tag{1}$$

我們并不假定右边級数表示这个函数，甚至也不假定它是收斂的。我們要証明这級数可以逐項积分。

定理 設 c 和 x 是 $(-\pi,\pi)$ 上任意两点，按段連續函数 $f(x)$

的富里埃級数可以逐項积分得到

$$\int_c^x f(x)dx=\frac{1}{2}a_0(x-c)+\sum_{k=1}^{\infty}\int_c^x(a_k\cos kx+b_k\sin kx)dx. \qquad (2)$$

【証明】 函数

$$F(x)=\int_c^x\left[f(x)-\frac{a_0}{2}\right]dx$$

是 $[-\pi,\pi]$ 上的連續函数且在 $f(x)$ 的連續点有导数 $f(x)$；在 c 点可能有間断

$$F'_+(c)=f(c+0),\quad F'_-(c)=f(c-0).$$

其次，

$$F(\pi)-F(-\pi)=\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-\frac{a_0}{2}\right]dx=\pi a_0-\pi a_0=0.$$

由 §5，第四段知道函数 $F(x)$ 可以展开为收斂的富里埃級数，

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos kx+B_k\sin kx).$$

由于除在 $f(x)$ 的間断点而外，$F'(x)=f(x)-\frac{a_0}{2}$，可以用分部积分法計算系数 A_n，B_n。

$$A_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos kx\,dx$$

$$=+\frac{\sin kx}{\pi k}F(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-\frac{a_0}{2}\right]\sin kx\,dx=-\frac{b_k}{k},$$

$$B_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin kx\,dx$$

$$=-\frac{\cos kx}{\pi k}F(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-\frac{a_0}{2}\right]\cos kx\,dx=\frac{a_k}{k},$$

計算后一式时用到 $F(\pi)=F(-\pi)$ 的事实。这里分部积分公式可以看成是在 $f(x)$ 的每一連續段上的公式經相加而得到。因此

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-b_k}{k}\cos kx+\frac{a_k}{k}\sin kx\right). \qquad (3)$$

置 $x=c$，有

$$0=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{b_k}{k}\cos kc+\frac{a_k}{k}\sin kc\right). \tag{4}$$

相减以上結果，得到

$$\int_c^x f(x)dx-\frac{a_0}{2}(x-c)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{\sin kx-\sin kc}{k}-\sum_{k=1}^{\infty}b_k\frac{\cos kx-\cos kc}{k}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_c^x\cos kx\,dx+b_k\int_c^x\sin kx\,dx\right).$$

这是积分(1)的結果，并且把～号改为＝号。

这个定理对于任意在 $[-\pi, \pi]$ 上可积和絕对可积的函数也是成立的。我們不来証明它。但是利用这一結論，可以引出另一三角級数是富里埃級数的必要条件，在(4)式中置 $c=0$，有

$$A_0=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}. \tag{5}$$

这說明由富里埃系数 b_k 所作的級数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}$ 必定收斂。过去已經得到富里埃系数的必要条件 $a_k\to 0$, $b_k\to 0$ $(k\to\infty)$，現在又得到一个必要条件。

例如考察正弦三角級数

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sin kx}{\ln k},\quad \sum_{k=3}^{\infty}\frac{\sin kx}{\ln\ln k}.$$

由級数收斂的狄利克来判别法知道皆是收斂的，但因为由它們系数所作的級数 $\sum\frac{b_k}{k}$ 是

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k},\quad \sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k\ln\ln k},$$

由积分判别法知道它們全是发散的，所以这两个收斂的三角級数并不是某些函数的富里埃級数。

二、富里埃級数逐項微分一般是不可以的，但可以証明以下定理。

定理　設 $f(x)$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上的連續函数且 $f(-\pi)=f(\pi)$，除在有限个点外，$f(x)$ 有按段連續的导函数 $f'(x)$，那末 $f'(x)$ 的富里埃級数可以从 $f(x)$ 的富里埃級数逐項微分得到。

【証明】　这时 $f(x)$ 可表示为

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\,dt+f(0).$$

設
$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

因为 $f'(x)$ 的富里埃系数为

$$a_0'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\,dx=\frac{1}{\pi}[f(\pi)-f(-\pi)]=0,$$

$$\begin{aligned}a_k'&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos kx\,dx\\&=\frac{1}{\pi}f(x)\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx\\&=\frac{(-1)^k}{\pi}[f(\pi)-f(-\pi)]+kb_k=kb_k,\end{aligned}$$

$$b_k'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin kx\,dx=-ka_k;$$

$$\begin{aligned}f'(x)&\sim\sum_{k=1}^{\infty}(kb_k\cos kx-ka_k\sin kx)\\&=\frac{d}{dx}\left(\frac{a_0}{2}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{dx}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).\end{aligned}$$

因此定理証得。

从前面几节的討論可以看出，要把一个函数展开为富里埃級数，对函数 $f(x)$ 的要求比在展开为泰勒級数时来得低，那时，作出泰勒級数要求在一点有各阶导数，在收斂区間內部函数也无穷次可导，現在只要函数在一个范圍上有有限导数或有两个单侧导数

甚至还有个別的第一类間断点，富里埃級数就在这个范圍上收斂了。从富里埃級数能够表示不連續函数的这一点来說，富里埃級数是比冪級数更为有力的工具，应用的范圍更广。

§8 平方平均迫近

前几节討論了三角函数系的富里埃級数的收斂性問題，下面要介紹別的重要性质，它的結論对于一般的富里埃級数也是成立的。

一、我們对于同一个区間 $[a, b]$ 上的有界函数 f，如果以

$$\|f\| = \sup_{a \le x \le b} |f(x)|$$

定义为它的模，那末对于两个函数 f, g 以

$$\delta = \|f-g\| = \sup_{a \le x \le b} |f(x)-g(x)|$$

定义为它們之間的距离，这样就可以接距离的大小說明函数之間邻近的程度。例如，設不同的函数 $g_1(x)$，$g_2(x)$ 对于 $f(x)$ 的距离 δ_1, δ_2 有关系 $\delta_1>\delta_2$，就表示 g_2 比 g_1 更接近于 f。这个測度就是在討論函数列的一致收斂性时所用的測度。有时，在实际問題中，还引用其他的近迫測度，例如考虑两个函数的平均偏差

$$\delta' = \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx,$$

或平方平均偏差

$$\delta'' = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)-g(x)]^2 dx}$$

作为近迫的測度，也能反映某种实际需要，在这里偏差 δ' 或 δ'' 等于零，就不象 δ 等于零那样要求两个函数完全一致了。在这一节我們討論函数 $f(x)$ 由富里埃級数的部分和作平方平均迫近的性质，这时为簡单起見，代替偏差 δ'' 取 δ'' 的平方作为偏差：

$$\delta^2(f, g) = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)-g(x)]^2 dx.$$

二、封閉性公式

設 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上是可积和平方可积的，又設

$$T_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$$

是任意的 n 阶三角多項式，来計算这个 n 阶三角多項式和 $f(x)$ 的平方平均誤差，在計算时用到三角函数系的正交性。

$$\begin{aligned}\delta_n^2(f, T_n)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2dx\\&=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)T_n(x)dx\right.\\&\qquad\left.+\int_{-\pi}^{\pi}T_n^2(x)dx\right]\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[\frac{\alpha_0}{2}\right.\\&\qquad\left.+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right]dx\\&\qquad+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right]^2dx\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\frac{\alpha_0a_0}{2}\\&\qquad-\sum_{k=1}^{n}(\alpha_ka_k+\beta_kb_k)+\frac{\alpha_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2),\end{aligned}$$

这里的 a_k, b_k 是 $f(x)$ 关于三角函数系的富里埃系数，所以

$$\begin{aligned}\delta_n^2(f, T_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx+\frac{1}{2}&\left[\frac{(\alpha_0-a_0)^2}{2}\right.\\&+\sum_{k=1}^{n}\{(\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2\}\\&\left.-\frac{a_0^2}{2}-\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right],\end{aligned}$$

从这个等式看出，对于不同的 n 阶三角多項式，其中使偏差 δ_n^2 为最小的必須是 $\alpha_k=a_k$, $\beta_k=b_k$，也就是只有 $f(x)$ 的富里埃多項式

(富里埃級数的部分和)使平方平均偏差最小;而等于

$$\delta_n^2(f, S_n[f]) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2).$$

由于 $\delta_n^2(f, S_n[f])$ 是平方平均偏差,不是負数,所以得到

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx,$$

当 n 无限增大时,得到

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx,$$

这个公式称为貝塞尔不等式。

定义 設 $\{\sigma_n(x)\}$ 是在 $[a, b]$ 上的可积和平方可积的函数列。如果当 $n\to\infty$ 时, $\delta_n^2(f, \sigma_n) = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)-\sigma_n(x)]^2 dx$ 收斂于零,就称 $\{\sigma_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上平方平均收斂于 $f(x)$.

由此定义看出,一个可积和平方可积函数 $f(x)$ 的富里埃多項式序列 $\{S_n[f]\}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上平方平均收斂于 $f(x)$ 的充分和必要条件是貝塞尔不等式中的等号成立:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2).$$

这时也称富里埃級数平方平均收斂于 $f(x)$. 这里的等式称为巴塞維尔(Parseval)等式,也称为函数 $f(x)$ 对于三角函数系的封閉性公式。

由于在推导貝塞尔不等式的过程中,主要用到三角函数系的正交性,因此对于一般的正交函数系,也得到可积和平方可积函数由它的富里埃多項式达到平方平均最佳逼近的結論。

設 $\{\varphi_n(x)\}$ 是 $[a, b]$ 上的标准正交系, $f(x)$ 是在 $[a, b]$ 上可积和平方可积的函数

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x), \quad c_k = \int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx,$$

設 n 級的多項式为

$$\tau_n(x)=\gamma_0\varphi_0(x)+\cdots+\gamma_n\varphi_n(x),$$

$$\delta_n^2(f,\tau_n)=\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)-\tau_n(x)]^2dx$$

$$=\frac{1}{b-a}\left[\int_a^b f^2(x)\,dx-2\sum_{k=0}^n\gamma_k c_k+\sum\gamma_k^2\right],$$

对于一般的 $\tau_n(x)$，以 τ_n 为 f 的 n 級富里埃多項式时平方平均偏差最小。因此同样有貝塞尔不等式

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k^2\leq\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

而巴塞維尔等式成立表示 $f(x)$ 的富里埃級数平方平均收斂于 $f(x)$，这时这等式也称为 $f(x)$ 关于 $\{\varphi_n(x)\}$ 的封閉性公式。

定义 如果 $[a,b]$ 上的每一可积和平方可积的函数关于正交函数系 $\{\varphi_k(x)\}$ 的封閉性公式都成立，就称函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上关于可积和平方可积函数类是封閉的。

以后将証明：三角函数系 $\{1,\cos x,\sin x,\cdots\}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上有封閉性。

三、正交函数系的完全性

我們还引入另一概念，它和封閉性概念有密切关系。

定义 設对于 $[a,b]$ 上的一个可积和平方可积的正交函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 不能再补充新的函数 $\bar{\varphi}(x)$，使与一切的 $\varphi_n(x)$ 正交，且 $\int_a^b\bar{\varphi}^2(x)\,dx\neq 0$，就称 $\{\varphi_n(x)\}$ 具有完全性。反之，能够被扩大的正交函数系，称为不完全的。

定理 对于可积和平方可积的函数类而言，如果 $\{\varphi_n(x)\}$ 具有封閉性，那末一定有完全性。

【証明】 不妨設 $\{\varphi_n(x)\}$ 是标准正交系来証。如果 $\bar{\varphi}(x)$ 与每一 $\varphi_n(x)$ 正交，就有

$$\bar{c}_n = \int_a^b \bar{\varphi}(x)\varphi_n(x)dx = 0.$$

由假設，对于 $\bar{\varphi}(x)$ 的封閉性公式成立，必有

$$\int_a^b [\bar{\varphi}(x)]^2 dx = 0,$$

这說明了除了这样的函数 $\bar{\varphi}(x)$ 外，不能再把正交系扩大。

如果限制添上的函数是連續函数，那末除了恒等于零的函数而外，沒有函数同封閉正交系的每一函数正交。因此，如果能証明（在 §10 中我們确实能証明）三角函数系 $\{1, \cos x, \sin x, \cdots\}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上是封閉的，就可以推出以下的定理。

唯一性定理 如果对于一个封閉正交函数系，有两个連續函数 $f_1(x), f_2(x)$ 的富里埃級数相同，那末这两个函数一定相等，也就是一个三角級数最多只能是一个連續函数的富里埃級数。

因为这时 $f_1(x)-f_2(x)$ 的富里埃系数 $c_k^{(1)}-c_k^{(2)}=0$，$c_k^{(i)}$ 是 f_i 的富里埃系数，这說明連續函数 $f_1(x)-f_2(x)$ 同所有的 $\varphi_n(x)$ 正交，所以 $f_1 \equiv f_2$.

§9 算术平均求和概念与費埃尔(Fejér)定理

我們下一节要証明三角函数系在 $[-\pi, \pi]$ 上具有封閉性，在証明之前我們来討論富里埃級数的另一性质，它同一种拓广了的級数的和的概念有关，并从这个性质引出关于連續函数的一致逼近的魏尔斯脫拉斯定理，后一定理本身在数学分析中也很重要。

一、級数的算术平均求和法

无穷級数 $a_0+a_1+\cdots+a_n+\cdots$ 的和的古典定义是部分和所形成的数列

$$A_0=a_0,\ A_1=a_0+a_1,\ \cdots,\ A_n=a_0+\cdots+a_n,\ \cdots$$

的极限值：

$$s=\lim_{n\to\infty} A_n.$$

我們知道并不是每一級数都收斂的，因而不一定有上面的和可言。我們現在对于一个級数，不論它是否收斂，来从部分和数列 $\{A_n\}$ 作它的算术平均数列

$$\alpha_1=A_0,\ \alpha_2=\frac{A_0+A_1}{2},\ \cdots,\ \alpha_n=\frac{A_0+\cdots+A_{n-1}}{n},\ \cdots,$$

如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$ 存在，数值为 $\bar{s}$，那末就說原来的級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 在算术平均法之下有和 $\bar{s}$，否則，說級数在算术平均法之下不可以求和。算术平均求和法也称为 C_1 求和法，它是更一般的蔡沙罗(Cesàro)求和法的一种特殊情况。一个級数按古典意义不一定有和，但按算术平均法可能是有和的。

[例] 級数 $1-1+1-1+\cdots$ 显然不收斂，因为

$$A_{2m-1}=1,\ A_{2m}=0,\ \lim_{m\to\infty}A_n \text{ 不存在。}$$

但是 $$\alpha_{2m-1}=\frac{m}{2m-1},\quad \alpha_{2m}=\frac{m}{2m},\quad \lim_{m\to\infty}\alpha_n=\frac{1}{2}.$$

即 $1-1+1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2}\,(C_1)$ $\left(\text{表示按}C_1\text{求和法有和}\frac{1}{2}\right)$.

可以看出引进了这种和的概念以后，可以从古典的发散級数类中区分出一些发散級数，使在这种求和法之下，仍旧有和可言，所以在对发散級数的討論，求和法有很大的作用。

算术平均求和法，和一般的求和法一样，由于有下述的持續性而有其意义。

定理 如果級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 按古典的收斂定义有和 s，那末这級数必有广义和且数值即为 s.

对于算术平均法来說，这就是下面的**柯西定理**：如果 $\{A_n\}$ 收斂于 s，那末 $\{A_n\}$ 的算术平均数列也收斂于 s.

柯西定理的証明. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=s$，对于 $\varepsilon>0$，存在 N，使当 $n\geq N$ 时，$|A_n-s|<\varepsilon$，又 $|A_n-s|$ 有界，即有 K，使 $|A_n-s|\leq K$.

从而

$$\left|\frac{A_0+A_1+\cdots+A_{n-1}}{n}-s\right|$$

$$=\left|\frac{(A_0-s)+\cdots+(A_{N-1}-s)+(A_N-s)+\cdots+(A_{n-1}-s)}{n}\right|$$

$$\leqslant\frac{NK}{n}+\frac{(n-N)\varepsilon}{n}\leqslant\frac{NK}{n}+\varepsilon,$$

显然当 n 充分大时，可使右边小于 2ε，这就是要証明的。

二、費埃尔定理

設 $f(x)$ 是周期为 2π 的可积和絕对可积函数，在 x 点 $f(x)$ 为連續或有第一类間断，那末 $f(x)$ 的富里埃級数按算术平均法可求和，和为 $f(x)$ 或 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$。如果 $f(x)$ 是周期为 2π 的連續函数，$f(x)$ 的富里埃級数按算术平均法一致收斂于 $f(x)$。

【証明】 設 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$，它的部分和为 $S_n[f(x)]\equiv S_n(x)$，那末

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}du,$$

而部分和的算术平均为

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n}[S_0(x)+\cdots+S_{n-1}(x)]$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sum_{m=0}^{n-1}\sin\frac{2m+1}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}du$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)]\left(\frac{\sin\frac{nu}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2du.$$

設 $f(x)\equiv 1$，那末 $S_k(x)=1$，$\sigma_k(x)=1$，而有

$$\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{nu}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2 du=1.$$

当 x 固定时，

$$\sigma_n(x)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\{f(x+u)+f(x-u)$$

$$-f(x+0)-f(x-0)\}\left(\frac{\sin\frac{nu}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2 du.$$

对于任意給定的 $\varepsilon>0$，取 $\delta(\varepsilon, x)>0$，使当 $0\leqslant u<\delta$ 时，

$$|f(x\pm u)-f(x\pm 0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

把上面的积分分为两个

$$\frac{1}{2n\pi}\left(\int_0^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)=J_1(x)+J_2(x),$$

$$|J_1|\leqslant\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\delta}[|f(x+u)-f(x+0)|$$

$$+|f(x-u)-f(x-0)|]\left(\frac{\sin\frac{nu}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2 du$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{n\pi}\int_0^{\delta}\left(\frac{\sin\frac{nu}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2 du<\frac{\varepsilon}{2}.$$

$$|J_2|\leqslant\frac{1}{2n\pi}\int_{\delta}^{\pi}|f(x+u)+f(x-u)$$

$$-f(x+0)-f(x-0)\,|\left(\frac{\sin\frac{nu}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2 du$$

$$\leqslant\frac{1}{2n\pi}\frac{1}{\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^2}\int_\delta^\pi|f(x+u)+f(x-u)$$

$$-f(x+0)-f(x-0)|\,du.$$

右边的积分收斂，故 n 充分大[$>$ 某 $N(\varepsilon, x)$]时，可使 $|J_2|<\frac{\varepsilon}{2}$，

得
$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

結論的第一部分証得。

如果 $f(x)$ 是周期为 2π 的連續函数，从而一致連續。所以当 $u\to0$ 时，$\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}$ 一致收斂于 $f(x)$，这时前一段証明中的 δ 可以取得与 x 无关；另外存在数 L，使得

$$|f(x+u)+f(x-u)-f(x+0)-f(x-0)|<L,$$

从而
$$|J_2|\leqslant\frac{1}{2n\pi}\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\cdot\pi L=\frac{L}{2n\sin^2\frac{\delta}{2}}.$$

右边与 x 无关，所以当 $n>N\ (\varepsilon)$ 时（N 可取的同 x 无关），$|J_2|<\frac{\varepsilon}{2}$. 定理的第二部分証得。

三、費埃尔定理的应用

从費埃尔定理立即可以推出以下結論。

1° 如果 $f(x)$ 的富里埃級数在某一点收斂，而在这一点函数为連續或有第一类間斷，那末富里埃級数的和一定是 $f(x)$ 或 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

这从算术平均求和法的持續性推出，因而証明了§4，§5中取 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ 作为 s 是必要的。

2° **魏尔斯脱拉斯逼近定理 1**　周期为 2π 的連續函数可用三角多項式一致逼近。

所謂以三角多項式一致逼近函数 $f(x)$ 是指对于任意正数 ε，常可求到三角多項式 $T_n(x)$，使 $|f(x)-T_n(x)|<\varepsilon$ 对一切 x 成立。

由費埃尔定理推知对于周期为 2π 的連續函数 $f(x)$，富里埃級数的部分和的算术平均函数列 $\sigma_n(x)$ 一致收斂于 $f(x)$. 因此对于 $\varepsilon>0$，有 n，使 $|f(x)-\sigma_n(x)|<\varepsilon$ 对于一切 x 成立。而 $\sigma_n(x)$ 显然是一个三角多項式，所以結論成立。

3° 从 2° 还可以得到下面的定理：

魏尔斯脱拉斯逼近定理 2　如果函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上連續，那末在这区間上可以用代数多項式一致逼近。即对于任意正数 ε，必存在代数多項式

$$P(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n,$$

使得对于 $[a, b]$ 上的一切 x 成立 $|f(x)-P(x)|<\varepsilon$.

【証明】 通过代换 $x=a+\frac{x'}{\pi}(b-a)$，把 $f(x)$ 变为 x' 的在 $[0, \pi]$ 上的連續函数，这代换把多項式变为多項式，因此不妨假定原来給出函数的区間就是 $[0, \pi]$.

把函数 $f(x)$ 作偶函数延拓到 $[-\pi, \pi]$，再使成为周期为 2π 的函数，这样延展后成为全区間上的連續周期函数 $\bar{f}(x)$. 由 2°，对任何 $\varepsilon>0$，有三角多項式 $T(x)$，使对一切 x 成立

$$|\bar{f}(x)-T(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

如果将 $T(x)$ 展开为冪級数

$$T(x)=\sum_{m=0}^{\infty}c_mx^m,$$

此級数在任何 $[-A, A]$ 上一致收斂，故对 $\frac{\varepsilon}{2}$，当 n 充分大，取

这級数的 n 項部分和 $P(x)$，在 $[-A, A]$ 上成立（可設 $A\geqslant\pi$）：

$$|T(x)-P(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

合并以上两式得到对于一切 x 成立

$$|\tilde{f}(x)-P(x)|<\varepsilon.$$

特别在 $[0, \pi]$ 上成立 $|f(x)-P(x)|<\varepsilon$。定理因此証得。

这个定理的另一种叙述：在 $[a, b]$ 上的連續函数 $f(x)$ 可展开为一致收斂的以多項式为項的級数。

§10 三角函数系的封閉性

定理 三角函数系 $\{1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上关于可积和平方可积的函数类是封閉的。换句話說，对于这一类中的任意函数 $f(x)$，成立等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx.$$

【証明】 按函数 $f(x)$ 的不同情况，逐步来証。

1° $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上連續且 $f(-\pi)=f(\pi)$。由 2° 对于 $f(x)$ 有三角多項式 $T(x)$，滿足 $|f(x)-T(x)|<\sqrt{\varepsilon}$，設 $T(x)$ 的阶数为 N，$T(x)$ 自然也可以看成是任一 $n\geqslant N$ 阶的三角多項式，所以当 $n\geqslant N$ 时，

$$\delta_n^2(f, S_n[f])\leqslant\delta_n^2(f, T(x))$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2dx<\frac{1}{2\pi}\cdot\varepsilon 2\pi=\varepsilon.$$

即 $\{S_n(f(x))\}$ 平方平均收斂于 $f(x)$。因此封閉性公式成立。

2° 設 $f(x)$ 是有界可积函数。如果修改在一个端点之值，可使 $f(-\pi)=f(\pi)$，这样做对于适合不等式

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f-T]^2dx<\varepsilon$$

的 $T(x)$ 的存在不生影响。

因为 $f(x)$ 是可积的，对于任意正数 ε，取分点 $x_0=-\pi<x_1<\cdots<x_k=\pi$，使满足 $\sum_{i=1}^{k}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon\pi}{2\Omega}$，其中 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，ω_i 是 $f(x)$ 在 Δx_i 上的振幅，Ω 是 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的振幅，因而 $0\leqslant\omega_i\leqslant\Omega$。

作一連續折綫

$$\varphi(x)=f(x_{i-1})+\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}(x-x_{i-1})$$

$$(x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i;\ i=1,\cdots,k),$$

$\varphi(-\pi)=f(-\pi)=f(\pi)=\varphi(\pi)$，对 $\varphi(x)$ 由 1° 存在三角多项式 $\bar{T}(x)$，使

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x)-\bar{T}(x)]^2dx<\frac{\varepsilon}{4}$$

成立，因为当 x 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上时，

$$|f(x)-\varphi(x)|\leqslant\omega_i,$$

所以下式成立

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-\varphi(x)]^2dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{k}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x)-\varphi(x)]^2dx$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{k}\omega_i^2\Delta x_i\leqslant\frac{\Omega}{2\pi}\sum_{i=1}^{k}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{4}.$$

由于 $(a+b)^2\leqslant2(a^2+b^2)$，所以

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-\bar{T}(x)]^2dx$$

$$\leqslant\frac{2}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}[f-\varphi]^2dx+\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi-\bar{T}]^2dx\right\}$$

$$<2\left(\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}\right)=\varepsilon.$$

設 $\bar{T}(x)$ 是 N 阶三角多項式，同样得到

$$\delta_n^2[f, S_n(f)]<\varepsilon \quad 对\ n\geqslant N$$

成立。因此封閉性公式也成立。

3° 对于 $f(x)$ 是广义可积的情形，不妨假定在 $x=\pi$ 有一奇点，对于任何 $\varepsilon>0$，有 $\eta>0$，使

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\pi-\eta}^{\pi} f^2(x)dx<\frac{\varepsilon}{4},$$

作函数 $f_1(x)=\begin{cases} f(x), & -\pi\leqslant x<\pi-\eta, \\ 0, & \pi-\eta\leqslant x\leqslant\pi. \end{cases}$ $f_1(x)$ 是常义可积的，由 2°，对于 $f_1(x)$ 有三角多項式 $T_1(x)$，使

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f_1-T_1]^2dx<\frac{\varepsilon}{4}.$$

所以

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_1(x)]^2dx \\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{[f(x)-f_1(x)]+[f_1(x)-T_1(x)]\}^2dx \\
&\leqslant\frac{2}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-f_1(x)]^2dx+\int_{-\pi}^{\pi}[f_1(x)-T_1(x)]^2dx\right] \\
&<\frac{2}{2\pi}\int_{\pi-\eta}^{\pi}f^2(x)dx+2\cdot\frac{\varepsilon}{4}\leqslant2\cdot\frac{\varepsilon}{4}+2\cdot\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

和 1° 一样，可以推出封閉性公式对于这种函数 f 也成立。

因此，定理全部証明。

§11 富里埃积分

一、富里埃积分概念

在富里埃級数的討論中，我們知道，当 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上滿足一定条件时，可展开为富里埃級数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right),$$

其中系数

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}\,dt,$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}\,dt.$$

因此

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{k\pi(t-x)}{l}\,dt. \quad (1)$$

現在假設 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上为可积和絕对可积，且在任何 $[-l,l]$ 上可以展开为富里埃級数。我們料想当 $l\to\infty$ 时的极限情况。(1)式右边的第一項由于

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt\right|\leqslant\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|f(t)|\,dt$$

$$\leqslant\frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt\to 0 \quad (l\to\infty).$$

对于(1)式右边的級数，在置

$$\alpha_0=0,\ \alpha_1=\frac{\pi}{l},\ \cdots,\ \alpha_k=\frac{k\pi}{l},\ \cdots$$

时，$\Delta\alpha_k=\frac{\pi}{l}$，当 $l\to\infty$ 时趋于零，引用这些符号，級数成为

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\alpha_k\int_{-l}^{l}f(t)\cos\alpha_k(t-x)\,dt,$$

記

$$\varphi(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt,$$

上式就好象函数 $\varphi(\alpha)$ 在 $[0,\infty)$ 上的“积分的和式”

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(\alpha_k)\Delta\alpha_k.$$

当 $l\to\infty$ 时，不論 $\varphi(\alpha)$ 实际上还和 l 有关，又和式有无穷項，形式地写为

$$f(x)=\int_0^{\infty}\varphi(\alpha)\,d\alpha=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt. \qquad (2)$$

(2)式右边的积分以后将称为富里埃积分，公式 (2) 称为富里埃积分公式。

把(2)式的右边再写开来，得到

$$f(x)=\int_0^{\infty}[a(\alpha)\cos\alpha x+b(\alpha)\sin\alpha x]\,d\alpha,$$

其中

$$a(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt,$$

$$b(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt.$$

从此看出它和富里埃級数相似。下一段我們从另一方面直接来考察这个积分。

二、富里埃积分的定义和收斂性問題

1° 設 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上絕对可积。对于固定的 x 作以下的含参变量 α 的积分

$$F(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt,$$

由关于 $f(x)$ 的假定，知道这个积分是存在的。

現在說明 $F(\alpha)$ 在任意区間 $[0,\lambda]$ 上是連續函数。事实上，对于任意給定的 $\varepsilon>0$，存在 $A>0$，使得

$$\int_{-\infty}^{-A}|f(t)|\,dt+\int_{A}^{+\infty}|f(t)|\,dt<\frac{\varepsilon}{4}.$$

又 $\cos\alpha(t-x)$ 在 $0\leqslant\alpha\leqslant\lambda$，$-A\leqslant t\leqslant A$ 上一致連續，对于 $\varepsilon>0$，有 $\eta>0$，使当 $|\Delta\alpha|<\eta$ 时，对一切 $[-A,A]$ 中的 t 成立：

$$|\cos(\alpha+\Delta\alpha)(t-x)-\cos\alpha(t-x)|<\frac{\varepsilon}{2\int_{-A}^{A}|f(t)|\,dt},$$

从而当 $|\Delta\alpha|<\eta$ 时，成立

$$
\begin{aligned}
&|F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)|\\
&\quad=\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\cos(\alpha+\Delta\alpha)(t-x)-\cos\alpha(t-x)]dt\right|\\
&\quad\leqslant 2\left[\int_{-\infty}^{-A}|f(t)|dt+\int_{A}^{\infty}|f(t)|dt\right]\\
&\qquad+\int_{-A}^{A}|f(t)|\cdot|\cos(\alpha+\Delta\alpha)(t-x)-\cos\alpha(t-x)|dt\\
&\quad\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,
\end{aligned}
$$

所以 $F(\alpha)$ 是連續函数。

因此积分

$$
J(\lambda, x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\lambda}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)dt \tag{3}
$$

存在。这个积分同富里埃級数的部分和相似。当 $\lambda\to\infty$ 時，得到的积分称为 $f(x)$ 的富里埃积分，記为

$$
f(x)\sim\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)dt. \tag{4}
$$

对于一般的 $(-\infty, \infty)$ 上的絕对可积函数 $f(x)$，这个积分并不一定收斂，即使收斂也不一定收斂于 $f(x)$. 所以也需要考察它的收斂性問題。

2° 现在和富里埃級数的做法相类似，把部分积分化为狄利克来积分。

由于 $f(t)$ 在 $[-B, B]$ 上絕对可积，可以証明成立等式

$$
\int_{0}^{\lambda}d\alpha\int_{-B}^{B}f(t)\cos\alpha(t-x)dt=\int_{-B}^{B}f(t)dt\int_{0}^{\lambda}\cos\alpha(t-x)d\alpha. \tag{5}
$$

事实上，因为上面已看到

$$
\int_{-B}^{B}f(t)\cos\alpha(t-x)dt
$$

是 α 的連續函数，所以(5)式左边关于 λ 的导数等于

$$\int_{-B}^{B} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt.$$

我們証明右边的导数可以在积分号下进行，也就是等于

$$\int_{-B}^{B} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt.$$

这可以从下面的估計式得到：

$$\left|\frac{1}{\varDelta\lambda}\left[\int_{-B}^{B} f(t)\,dt\int_{0}^{\lambda+\varDelta\lambda}\cos\alpha(t-x)\,d\alpha\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_{-B}^{B} f(t)\,dt\int_{0}^{\lambda}\cos\alpha(t-x)\,d\alpha\right]-\int_{-B}^{B} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt\right|$$

$$\leqslant\int_{-B}^{B}|f(t)|\cdot\left|\frac{1}{\varDelta\lambda}\int_{\lambda}^{\lambda+\varDelta\lambda}\cos\alpha(t-x)\,d\alpha-\cos\lambda(t-x)\right|dt, \quad (6)$$

对于任何 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$，使当 $|\alpha-\lambda|\leqslant|\varDelta\lambda|<\delta$ 从而

$$|\alpha(t-x)-\lambda(t-x)|\leqslant|\varDelta\lambda|\,|t-x|\leqslant\delta[|x|+B]$$

时，
$$|\cos\alpha(t-x)-\cos\lambda(t-x)|<\varepsilon,$$

因此 (6) 式的右边当 $\varDelta\lambda\to 0$ 时而趋于零。(5) 式两边的导数既然相等，又 $\lambda=0$ 时，双方全取零值，所以等式(5)成立。

其次，因为 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt$ 存在，所以积分

$$\int_{-B}^{B} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt$$

当 $B\to\infty$ 时关于 α 一致收斂于 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt$. 因此当 $B\to\infty$ 时，对 (5) 的左边的积分可以应用极限通过积分号的定理，得到

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\lambda}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt\int_{0}^{\lambda}\cos\alpha(t-x)\,d\alpha,$$

即
$$J(\lambda,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}\,dt.$$

$J(\lambda, x)$ 还可以写成

$$J(\lambda, x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty [f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin \lambda u}{u}\,du. \qquad (7)$$

由于
$$1=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \lambda u}{u}\,du \quad (\lambda>0),$$

所以

$$J(\lambda, x)-s(x)$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty [f(x+u)+f(x-u)-2s(x)]\frac{\sin \lambda u}{u}\,du. \qquad (8)$$

如果对于点 x，有适当的 $s(x)$，使

$$\lim_{\lambda\to\infty}[J(\lambda, x)-s(x)]=0,$$

那末 $f(x)$ 的富里埃积分在 x 点收敛于 $s(x)$。

对于富里埃积分也有局部性定理，因为 $f(x+u)+f(x-u)$ 絶对可积，对 $\varepsilon>0$，存在 $A_0>1$，使得

$$\int_{A_0}^\infty |f(x+u)+f(x-u)|\,du<\varepsilon,$$

又
$$\left|\frac{\sin \lambda u}{u}\right|\leqslant\frac{1}{u}<1,$$

所以对一切 λ 成立

$$\left|\int_{A_0}^\infty [f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin \lambda u}{u}\,du\right|<\varepsilon.$$

設 h 为任意正数 $h<A_0$，积分

$$\left|\int_h^{A_0} [f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin \lambda u}{u}\,du\right|$$

当 λ 充分大时可使小于 ε，因此积分

$$\int_h^\infty [f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin \lambda u}{u}\,du$$

当 $\lambda\to\infty$ 时趋于零，从而(7)的收斂性的討論只由以下的积分决定

$$\int_0^h [f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin \lambda u}{u}\,du,$$

而 h 又是任意小的正数，从此收斂性問題化为以前关于富里埃級数的同样的問題。因此可以直接列出結論，而不需要重复証明，并且結論和以前也是相同的。

例如，設 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上絕对可积，且在 x 点有导数或有两个单側导数，那末 $f(x)$ 的富里埃积分在这一点收斂于 $f(x)$ 或 $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

別的判別法就不列出了。

三、富里埃变换

如果 $f(x)$ 是偶函数或奇函数，那末积分

$$J(\lambda, x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\lambda d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos\alpha t\cos\alpha x+\sin\alpha t\sin\alpha x)\,dt$$

只有含余弦的积分或含正弦的积分，因而

$$f(x)\sim\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty f(t)\cos\alpha t\cos\alpha x\,dt$$

或
$$f(x)\sim\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty f(t)\sin\alpha t\sin\alpha x\,dt.$$

如果 $f(x)$ 原来只是 $[0, \infty)$ 上的絕对可积函数，就有两种簡单的延拓方法，使 $f(x)$ 得到以上两种积分之一。

設 $f(x)$ 是偶函数且在每一点滿足富里埃积分的收斂性条件，那末等式

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\alpha x\,d\alpha\int_0^\infty f(t)\cos\alpha t\,dt$$

成立。置
$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos\alpha t\,dt,$$

上面的等式可以表示为

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(\alpha)\cos x\alpha\,d\alpha.$$

在这两个公式中，$f(x)$ 和 $F_c(\alpha)$ 以完全同样的方式相互表达，

$F_c(\alpha)$ 称为 $f(x)$ 的富里埃余弦变换。設 $f(x)$ 是 $[0, \infty)$ 上的已知的函数，满足上面所説的收斂性条件，那末

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_c(\alpha)\cos x\alpha\,d\alpha$$

是关于未知函数 $F_c(\alpha)$ 的积分方程，公式

$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt$$

給出这积分方程的解。

完全同样地，如果对于 $f(x)$ 成立：

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\alpha x\,d\alpha\int_0^{\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt,$$

置
$$F_s(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt,$$

就有
$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_s(\alpha)\sin x\alpha\,d\alpha.$$

这里的 $F_s(\alpha)$ 称为 $f(x)$ 的富里埃正弦变换。

現在討論富里埃积分的复数形式和富里埃变换。

設
$$f(x)\sim\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt,$$

由于 $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt$ 是 α 的偶函数，所以

$$f(x)\sim\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt. \tag{9}$$

又因为 $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\alpha(t-x)\,dt$ 存在，而是 α 的奇函数，所以

$$\int_{-B}^{B}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\alpha(t-x)\,dt=0.$$

因而柯西主值为

$$\text{V. P. }\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\alpha(t-x)\,dt=0.$$

对(9)添上等于零的一項，有

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt$$

$$+i\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha(t-x)\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\alpha(t-x)}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x}d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\alpha t}dt.$$

最后的积分称为$f(x)$的富里埃积分的复数形式，自然它不一定收斂，并且其中虚部的积分应了解为柯西主值。如果原来的$f(x)$满足富里埃积分的收斂性条件且和等于$f(x)$，那末

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x}d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\alpha t}dt,$$

置
$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\alpha t}dt,$$

就有
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\,e^{-ix\alpha}d\alpha.$$

$F(\alpha)$称为$f(x)$的富里埃变换，而$f(x)$称为$F(\alpha)$的富里埃逆变换。

富里埃变换是在数学物理中一种有用的积分变换。

（注） 富里埃級数也有它的复数形式，設

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

由欧拉公式

$$\cos kx=\frac{1}{2}(e^{ikx}+e^{-ikx}),$$

$$\sin kx=\frac{1}{2i}(e^{ikx}-e^{-ikx})=\frac{i}{2}(e^{-ikx}-e^{ikx}),$$

得到級数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(a_k - b_k i)e^{ikx} + \frac{1}{2}(a_k + b_k i)e^{-ikx}\right],$$

簡記此式为

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx},$$

其中

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad \begin{cases} c_k = \frac{1}{2}(a_k - b_k i), \\ c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + b_k i), \end{cases} \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

因此 c_{-k} 与 c_k 互为共軛：$c_{-k} = \bar{c}_k$，这式中右边級数的收斂問題应了解为 $\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ 当 $n \to \infty$ 时的极限問題。对于复数形式的富里埃系数 c_k 有公式

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

四、例題

［例 1］ 設 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

它在 $[0, \infty)$ 上滿足富里埃积分的收斂条件，作富里埃余弦积分：

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos \alpha x \, d\alpha \int_0^{\infty} f(t)\cos \alpha t \, dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos \alpha x \, d\alpha \int_0^{1} \cos \alpha t \, dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x \sin \alpha}{\alpha} d\alpha = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

于是得到

$$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{\pi}{4}, & x=1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

自然这个积分也可以直接应用 $\int_0^\infty \frac{\sin\lambda x}{x}\,dx$ 計算得到。

[例 2] 把 $f(x)=e^{-\beta x}(x>0,\ \beta>0)$ 展开为正弦积分。

$$f(x)\sim\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin x\alpha\,d\alpha\int_0^\infty e^{-\beta t}\sin\alpha t\,dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha\sin x\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\,d\alpha=\begin{cases}e^{-\beta x}, & x>0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

于是得到

$$\int_0^\infty \frac{\alpha\sin x\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\,d\alpha=\begin{cases}\frac{\pi}{2}e^{-\beta x}, & x>0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

[例 3] 解积分方程

$$\int_0^\infty g(t)\sin xt\,dt=f(x),$$

而

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$

因为

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(t)\sin xt\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(t),$$

右边的函数满足收斂性条件，且 $f(x)$ 連續，所以

$$g(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(\alpha)\sin t\alpha\,d\alpha$$

$$=\int_0^\pi \sin\alpha\sin t\alpha\,d\alpha=\frac{\sin\pi t}{1-t^2}.$$

习 題

1. 証明:

(1) $1, \cos x, \cos 2x, \cdots, \cos nx, \cdots$;

(2) $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \cdots, \sin nx, \cdots$

皆是 $[0, \pi]$ 上的正交系；但 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$ 不是 $[0, \pi]$ 上的正交系.

2. 証明 $\sin x, \sin 3x, \cdots, \sin(2n+1)x, \cdots$ 是 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的正交系，写出它的标准正交系，并导出 $\sin\frac{\pi x}{2l}, \sin\frac{3\pi x}{2l}, \cdots, \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \cdots$ 是 $[0, l]$ 上的正交系。

3. 設 $y_n(x)$，$y_m(x)$ 分别滿足微分方程

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy_n}{dx}\right)+\lambda_n y_n=0,\quad \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy_m}{dx}\right)+\lambda_m y_m=0\quad \lambda_n\neq\lambda_m$$

又 $y_n(a)=y_n(b)=y_m(a)=y_m(b)=0$。証明 $y_n(x)$，$y_m(x)$ 在 $[a, b]$ 上正交。

4. 設 $\varphi_n(x)=\operatorname{sign}\sin(2^{n+1}\pi x)\ (0\leqslant x\leqslant 1)$，$\varphi_n(x)$ 在

$$\left(0, \frac{1}{2^{n+1}}\right), \left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{2}{2^{n+1}}\right), \cdots, \left(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}, 1\right)$$

交替取值 $+1$ 和 -1，証明 $\{\varphi_n(x)\}$ 是 $[0, 1]$ 上的正交系。

5. (1) 任意一个 n 次多项式必可用 $k\leqslant n$ 的勒让得多項式 $P_k(x)$ 綫性表示；

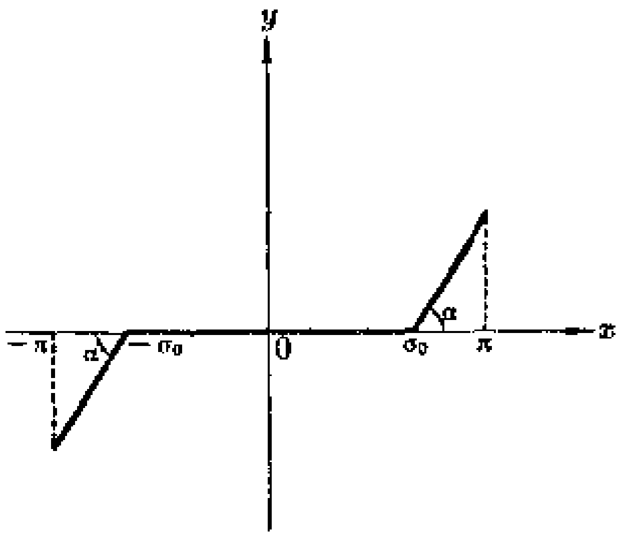
(2) 在 $[-1, 1]$ 上不为零的多項式 $Q_0(x), \cdots, Q_n(x)$ 若組成正交系 $\{Q_n(x)\}$，則 $Q_n(x)$ 与 $P_n(x)$ 只能相差一个常数因子。

6. 設 $f(x)=\begin{cases}-c, & -A\leqslant x\leqslant A\quad \text{当 } x \text{ 增加时},\\ c, & -A\leqslant x\leqslant A\quad \text{当 } x \text{ 减少时},\\ 0, & x<-A,\ A<x.\end{cases}$

求 $f(A\sin t)$ 的富里埃系数 a_0, a_1, b_1。

7. 設函数 $f(x)$ 的图形如下，其中 $0<\sigma_0<\pi, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，試求 $f(A\sin t)$，$\pi\geqslant A>\sigma_0$ 的富里埃系数 b_1。

$$\left(b_1 = A\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{2A}{\pi}(\mathrm{tg}\,\alpha)\arcsin\frac{\sigma_0}{A} - \frac{2\sigma_0\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\pi}\sqrt{1-\left(\frac{\sigma_0}{A}\right)^2}\right)$$



习題　7

8．設 $f(x)$ 可积、絕对可积，証明：

(1) 如果函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上滿足 $f(x+\pi)=f(x)$，那末 $a_{2m-1}=b_{2m-1}=0$；

(2) 如果函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上滿足 $f(x+\pi)=-f(x)$，那末 $a_{2m}=b_{2m}=0$．

9．周期为 2π 的可积和絕对可积函数 $f(x)$ 的富里埃系数为 a_n, b_n，計算：

(1) 平移函数 $f(x+k)$（k 为常数）的富里埃系数 $\bar{a}_n$, $\bar{b}_n$；

(2) 折合函数 $F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\,dt$ 的富里埃系数 A_n, B_n 設有关的积分順序可交換．

10．設 $f(t)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上按段連續，当 $t=0$ 連續且有单側导数，那末当 $p\to\infty$ 时，

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\cos\frac{t}{2}-\cos pt}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \to \frac{1}{2}\int_0^{\pi}[f(t)-f(-t)]\mathrm{ctg}\,\frac{t}{2}\,dt.$$

11．設 $T_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}\cos\nu x$, $T_0(x)=\frac{1}{2}$, $\sigma_n(x)=\frac{T_0(x)+\cdots+T_n(x)}{n+1}$，

那末

(1) $\sigma_n(x)=\frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$;

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n(x)\,dx=\pi$。

12. 利用$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}=\int_0^x\sum_{k=1}^{n}\cos kt\,dt=-\frac{x}{2}+\int_0^x\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$,

求$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$之値。

13. 設$\varphi(z)$在$[a, b]$上为单調增加函数,那末

(1) 如果$a=0$, $b<0$, 有$\frac{1}{\pi}\int_a^b\varphi(z)\frac{\sin pz}{z}dz\to-\frac{1}{2}\varphi(-0)\quad(p\to\infty)$;

(2) 如果$a<0$, $b>0$, 有$\frac{1}{\pi}\int_a^b\varphi(z)\frac{\sin pz}{z}dz\to\frac{\varphi(+0)+\varphi(-0)}{2}(p\to\infty)$。

14. 对于$[-\pi, \pi]$上的函数:

(1) $f(x)=|x|^\alpha$, $\alpha>0$;

(2) $f(x)=|\sin x|^\alpha\quad(0<\alpha<1)$;

(3) $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\frac{1}{x}, & 0<x\leqslant\pi,\\ 0, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\end{cases}\quad(0<\alpha<1)$,

討論富里埃級数在$x=0$点的收斂情况。

15. 設$f(x+2\pi)=f(x)$, $f(x)$有r次导数$\varphi(x)$, $\varphi(x)$可积(且为有限),并且$\int_0^{2\pi}f(t)\,dt=0$, 証明

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k^r}\int_0^{2\pi}\cos\left[k(t-x)+\frac{r\pi}{2}\right]\varphi(t)\,dt.$$

16. 对于任一正数数列$\{\varepsilon_n\}$ $\varepsilon_n\to0$必有連續函数$f(x)$,使$f(x)$的富里埃系数有以下关系: $|a_n|+|b_n|>\varepsilon_n$对无穷多个$n$成立。

17. 在区間$[-\pi, \pi]$上把下列函数展开为富里埃級数:

(1) $f(x)=\operatorname{sign}x,\quad-\pi\leqslant x\leqslant\pi$;

(2) $f(x)=\begin{cases}ax, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ bx, & -\pi\leqslant x<0.\end{cases}$

問展开式中只有正弦項或只有余弦的項时, a, b的值应当如何?

18. 在$[0, 2\pi]$上展开函数 x^2 为富里埃級数。

19. 把$[0, \pi]$上的函数 x^2 展开为余弦級数，并求級数 $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 之值。

20. (1) 把 $f(x)=x-[x]$ 在 $[0, 1]$ 上展开为富里埃級数；

(2) 在 $[-l, l]$ 上展开函数 $f(x)=x$ 为富里埃級数；

(3) 在 $[-l, l]$ 上展开 $f(x)=x+|x|$ 为富里埃級数；

并作出图形。

21. 如何把区間 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内已知的可积函数延拓到 $(-\pi, \pi)$ 内，而使它的富里埃級数的形式为：

(1) $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}\sin(2n-1)x \quad (-\pi<x<\pi)$；

(2) $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\cos(2n-1)x \quad (-\pi<x<\pi)$.

22. 三角多項式 $p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$ 的富里埃級数是怎样的？

23. 利用函数 $f(x)=\operatorname{sign} x\ (-\pi<x<\pi)$ 的富里埃展开式求莱布尼茲級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的和。

24. 証明：

(1) 如果 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 内是单調下降函数，那末 $b_n\geqslant 0$；

(2) 如果 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 内是凸函数即对 $0<x_1<x<x_2<2\pi$ 常成立

$$f(x)\leqslant\frac{(x_2-x)f(x_1)+(x-x_1)f(x_2)}{x_2-x_1},$$

那末对 $n>0$ 成立 $a_n\geqslant 0$.

25. (1) 設 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是两个单調收斂于零的正数列，那末

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}a_n\cos nx,\quad g(x)=\sum_{1}^{\infty}b_n\sin nx$$

对 $x=2k\pi$ 以外的一切点是連續的；

(2) 在 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的同样的假定下，$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n\cos nx$，$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n\cos nx$ 对于 $x=(2k+1)\pi$ 以外的一切点是連續的。

26. 如果周期为 2π 的函数 $f(x)$ 有連續的二阶导数 $f''(x)$，从 $f(x)$ 的富里埃系数的性质可断定 $f(x)$ 的富里埃級数一致收斂于 $f(x)$.

27. 設 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx$ 的系数 b_n 单調减少趋向于零又 $f(x)$ 可积，那末

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 是 $f(x)$ 的富里埃級数。

28．設 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上是单調增加函数，那末 $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$，$b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$。

29．設 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上連續，$f(-\pi) = f(\pi)$，且有分段連續的导函数 $f'(x)$，那末 $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$，$b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$。

30．由展开式 $x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{n}$ $(-\pi < x < \pi)$ 用逐項积分法在 $(-\pi, \pi)$ 內把 x^2，x^3 展开为富里埃級数。

31．在 $[-\pi, \pi]$ 上的連續函数 $f(x)$ 有分段連續的导函数 $f'(x)$，那末

$$f'(x) \sim \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(nb_n + (-1)^n c) \cos nx - na_n \sin nx],$$

式中 a_n，b_n 是 $f(x)$ 的富里埃系数，$c = \frac{1}{\pi}[f(\pi) - f(-\pi)]$，并从此推出

$$c = \lim_{n\to\infty} [(-1)^{n+1} nb_n].$$

32．設給定三角級数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$，如果

$$\frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(nb_n + (-1)^n c) \cos nx - na_n \sin nx],$$

其中

$$c = \lim_{n\to\infty} [(-1)^{n+1} nb_n]$$

是某一函数 $\varphi(x)$ 的富里埃級数，那末 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 是函数 $f(x) = \int_0^x \varphi(x) dx + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的富里埃級数，这函数在 $(-\pi, \pi)$ 上連續，而这富里埃級数收斂于 $f(x)$，且在 $\varphi(x)$ 的連續点成立 $f'(x) = \varphi(x)$。($\varphi(x)$ 可积和絕对可积)。

33．利用上題証明 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin nx}{n^2 - 1}$ 是某一在 $(-\pi, \pi)$ 上連續可微分函数的富里埃級数，收斂于 $f(x)$，而 $f(x)$ 滿足 $f''(x) + f(x) = -\sin x$，从而求出 $f(x)$。

34．設 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积平方可积，又 a_n，b_n、$\bar{a}_n$，$\bar{b}_n$ 依次为 f，g 的富里埃系数，那末成立

$$\frac{a_0\bar{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\bar{a}_n + b_n\bar{b}_n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx.$$

35．已知 $\varphi_n(x) = \text{sign} \sin (2^{n-1}\pi x)$ $(0 \leq x \leq 1)$ $\left(\varphi_n(x)\text{ 在 }\left(0, \frac{1}{2^{n-1}}\right), \left(\frac{1}{2^{n+1}},\right.\right.$

$\frac{2}{2^{n+1}}\Big), \cdots, \Big(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}, \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}}\Big)$ 交替取值 $+1$ 和 $-1\Big)$ 是 $[0, 1]$ 上的正交系，証明它不是完全的［提示：考慮 $\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx$］.

36. (1) 利用 $f(x)=x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的展开式和封閉性公式，証明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6};$$

(2) 利用 $f(x)=|x|$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的展开式和封閉性公式，求

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}.$$

37. 在 $[a, b]$ 上任意有限个連續函数构成的正交函数組不会是完全的。

38. 从 $1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的封閉性推出：

(1) $1, \cos x, \cos 2x, \cdots$ 在 $[0, \pi]$ 上有封閉性；

(2) $\sin x, \sin 2x, \cdots, \sin nx, \cdots$ 在 $[0, \pi]$ 上有封閉性。

39. $[0, \pi]$ 上連續的函数 $f(x)$ 可用余弦多項式逼近。

40. 設周期为 2π 的連續函数 $f(x)$ 有連續导数 $f'(x)$，証明可用三角多項式一阶逼近 $f(x)$：即对 $\varepsilon>0$，存在三角多項式 $T(x)$，使同时成立

$$|f(x)-T(x)|<\varepsilon, \quad |f'(x)-T'(x)|<\varepsilon.$$

41. 可以用 $(C, 1)$ 求和的必要条件是：$\frac{a_n}{n}\to 0$。

42. 討論級数

(1) $1-2^2+3^2-4^2+5^2-\cdots$；

(2) $1+0-1+1+0-1+\cdots$

按算术平均法求和的可能性。

43. 求級数 $\sin x+\sin 2x+\cdots$ 的 $(C, 1)$ 和。

44. 若 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，則 $f(x)$ 的富里埃級数的 $(C, 1)$ 部分和 σ_n 必对一切 x 及 n 成立 $m\leqslant\sigma_n\leqslant M$。

45. 設 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 可以用 $(C, 1)$ 求和，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为收斂的充要条件是

$$\frac{t_n}{n}=\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}\to 0 \quad (n\to\infty).$$

46. 若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=s(C, 1)$，則 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=s-a_0(C, 1)$。

47. 用富里埃积分表示下列函数：

(1) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|\leqslant\pi,\\ 0, & |x|>\pi;\end{cases}$

(2) $f(x)=e^{-\beta|x|}\quad(\beta>0)$.

48. 求下列方程的解 $\varphi(x)$:

(1) $\int_0^\infty\varphi(y)\cos xy\,dy=\dfrac{1}{1+x^2}$;

(2) $\int_0^\infty\varphi(y)\sin xy\,dy=e^{-x}\quad(x>0)$;

(3) $\int_0^\infty\varphi(y)\sin xy\,dy=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\cos x, & 0\leqslant x<\pi,\\ -\dfrac{\pi}{4}, & x=\pi,\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$

49. 証明 $\dfrac{2}{\pi}\int_0^\infty\dfrac{\sin^2 z}{z^2}\cos 2xz\,dz=\begin{cases}1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 1\leqslant x.\end{cases}$

50. 对下列函数 $f(t)$,求富里埃逆变换 $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-itx}dt$,設:

(1) $f(x)=xe^{-\beta|x|}\quad(\beta>0)$;

(2) $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

51. 設 $f(x)$ 为正則函数$\left(在每一点\ x\ 的函数値\ f(x)=\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right)$,在 $[a, b]$ 上按段連續,并且对 $[a, b]$ 上的每一 x,$f(x)$ 的两个单側导数存在,那末

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_a^b f(t)\cos\alpha(x-t)\,dt.$$

52. 設 $f(x)$ 是偶函数而有富里埃变换,那末富里埃变换也是偶函数,等于 $f(x)$ 的富里埃余弦变换;設 $f(x)$ 是奇函数,富里埃变换存在,那末富里埃变换也是奇函数,而等于 $f(x)$ 的富里埃正弦变换乘 $(+i)$。